Ион ГОЯН Раиса ГРИГОР Василе МАРИН Флорентин СМАРАНДАКЕ

Алгебра

в упражнениях и задачах для лицеев

Множества. Операции над множествами

Отношения и функции

Элементы комбинаторики

CARTIER educational

Ион ГОЯН Раиса ГРИГОР Василе МАРИН Флорентин СМАРАНДАКЕ

Алгебра

в упражнениях и задачах для лицеев

Множества. Операции над множествами

Отношения и функции

Элементы комбинаторики

CARTIER educational

CARTIER
Editura Cartier SRL, str. Bucureşti, nr. 68, Chişinău, MD2012.
Tel./fax: 24 83 68. E-mail: cartier@mdl.net
Editura Codex 2000 SRL, str. Paul Ionescu, nr. 6, sectorul 1, Bucureşti.
Tel./fax: 01/223 44 88. GSM: 094 30 49 15.

Difuzare:
Bucureşti: str. Paul Ionescu, nr. 6, sectorul 1.
Tel./fax: 01/223 44 88. GSM: 094 30 49 15.
Chişinău: bd. Mircea cel Bătrîn, nr. 9, sectorul Ciocana. Tel.: 34 64 61.

АЛГЕБРА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИЦЕЕВ
(Множества. Операции над множествами. Отношения и функции. Элементы комбинаторики.)

Autori: Ion Goian, Raisa Grigor, Vasile Marin, Florentin Smarandache.

Coperta: Vitalie Coroban
Prepress: Centrul de Matematică Aplicată şi Informatică

Cărţile CARTIER pot fi procurate în toate librăriile bune
din România şi Republica Moldova.

LIBRĂRIILE CARTIER
Casa Cărţii, bd. Mircea cel Bătrîn, nr. 9, sectorul Ciocana, Chişinău. Tel.: 34 64 61.
Librăria din Hol, str. Bucureşti, nr. 68, Chişinău, MD2012.

Tipărit în Republica Moldova de Concernul Presa. Comanda 1148
ISBN 9975-79-041-0

От авторов

Настоящая работа охватывает упражнения и задачи по алгебре, сгруппированные по главам в соответствии со школьными программами старших классов лицеев и средних общеобразовательных школ. Цель ее – математическая подготовка учеников лицеев всех категорий в их индивидуальной работе. Ее можно успешно использовать для внеклассной работы, так как в ней читатель найдет важные теоремы и формулы, главные определения и понятия, которые не всегда имеются в школьных учебниках.

Авторы

Обозначения

$=$	равно;
$\neq$	неравно;
$\in$	принадлежит;
$\notin$	не принадлежит;
$\subseteq$	включено в;
$\supseteq$	содержит;
$\cap$	пересечение;
$\cup$	объединение;
$\varnothing$	пустое множество;
$\vee$	(или) дизъюнкция;
$\wedge$	(и) конъюнкция;
$p \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} q$	по определению p есть q;
$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$	множество всех натуральных чисел;
$\mathbf{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$	множество всех целых чисел;
$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle\vert\, m,n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\}$	множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$	множество всех действительных чисел;
$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a,b \in R,\ i^2 = -1\}$	множество всех комплексных чисел;

$A_+ = \{x \in A \mid x > 0\},\ A \in \{\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbb{R}\}$;
$A_- = \{y \in A \mid y < 0\},\ A \in \{\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbb{R}\}$;
$A^* = \{z \in A \mid z \neq 0\} = A \setminus \{0\},$
$\quad A \in \{\mathbb{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbb{R}, \mathbf{C}\}$;

$\lvert x \rvert$	модуль (абсолютная величина) числа $x \in \mathbb{R}$;

$[x]$	целая часть числа $x \in \mathbb{R}$;
$\{x\}$	дробная часть числа $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \{x\} < 1$;
(a, b)	упорядоченная пара, где a – первый и b – второй элемент;
(a, b, c)	упорядоченная тройка с соответствующими элементами a, b, c;
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$	прямое (декартово) произведение множеств A и B;
$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$	прямое (декартово) произведение множеств A, B и C;
E	универсальное множество
$P(E) = \{X \mid X \subseteq E\}$	множество частей (подмножеств) множества E;
$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall)x \in E(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$	равенство множеств A и B;
$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall)x \in E(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$	A содержится в B;
$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \vee x \in B\}$	объединение множеств A и B;
$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B\}$	пересечение множеств A и B;
$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	разность множеств A и B;
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	симметрическая разность;
$C_E(A) = \overline{A} = E \setminus A$	дополнение множества A относительно множества E.
$\alpha \subseteq A \times B$	отношение α определенное на множествах A и B;
$f: A \longrightarrow B$	функция (отображение) определенное на A со значениями в B;
$D(f)$	область определения функции f;
$E(f)$	область значений функции f.

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1.1. Основные определения и понятия

Изложить аксиоматитческую теорию множеств на элементарном уровне – это довольно сложная задача. Поэтому под **множеством** интуитивно будем понимать совокупность предметов, которые назовем **элементами** или **точками** этого множества. Множество считается заданным, если даны его элементы или указано некоторое свойство, которому должны удовлетворять ее элементы или свойство, которое отличает их от элементов другого множества. В дальнейшем множества будут обозначаться большими латинскими бувами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$, а ее элементы – маленькими латинскими буквами $a, b, c, \ldots, x, y, z$ и т.д.

Если a является элементом множества A, то будем писать $a \in A$ и читать "a принадлежит A", или "a есть элемент из A". Если же a не является элементом множества A, то будем писать $a \notin A$ и читать "a не принадлежит A".

Среди всех множеств предположим существование одного множества, обозначаемого $\varnothing$ и называемого **пустым множеством**, которое не содержит ни одного элемента.

Множество, которое содержит только один элемент a, обозначается $\{a\}$. Множество, которое содержит только элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначается $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Если A – множество, все элементы которого обладают свойством P, то запишем $A = \{x | x \text{ удовлетворяет } P\}$, или

$A = \{x|P(x)\}$, и будем читать: "A состоит из тех и только тех элементов, которые обладают свойством P (для которых предикат $P(x)$ является истинным)."

В дальнейшем будем использовать обозначения:

$I\!N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$I\!N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество ненулевых натуральных чисел;

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множество целых чисел;

$\mathbf{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ – множество ненулевых целых чисел;

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}, n \in I\!N^* \right\}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbf{Q}^*$ – множество ненулевых рациональных чисел;

$I\!R$ – множество действительных чисел;

$I\!R^*$ – множество ненулевых действительных чисел;

$I\!R_+ = \{x \in I\!R | x \geq 0\}$; $I\!R_+^* = \{x \in I\!R | x > 0\}$;

$\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in I\!R\}$ – множество комплексных чисел;

$\mathbf{C}^*$ – множество ненулевых комплексных чисел;

$m \in \{1, 2, \ldots, n\} \Leftrightarrow m = \overline{1, n}$;

$D(a) = \{c \in \mathbf{Z}^* | a \,\vdots\, c\}$ – множество всех целых делителей числа $a \in \mathbf{Z}$;

$n(A) = |A|$ – число элементов конечного множества A.

Замечание. *Считаем известными логические символы: конъюнкция* $\wedge$ (... *и* ...), *дизъюнкция* $\vee$ (... *или* ...), *импликация* $\Rightarrow$, *квантор существования* $(\exists)$ *и квантор всеобщности* $(\forall)$.

Пусть A и B – два множества. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, тогда говорим, что A **содержится в** B, или что A есть **часть множества** B, или что A есть **подмножество** множества B и обозначаем $A \subseteq B$. Таким образом,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall)\, x\ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Свойства включения. a) $(\forall)\, A$, $A \subseteq A$ (рефлексивность); b) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (транзитивность); c) $(\forall)\, A$, $\varnothing \subseteq A$.

Если A не является частью множества B, тогда пишем $A \not\subseteq B$, т.е.

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists)\, x\ (x \in A \wedge x \notin B).$$

Говорим, что **множество** A **равно множеству** B, коротко $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Свойства равенства. Для любых множеств A, B и C справедлива: a) $A = A$ (рефлексивность); b) $(A = B) \Rightarrow (B = A)$ (симметричность); c) $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow (A = C)$ (транзитивность).

В дальнейшем через $P(A)$ будем обозначать **множество всех частей множества** A, т.е.

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A.$$

Очевидно $\varnothing$, $A \in P(A)$.

Универсальное множество – это множество, которое содержит все рассматриваемые в дальнейшем множества и обозначается E (природа элементов подразумевается одинаковой!).

Действия над множествами

Пусть A и B – два множества $A, B \in P(E)$.

1. Пересечение.

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \wedge x \in B\},$$

т.е.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B), \tag{1}$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B). \tag{1'}$$

2. Объединение.

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A \vee x \in B\},$$

т.е.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B), \tag{2}$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B). \tag{2'}$$

3. Разность.

$$A \setminus B = \{x \in E | x \in A \wedge x \notin B\},$$

т.е.

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B), \tag{3}$$

$$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B). \tag{3'}$$

4. Дополнение к некоторому множеству. Пусть $A \in P(E)$. Разность $E \setminus A$ является подмножеством в E, обозначаемым $C_E(A)$ и называемым **дополнением множества**

A **по отношению к** E, т.е.

$$C_E(A) = E \setminus A = \{x \in E | x \notin A\}.$$

Другими словами,

$$x \in C_E(A) \Leftrightarrow x \notin A, \tag{4}$$

$$x \notin C_E(A) \Leftrightarrow x \in A. \tag{4'}$$

Свойства действий над множествами

$A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (**законы идемпотентности**).

$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (**законы коммутативности**).

$$\left.\begin{array}{l}(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\end{array}\right. \text{(законы ассоциативности).}$$

$$\left.\begin{array}{l}A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{array}\right. \text{(законы дистрибутивности)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A \cup (A \cap B) = A,\\ A \cap (A \cup B) = A\end{array}\right. \text{(законы поглощения).}$$

$$\left.\begin{array}{l}C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B),\\ C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)\end{array}\right. \text{(законы де Моргана).}$$

Два “особых” подмножества в E являются множества $\varnothing$ и E. Для любого $A \in P(E)$ справедливо:

$$\varnothing \subseteq A \subseteq E,$$
$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad C_E(\varnothing) = E,$$
$$A \cup E = E, \quad A \cap E = A, \quad C_E(E) = \varnothing,$$
$$A \cup C_E(A) = E, \quad A \cap C_E(A) = \varnothing,$$
$$C_E(C_E(A)) = A \text{ (принцип взаимности).}$$

В дальнейшем обозначим $C_E(A) = \overline{A}$.

5. Симметрическая разность.

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Свойства. Для любых множеств A, B и C справедливо:

a) $A \vartriangle A = \varnothing$; b) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$ (**коммутативность**);

c) $A \vartriangle \varnothing = \varnothing \vartriangle A = A$; d) $A \vartriangle (A \vartriangle B) = B$;

e) $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$ (**ассоциатитвность**);

f) $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$; g) $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

6. Декартово произведение. Пусть x и y – два объекта. Множество $\{\{x\},\{x,y\}\}$, элементами которого являются множества $\{x\}$ и $\{x,y\}$, называется **упорядоченной парой**, в которой x есть первая компонента а y – вторая компонента, и обозначается (x,y). Если даны три объекта x,y,z, тогда $(x,y,z)=((x,y),z)$ называется **упорядоченной тройкой**, а в случае n объектов (общий случай) $x_1,x_2,\ldots,x_n$

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\ldots((x_1,x_2),x_3),\ldots x_n)$$

называется **упорядоченной n-кой элементов** (или **кортежем** длины n). Имеем

$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\Leftrightarrow(x_1=y_1\wedge x_2=y_2\wedge\ldots\wedge x_n=y_n)$.

Пусть $A,B\in P(E)$. Множество

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$$

называется **декартовым произведением** множеств A и B. Очевидно, можно определить

$$A\times B\times C=\{(x,y,z)|x\in A\wedge y\in b\wedge z\in C\},$$

а, в общем случае, декартово произведение множеств A_1, $A_2,\ldots,A_n$

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|x_i\in A_i,\ i=\overline{1,n}\}.$$

В случае $A=B=C=A_1=A_2=\ldots=A_n$ имеем

$$A\times A\stackrel{\text{def}}{=}A^2,\ A\times A\times A\stackrel{\text{def}}{=}A^3,\ \underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n\text{ раз}}\stackrel{\text{def}}{=}A^n.$$

Например, $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbb{R}\}$. Подмножество

$$\Delta=\{(a,a)|a\in A\}\subseteq A^2$$

называется **диагональю** множества A^2.

Примеры. 1. Пусть $A=\{1,2\}$ и $B=\{1,2,3\}$. Тогда

$$A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$$

а

$$B\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}.$$

Замечаем, что $A\times B\neq B\times A$.

2. Декартово произведение $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ геометрически можно представить как множество всех точек плоскости, на которой зафиксирована прямоугольная система координат xOy, если каждому элементу $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ставится в соответствие на плоскости точка $P(x,y)$, абсцисса которой есть x, а ордината y. Пусть $A=[2;3]$ и $B=[1;5]\,(A,B\subseteq\mathbb{R})$. Тогда, на плоскости, $A\times B$ представлено в виде заштрихованного прямоугольника

$KLMN$ (рис. 1.1), где $K(2,1)$, $L(2,5)$, $M(3,5)$, $N(3,1)$.

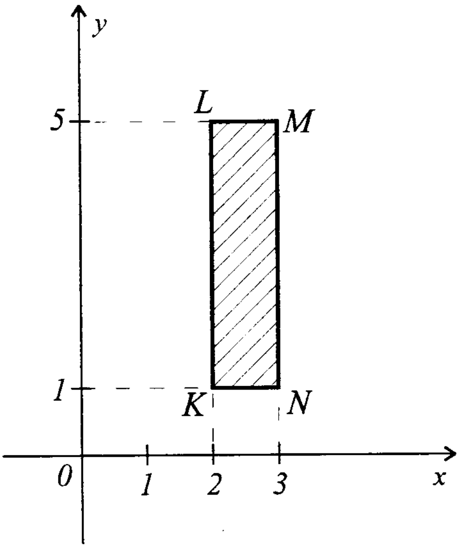


Рис. 1.1

Легко проверяются справедливость свойств:

a) $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$;

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

c) $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing \vee B = \varnothing)$,

$A \times B \neq \varnothing \Leftrightarrow (A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing)$.

7. Пересечение и объединение некоторого семейства множеств. Семейство множеств – это множество $\{A_i | i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$, элементами которого являются множества A_i, $i \in I$, $A_i \in P(E)$. Говорят, что $\{A_i | i \in I\}$ есть семейство множеств, **индексированных** множеством I.

Пусть $\{A_i | i \in I\}$ – некоторое семейство множеств. **Объединением** этого семейства (или объединением множеств A_i, $i \in I$) является множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E | (\exists)\, i \in I \colon x \in A_i\}.$$

Пересечением этого семейства (или пересечением множеств A_i, $i \in I$) является множество

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E | x \in A_i, (\forall) i \in I\}.$$

В случае, когда $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, пишем

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

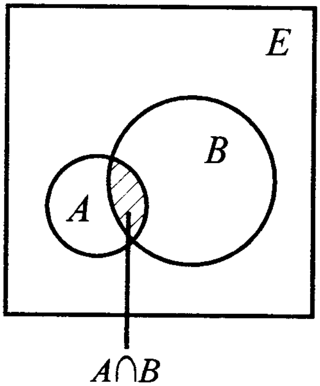
8. Диаграммы Эйлера-Венна. Диаграммами Эйлера (в СУА – Венна) называются фигуры, при помощи которых изображаются множества (круги, квадраты, прямоугольники и т.д.) и доказываются наглядно некоторые свойства действий над множествами.

Пример. Доказать закон де Моргана

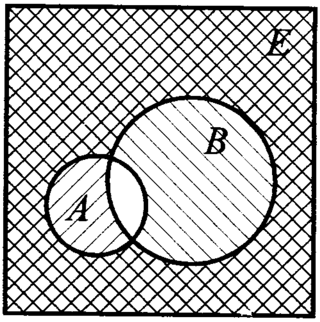
$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B),$$

используя диаграммы Эйлера.

Решение.



а)



б)

Рис. 1.2

На рис. 1.2,а) заштрихованная часть это $A \cap B$; а незаштрихованная (вне $A \cap B$) представляет $C_E(A \cap B)$.

На рис. 1.2,б) заштрихованная \\\\ часть квадрата равна $C_E(A)$, а //// равна $C_E(B)$. Вся заштрихованная часть есть $C_E(A) \cup C_E(B)$ (незаштрихованная часть есть в точности $A \cap B$).

На этих рисунках видно, что $C_E(A \cap B)$ (незаштрихованная часть на рис. 1.2,а) совпадает с $C_E(A) \cup C_E(B)$ (часть за-

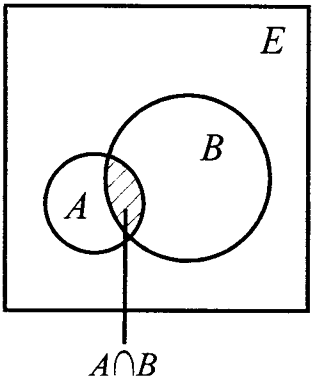
штрихованная каким-нибудь образом рис. 1.2,б), т.е.
$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

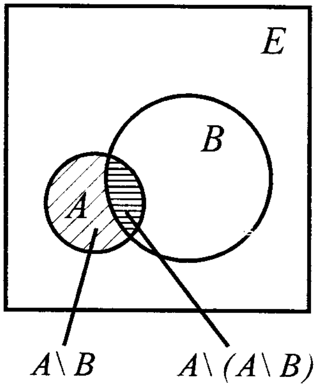
1.2. Решенные примеры

1. Для любых двух множеств A и B имеем
$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Решение. Используя определения операций над множествами, последовательно получаем
$$x \in A \setminus (A \setminus B) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin (A \setminus B)) \Leftrightarrow$$
$$\overset{(3')}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x \in A \cap B.$$
Из этой последовательности равносильных переходов следует
$$A \setminus (A \setminus B) \subseteq A \cap B \text{ и } A \cap B \subseteq A \setminus (A \setminus B),$$
что и требовалось доказать.

Замечание. *Равенство можно доказать и при помощи диаграмм Эйлера.*





Следовательно, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

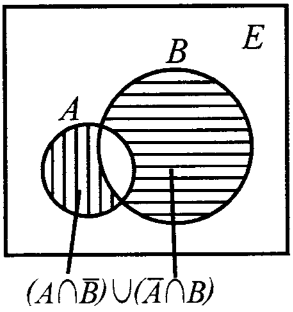
2. Для любых $A, B \subseteq E$ справедливо равенство
$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

Решение. **Аналитический метод.** Используя определения операций над множествами, получаем

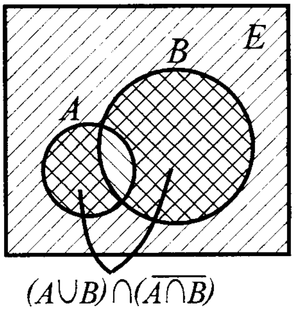
$$x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cap \overline{B}) \vee x \in (\overline{A} \cap B)) \Leftrightarrow$$
$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} ((x \in A \wedge x \in \overline{B}) \vee (x \in \overline{A} \wedge x \in B)) \Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in \overline{A}) \wedge (x \in A \vee$$
$$\vee x \in B) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in B)) \overset{(2),(4')}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (x \in (A \cup B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \overset{(1')}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow$$
$$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cup B) \wedge x \in (\overline{A \cap B})) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x \in (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

Эта последовательность равносильных переходов показывает справедливость утврждения задачи.

Графический метод. Используя круги Эйлера, получаем



а)



б)

Рис. 1.3

Имеем $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, что и представляет заштрихованная часть квадрата (см. рис. 1.3, а). На рис. 1.3 видно, что $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.

3. Для любых двух множеств $A, B \subseteq E$ справедлива равносильность
$$A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B.$$

Решение. Пусть $A \setminus B = B \setminus A$. Допустим, что $A \neq B$. Тогда существует $a \in A$, где $a \notin B$, либо $b \in B$, где $b \notin A$.

В первом случае получаем $a \in A \setminus B$ и $a \notin B \setminus A$, что противоречит равенству $A \setminus B = B \setminus A$. Во втором случае тоже получаем противоречие.

Следовательно, $A \setminus B = B \setminus A \Rightarrow A = B$.

Обратное очевидно.

4. Даны множества $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$ и $C = \{3,6,9\}$. Проверить справедливость равенств:

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Решение. а) Имеем $B \cup C = \{2,3,4,6,8,9,10\}$, $A \setminus (B \cup C) = \{1,5,7\}$, $A \setminus B = \{1,3,5,7,9\}$, $A \setminus C = \{1,2,4,5,7,8,10\}$, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1,5,7\} = A \setminus (B \cup C)$.

б) Для второго равенства имеем

$$B \cap C = \{6\},\ A \setminus (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,7,8,9,10\},$$
$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{1,2,3,4,5,7,8,9,10\} = A \setminus (B \cap C).$$

5. Найти, множества A и B, которые удовлетворяют всем условиям:

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$;

2) $A \cap B = \{3,4,5\}$;

3) $1 \notin A \setminus B$;

4) $2 \notin B \setminus A$.

Решение. Из 1) и 2) следует $\{3,4,5\} \subseteq A \subseteq A \cup B$ и $\{3,4,5\} \subseteq B \subseteq A \cup B$. Из 3) следует $1 \notin A$ либо $1 \in B$. Если $1 \notin A$, тогда из $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ следует $1 \in B$. Если же $1 \in B$, тогда $1 \notin A$, так как в противном случае $1 \in A \cap B = \{3,4,5\}$. Следовательно, остается $1 \in B$ и $1 \notin A$. Аналогично из 4) вытекает $2 \notin B$, а $2 \in A$. Другими словами,

$$\{3,4,5\} \subseteq A \subseteq \{2,3,4,5\} \text{ и } \{3,4,5\} \subseteq B \subseteq \{1,3,4,5\},$$

где $2 \in A \cup B$, $1 \in A \cup B$, и потому $A = \{2,3,4,5\}$, а $B = \{1,3,4,5\}$.

Ответ: $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,4,5\}$.

6. Для заданных множеств $A = \{11k+8 | k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4m | m \in \mathbf{Z}\}$ и $C = \{11(4n+1) - 3 | n \in \mathbf{Z}\}$ показать, что $A \cap B = C$.

Решение. Чтобы получить искомое равенство, докажем истинность равносильности

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in C.$$

Пусь $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$ и потому существуют два целых числа $k, m \in \mathbf{Z}$ такие, что $x = 11k + 8 = 4m \Leftrightarrow 11k = 4(m-2)$. В этом равенстве правый член делится на 4, но 11 и 4 взаимно простые числа. Поэтому из $11k \vdots 4$ следует $k \vdots 4$, т.е. $k = 4t$ для некоторого $t \in \mathbf{Z}$. Тогда

$$x = 11k + 8 = 11 \cdot 4t + 8 = 11 \cdot 4t + 11 - 3 = 11(4t+1) - 3,$$

а это влечет $x \in C$, т.е. мы доказали импликацию

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in C. \qquad (1)$$

Обратно, пусть $y \in C$. Тогда существует $s \in \mathbf{Z}$, где $y = 11(4s+1) - 3 = 11 \cdot 4s + 11 - 3 = 11 \cdot 4s + 8 = 4(11s+2)$.

Полагая $4s = u \in \mathbf{Z}$ и $11s + 2 = v \in \mathbf{Z}$, получаем

$$y = 11u + 8 = 4v \in A \cap B,$$

а это доказывает справедливость импликации

$$y \in C \Rightarrow y \in A \cap B. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует искомое равенство.

7. Даны множества

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \left\{ \begin{array}{l} 2x \le 4x - 6 \\ 4x - 11 < 2x + 1 \end{array} \right. \right\} \text{ и } B = A \cap \mathbb{N}.$$

Найти:

а) все множества X, где $B \cup X = \{3,4,5,6,7,8,9\}$;

б) все множества $Y = \{y \in \mathbf{Z} | y^2 \in B \cup X\}$ таких, что $B \cap Y = \{3\}$.

Решение. Найдем множество A:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \le 4x - 6, \\ 4x - 11 < 2x + 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x \ge 6, \\ 2x < 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \ge 3, \\ x < 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [3;6).$$

Тогда $B = [3;6) \cap \mathbb{N} = \{3,4,5\}$.

а) Всевозможные подмножества множества B будут

$$\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,4,5\} = B.$$

Искомые множества X должны быть такими, чтобы $X \cup B = \{3,4,5,6,7,8,9\}$, а потому должны быть вида $X = C \cup \{6,7,8,9\}$, где $C \in P(B)$, т.е. искомые в п. а) множества следующие:

$$X_1 = \{6,7,8,9\},\ X_2 = \{3,6,7,8,9\},\ X_3 = \{4,6,7,8,9\},$$
$$X_4 = \{5,6,7,8,9\},\ X_5 = \{3,4,6,7,8,9\},\ X_6 = \{3,5,6,7,8,9\},$$
$$X_7 = \{4,5,6,7,8,9\},\ X_8 = \{3,4,5,6,7,8,9\}.$$

б) Так как $y \in \mathbf{Z}$, то $y^2 \in \mathbb{N}$, и обратно, учитывая, что $y^2 \in B \cup X = \{3,4,5,6,7,8,9\}$, получаем $y^2 \in \{4,9\}$, т.е. $y \in \{-3,-2,2,3\} = M$. Частями множества M являются множества:

$$\varnothing, \{-3\}, \{-2\}, \{2\}, \{3\}, \{-3,-2\}, \{-3,2\}, \{-3,3\}, \{-2,2\},$$
$$\{-2,3\}, \{2,3\}, \{-3,-2,2\}, \{-3,-2,3\}, \{-3,2,3\}, \{-2,2,3\}, M.$$

Из условия $B \cap Y = \{3\}$ вытекает, что Y будет одно из множеств

$Y_1 = \{3\}, Y_2 = \{-3, 3\}, Y_3 = \{-2, 3\}, Y_4 = \{2, 3\}, Y_5 = \{-3, -2, 3\},$
$Y_6 = \{-3, 2, 3\}, Y_7 = \{-2, 2, 3\}$ и $Y_8 = M = \{-3, -2, 2, 3\}$.

Ответ: а) $X \in \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$;
б) $Y \in \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8\}$.

8. Найти множества $A, B, C \subseteq T$ и $A \vartriangle B$, если

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ A \vartriangle C = \{1, 2\},\ B \vartriangle C = \{5, 6\},$$
$$A \cap C = B \cap C = \{3, 4\}.$$

Решение. Из $A \cap C = B \cap C = \{3, 4\}$ следует, что $\{3, 4\} \subseteq$ $\subseteq A \cap B \cap C$. Известно, что

$$A \vartriangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup C) \setminus (A \cap C),$$
$$B \vartriangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = (B \cup C) \setminus (B \cap C).$$

Тогда

$1 \in A \vartriangle C \Leftrightarrow (1 \in A \cup C \wedge 1 \notin A \cap C) \Leftrightarrow ((1 \in A \vee 1 \in C) \wedge 1 \notin A \cap C)$.

Возможны следующие случаи:

а) $1 \notin A$ и $1 \in C$;

б) $1 \in A$ и $1 \notin C$ (третий случай $1 \in A$ и $1 \in C \Rightarrow 1 \in A \cap C =$ $= \{3, 4\}$ невозможен).

В первом случае, $1 \notin A$ и $1 \in C$, из $B \vartriangle C = \{5, 6\}$ следует, что $1 \in B$, в противном случае, если $1 \notin B$ и $1 \in C \Rightarrow 1 \in C \setminus B \subseteq$ $\subseteq B \vartriangle C = \{5, 6\}$. И тогда получаем $1 \in B \cap C = \{3, 4\}$, что невозможно, а потому $1 \in A$, $1 \notin C$. Аналогично получаем $2 \in A$, $2 \notin B$ и $2 \notin C$, $5 \in B$ и $5 \notin A$, $5 \notin C$, $6 \in B$ и $6 \notin A$, $6 \notin C$.

Другими словами,

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{3, 4, 5, 6\},\ C = \{3, 4\} \text{ и } A \vartriangle B = \{1, 2, 5, 6\}.$$

Ответ: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 4\}$ и
$A \vartriangle B = \{1, 2, 5, 6\}$.

9. Даны множества $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Найти множества:

а) $A \times B$; б) $B \times A$; в) A^2;
г) B^2; д) $(A \times B) \cap (B \times A)$; е) $(A \cup B) \times B$;
ж) $(A \times B) \cup (B \times B)$.

Решение. Используя определение декартового произведения двух множеств, получаем:

а) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$;

б) $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$;

в) $A^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
г) $B^2 = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$;
д) $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2,2)\}$;
е) $A \cup B = \{1,2,3\}$; $(A \cup B) \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$;
ж) $(A \times B) \cup (B \times B) = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\} = (A \cup B) \times B$.

10. Даны множества $A = \{1,2,x\}$, $B = \{3,4,y\}$. Найти x и y, если известно, что $\{1,3\} \times \{2,4\} \subseteq A \times B$.

Решение. Составляем множества $A \times B$ и $\{1,3\} \times \{2,4\}$:
$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,y), (2,3), (2,4), (2,y), (x,3), (x,4), (x,y)\}$;
$$C = \{1,3\} \times \{2,4\} = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4)\}.$$
Так как $\{1,3\} \times \{2,4\} \subseteq A \times B$, получаем
$$(1,2) \in C \Rightarrow (1,2) \in A \times B \Rightarrow (1,y) = (1,2) \Rightarrow y = 2;$$
$$(3,4) \in C \Rightarrow (3,4) \in A \times B \Rightarrow (3,4) = (x,4) \Rightarrow x = 3.$$
Для $x = 3$ и $y = 2$, имеем $(3,2) \in A \times B$.

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

11. Доказать, что если $A \supseteq B$, то
$$A \times B = ((A \setminus B) \times B) \cup B^2.$$

Решение. $B \subseteq A \Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A$ и поэтому
$A \times B = ((A \setminus B) \cup B) \times B = ((A \setminus B) \times B) \cup (B \times B) = ((A \setminus B) \times B) \cup B^2$
(было применено равество $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$).

12. Сколько элементов имеет множество
$$A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, x = \frac{n^2+1}{2n^2+n+1},\ n = \overline{1,1000} \right\}?$$

Решение. Множество A имеет столько элементов, сколько различных значений принимает дробь $(n^2+1)/(2n^2+n+1)$, когда n принимает значения $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Выбираем значения n, для которых дробь принимает равные значения.

Пусть $m, l \in I\!N^*$, $m < l$ и $\dfrac{m^2+1}{2m^2+m+1} = \dfrac{l^2+1}{2l^2+l+1}$. Тогда $(m^2+1)(2l^2+l+1) = (l^2+1)(2m^2+m+1) \Leftrightarrow (m-l)(m+l-ml+1) = 0 \overset{m \neq l}{\Leftrightarrow} m + l - ml + 1 = 0 \Leftrightarrow m(l-1) = l+1 \Leftrightarrow m = \dfrac{l+1}{l-1} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow m = \frac{(l-1)+2}{l-1} \Leftrightarrow m = 1 + \frac{2}{l-1}.$$

Так как $m \in I\!N^*$, то

$$m \in I\!N^* \Leftrightarrow \frac{2}{l-1} \in I\!N^* \Leftrightarrow 2 \vdots (l-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l-1=1, \\ l-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l=2, \\ l=3. \end{array}\right.$$

При $l = 2$ получаем $m = 3$, а при $l = 3$ имеем $m = 2$. Учитывая, что $m < l$, получаем $m = 2$ и $l = 3$. Таким образом, только при $n = 2$ и $n = 3$ получаем один и тот же элемент множества A: $x = 5/11$.

Ответ: Множество A имеет 999 элементов, т.е. $n(A) = 999$.

13. Найти целые числа x, y, для которых истинно утверждение $(x-1)\cdot(y-3) = 13$.

Решение. Обозначим

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{Z}^2 | P(x)\colon (x-1)\cdot(y-3) = 13\}.$$

Так как 13 – простое число, а $x, y \in \mathbf{Z}$, то возможны следующие случаи:

$$\left\{\begin{array}{l} x-1=1, \\ y-3=13, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x-1=-1, \\ y-3=-13, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x-1=13, \\ y-3=1, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x-1=-13, \\ y-3=-1, \end{array}\right.$$

т.е. предложение $P(x)$ истинно только при

$$\left\{\begin{array}{l} x=2, \\ y=16, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=0, \\ y=-10, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=14, \\ y=4, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=-12, \\ y=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $A = \{(2,16), (0,-10), (14,4), (-12,2)\}$.

14. Найти множество

$A = \{x \in I\!R | \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0, \;\; a,b,c \in I\!R\}$.

Решение. Так как $\sqrt{a+x} \geq 0, \sqrt{b+x} \geq 0, \sqrt{c+x} \geq 0$, то равенство $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$ возможно только в случае, когда одновременно

$$a + x = b + x = c + x = 0 \Leftrightarrow x = -a = -b = -c.$$

Тогда:

а) если хотя бы два числа из данных a, b и c различны, то равенство $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$ невозможно, и в этом случае $A = \varnothing$;

б) если $a = b = c$, то $x = -a$ и $A = \{-a\}$.

Ответ: 1) при $a = b = c$ имеем $A = \{-a\}$;

2) если же хотя бы два числа из данных a, b и c различны, то $A = \varnothing$.

15. Найти множество
$$A = \{x \in \mathbf{Z} | \min(x+2, 4 - x/3) \geq 1\}.$$

Решение. Возможны случаи:
$$x + 2 \leq 4 - x/3 \text{ либо } x + 2 > 4 - x/3.$$
Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1) $x + 2 \leq 4 - x/3 \Leftrightarrow 3x + 6 \leq 12 - x \Leftrightarrow 4x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3/2$. Тогда получаем
$$\min(x+2, 4-x/3) \geq 1 \Leftrightarrow x + 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1.$$
Целые числа x, для которых $-1 \leq x \leq 3/2$, – это $-1, 0, 1$.

2) $x + 2 > 4 - x/3 \Leftrightarrow x > 3/2$. Тогда
$$\min(x+2, 4-x/3) \geq 1 \Leftrightarrow 4 - x/3 \geq 1 \Leftrightarrow 12 - x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq 9.$$
Целые числа x, для которых $3/2 < x \leq 9$, – это $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Следовательно,
$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Ответ: $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

16. Найти действительные значения параметра m, для которых множество
$$A = \{x \in \mathbb{R} | (m-1)x^2 - (3m+4)x + 12m + 3 = 0\}$$
имеет:

а) один элемент;

б) два элемента;

в) пусто.

Решение. Множество A совпадает с множеством корней квадратного уравнения
$$(m-1)x^2 - (3m+4)x + 12m + 3 = 0, \qquad (1)$$
и решение задачи сводится к нахождению значений параметра $m \in \mathbb{R}$, при которых уравнение имеет один корень, имеет два различных корня и не имеет корней.

а) Уравнение (1) имеет один корень (два равных корня) тогда и только тогда, когда $D = 0$ при $a = m - 1 \neq 0$ либо когда $a = m - 1 = 0$. Рассмотрим эти случаи.

1) $D = (3m+4)^2 - 4(m-1)(12m+3) = -39m^2 + 60m + 28 = 0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \\ m = \dfrac{30 + 2\sqrt{498}}{39}. \end{array}\right.$$

2) При $m = 1$ уравнение (1) принимает вид $-5x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Следовательно, множество A одноэлементно при
$$m \in \left\{\frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, 1, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}\right\}.$$

б) Уравнение (1) имеет два разных корня тогда и только тогда, когда $D > 0$, т.е.
$$D > 0 \Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}\right).$$

в) Уравнение (1) не имеет корней $\Leftrightarrow D < 0 \Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}\right) \bigcup \left(\frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}, +\infty\right)$.

Ответ: а) $m \in \left\{\frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, 1, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}\right\}$;

б) $m \in \left\{\frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}\right\}$;

в) $m \in \left(-\infty, \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}\right) \bigcup \left(\frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}, +\infty\right)$.

17. Пусть даны множества $A = \{3,4,5\}$ и $B = \{4,5,6\}$. Перечислить элементы множеств $A^2 \cap B^2$ и $(A \setminus (B \setminus A)) \times (B \cap A)$.

Решение. а) Для первого множества имеем
$$A^2 = \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)\},$$
$$B^2 = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\},$$
$$A^2 \cap B^2 = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}.$$

б) Для второго множества имеем
$$B \setminus A = \{6\},\ A \setminus (B \setminus A) = A,\ B \cap A = \{4,5\}.$$
Тогда $A \times (B \cap A) = \{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$.

Ответ: $A^2 \cap B^2 = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$;
$A \setminus (B \setminus A) \times (B \cap A) = \{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$.

18. Для заданных множеств $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и $B = \{2,3,4\}$ решить уравнения $A \triangle X = A \setminus B$ и $(A \triangle Y) \triangle B = C_A(B)$.

Решение. Для решения указанных уравнений применим свойства симметрической разности: $A \triangle (A \triangle B) = B$, ассоциативность и коммутативность.

а) $A \triangle X = A \setminus B \Rightarrow A \triangle (A \triangle X) = A \triangle (A \cap B) \Rightarrow X = A \triangle (A \setminus B)$.

Но $A \setminus B = \{1,5,6,7\}$, $A \setminus (A \setminus B) = \{2,3,4\}$, $(A \setminus B) \setminus A = \varnothing$ и потому

$$X = A \vartriangle (A \setminus B) = (A \setminus (A \setminus B)) \cup ((A \setminus B) \setminus A) = \\ = A \setminus (A \setminus B) = \{2,3,4\} = B.$$

б) $(A \vartriangle Y) \vartriangle B = A \setminus B \Leftrightarrow (A \vartriangle B) \vartriangle Y = A \setminus B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (A \vartriangle B) \vartriangle ((A \vartriangle B) \vartriangle Y) = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \setminus B) \Rightarrow \\ \Leftrightarrow Y = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \setminus B).$$

Вычисляем

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1,5,6,7\} \cup \varnothing = \{1,5,6,7\}.$$

Следовательно,

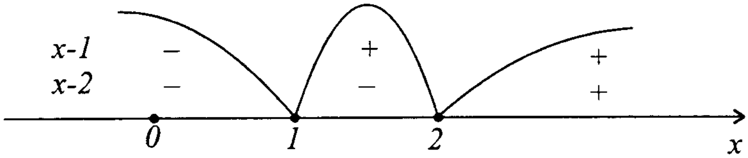
$$Y = (A \setminus B) \vartriangle (A \setminus B) = \varnothing.$$

Ответ: $X = B$, $Y = \varnothing$.

19. Даны множества
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| + |2-x| > 3+x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-4) \times \times (x+3)(x+2)^2 \leq 0\}$. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \cup B) \setminus (B \setminus A)$ и $\overline{A} \times (B \setminus A)$.

Решение. 1) Находим множества A и B.

а) $x \in A \Leftrightarrow |x-1| + |2-x| > 3+x \Leftrightarrow |x-1| + |x-2| > 3+x \quad (*)$



Неравенство $*$ равносильно совокупности трех систем неравенств:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, 1), \\ 1 - x + 2 - x > 3 + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [1;2), \\ x - 1 + 2 - x > 3 + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [2, +\infty), \\ x - 1 + x - 2 > 3 + x, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, 1), \\ x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [1;2), \\ x < -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [2, +\infty), \\ x > 6 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, 0), \\ x \in \varnothing, \\ x \in (6, +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty).$$

Следовательно,

$$A = (-\infty, 0) \cup (6, +\infty).$$

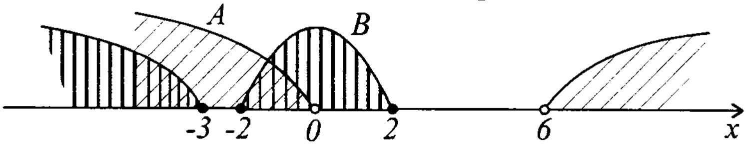
б) $x \in B \Leftrightarrow (x^2-4)(x+3)(x+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^3(x+3)(x-2) \leq$

$$\leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [-2; 2].$$

Другими словами,

$$B = (-\infty, -3] \cup [-2; 2].$$

2) Находим искомые множества геометрически



а) $A \cup B = (-\infty, 2] \cup (6, +\infty)$

б) $A \cap B = (-\infty, -3] \cup [-2; 0)$

в) $\overline{A} = C_{\mathbb{R}}(A) = [0; 6]$

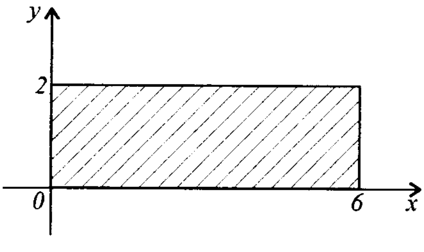
г) $\overline{B} = C_{\mathbb{R}}(B) = (-3, -2) \cup (2, +\infty)$

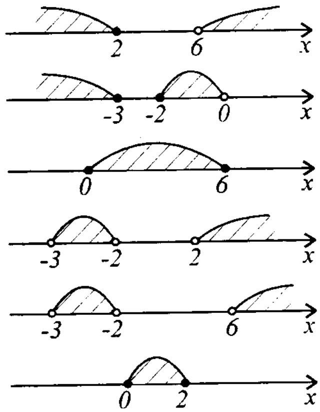
д) $A \setminus B = (-3, -2) \cup (6, +\infty)$

е) $B \setminus A = [0; 2]$

ж) $(A \cup B) \setminus (B \setminus A) = \varnothing$

з) $\overline{A} \times (B \setminus A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0; 6], y \in [0; 2]$





20. 40 учеников написали контрольную работу по математике, которая содержала одну задачу, одно неравенство и одно тождество. Три ученика решили правильно только задачу, 5 – только неравенство, 4 – доказали только тождество, 7 – не решили только задачу, 6 – не решили только неравенство, 5 – не доказали только тождество. Остальные ученики решили все правильно. Сколько таких учеников?

Решение. Пусть A это множество учеников, которые решили только задачу, B – только неравенство, C – доказали только тождество, D – множество учеников, которые решили только задачу и неравенство, E – множество учеников, которые решили только задачу и доказали тождество, F – множество учеников, которые решили только неравенство и доказали тождество, а G – множество учеников, которые решили все правильно.

Из изложенных условий следует, что $n(A) = 3$, $n(B) = 5$, $n(C) = 4$, $n(D) = 8$, $n(E) = 7$, $n(F) = 9$. Но, так как каждый из учеников, кто писал контрольную работу, решил по крайнем мере правильно одно задание, и так как общим элементом всех множеств A, B, C, D, E, G является только пустое множество, то объединение множеств A, B, C, D, E, F, G и есть множество всех учеников, которые писали работу.

Следовательно, $n(A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) + n(E) + n(F) + n(G)$. Поэтому $n(G) = n(A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G) - n(A) - n(B) - n(C) - n(D) - n(E) - n(F) = 40 - 3 - 5 - 4 - 8 - 7 - 9 = 4$.

Ответ: Следовательно, 4 ученика решили правильно всю работу.

21. (Задача математика Доджсона.) В некоторой ожесточенной схватке 72 из тех 100 разбойников, которые участвовали в ней, потеряли один глаз, 75 – одно ухо, 80 – одну руку и 85 – одну ногу. Каково наименьшее число разбойников, которые потеряли одновременно и глаз, и ухо, и руку и ногу?

Решение. Пусть A – множество одноглазых разбойников, B – множество разбойников без одного уха, C – множество разбойников с одной рукой, а D – множество разбойников с одной ногой.

В задаче требуется оценить множество $A \cap B \cap C \cap D$.

Очевидно, что универсальное множество E состоит из множества $A \cap B \cap C \cap D$ и из числа разбойников, которые сохранили либо оба глаза, либо обе руки, либо оба уха, либо обе ноги.

Поэтому $E = (A \cap B \cap C \cap D) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$. Отсюда вытекает, что множество E не меньше (не имеет меньше элементов), чем сумма чисел элементов множеств $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ и $A \cap B \cap C \cap D$ (равенство возможно только в случае, когда множества $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ и $\overline{D}$ попарно не пересекаются).

Но $n(\overline{A}) = 30$, $n(\overline{B}) = 25$, $n(\overline{C}) = 20$, и $n(\overline{D}) = 15$. Получаем $n(E) = 100$, т.е. $100 \leq n(A \cap B \cap C \cap D) + 30 + 25 + 20 + 15$. Седовательно, $n(A \cap B \cap C \cap D) \geq 100 - 30 - 25 - 20 - 15 = 10$.

Таким образом, не менее 10 разбойников потеряли одновременно и глаз, и ухо, и руку и ногу.

Ответ: Не менее 10 разбойников.

22. Из 100 учеников 28 изучают английский язык, 8 – английский и немецкий языки, 10 – английский и французский языки, 5 – французский и немецкий языки, 3 – все три языка. Сколько учеников изучают только один язык? Сколько не изучают ни одного языка?

Решение. Пусть A – множество учеников, которые изучают английский язык, B – немецкий язык, C – французский язык.

Тогда множество учеников, которые изучают и английский и немецкий будет $A \cap B$, английский и французский – $A \cap C$, французский и немецкий – $B \cap C$, английский, немецкий и французский – $A \cap B \cap C$, множество учеников, которые изучают хотя бы один из этих трех языков, будет $A \cup B \cup C$.

Из условий, изложенных выше, вытекает, что ученики, изучающие только английский язык, составляют множество $A \setminus (A \cap B) \cup (A \cap C)$, только немецкий – $B \setminus (A \cap B) \cup (B \cap C)$, только французский – $C \setminus (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Но, так как $A \cap B \subseteq A$, то $n(A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))) = n(A) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) = n(A) - (n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)) =$

$$= n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Аналогично, $n(B \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C))) = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$;

$n(C \setminus ((A \cap C) \cup (B \cap C))) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Пусть D – множество учеников, которые изучают только один язык. Тогда

$$n(D) = n(A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))) + n(B \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C)))+ \\ +n(C \setminus ((A \cap C) \cup (B \cap C))).$$

Следовательно, $n(D) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) + +n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(C) - n(A \cap C) - -n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - -2n(A \cap C) - 2n(B \cap C) + 3n(A \cap B \cap C) = 28 + 30 + 42 - 2 \cdot 8 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 5 + +3 \cdot 3 = 63$. $n(D) = 63$.

Число учеников, которые не изучают ни одного языка, равно разности между общим числом учеников и числом учеников, которые изучают хотя бы один язык, т.е. $n(H) = = n(T) - n(A \cup B \cup C)$, где H – множество учеников, которые не изучают ни один язык, а T – множество всех 100 учеников.

Из условий задачи имеем $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + +n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C) = 28 + 30 + +42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$. Тогда $n(H) = 100 - 80 = 20$.

Ответ: 63 ученика изучают только один язык, 20 учеников не изучают ни один язык.

1.3. Предлагаемые упражнения

1. Укажите какие из перечисленных ниже утверждений истинны, а какие ложны?

а) $x \in \{x\}$; б) $x = \{x\}$;
в) $x \neq \{x\}$; г) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
д) $\varnothing = \{\varnothing\}$; е) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
ж) $\varnothing = \{a\}$; з) $\varnothing \in \{a\}$;
и) $\varnothing \subseteq \{a\}$; к) $\{x\} \subseteq \{x\}$;
л) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; м) $\{1,3,3\} = \{1,\{2,3\},3\}$;
н) $\{1,2,3,4,5\} = \{4,1,3,5,2,4,5\}$; о) $\{3-1,\ 6+3\} = \{2,\ 5+3\}$;
п) $\{a + a\} = \{2a\},\ a \in I\!R$.

2. Укажите какие из перечисленных ниже утверждений истинны, а какие ложны (A, B и C – произвольные множества)?

а) $(A \in B$ и $B \in C) \Rightarrow A \in C$;
б) $(A \subseteq B$ и $B \in C) \Rightarrow A \in C$;
в) $(A \neq B$ и $B \neq C) \Rightarrow A \neq C$;
г) $(A \cap B \subseteq \overline{C}$ и $A \cup C \subseteq B) \Rightarrow A \cap C = \varnothing$;
д) $(A \subseteq (\overline{B \cup C})$ и $B \subseteq (\overline{A \cup C})) \Rightarrow B = \varnothing$;

е) $(A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$ и $C \subseteq A) \Rightarrow A = B = C$;

ж) $P(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1 | A_1 \in P(A),\ B_1 \in P(B)\}$;

з) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;

и) $A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$;

к) $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$;

л) $E \subseteq A \Rightarrow A = E$;

м) $A \subseteq B \Rightarrow B \cup C \subseteq A \cup C$;

н) $A \subseteq \overline{B} \Rightarrow B \subseteq \overline{A}$;

о) $A \subseteq \overline{B} \Rightarrow (A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = E)$.

3. Пусть $A = \{x \in \mathbf{Q} | x^2 - 12x + 35 = 0\}$,
$B = \{x \in \mathbf{Q} | x^2 + 2x - 35 = 0\}, C = \{x \in \mathbf{Q} | (x^2+1)(7x-1) = 0\}$.

а) Найти множества A, B и C.

б) Уточнить, принадлежат или не принадлежат этим множествам элементы 1/5, 5, 7, 1/2.

4. Найти множества
$A = \{x \in \mathbb{N}^* | x = 2n,\ n = \overline{1,9}\}$,
$B = \{y \in \mathbb{N}^* | y = 4m + 6n,\ m = \overline{1,3}, n = \overline{-1,0}\}$.

5. Пусть $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 4n + 6m,\ n, m \in \mathbb{N}^*\}$.

а) Указать три элемента множества A.

б) Проверить, являются ли числа $26, 28, 33$ элементами множества A.

6. Указать характеристические свойства элементов следующих множеств: $A = \{4, 7, 10\}$, $B = \{3, 6, 12\}$, $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $D = \{1, 8, 27, 64, 125\}$.

7. Сколько элементов имеют множества:
$A = \{x \in \mathbf{Q} | x = 3n/(n+2),\ n = \overline{1,50}\}$,
$B = \{y \in \mathbf{Q} | y = (n-1)/(2^{n+1}),\ n = \overline{1,10}\}$,
$C = \{z \in \mathbb{R} | z = (an+b)/(cn+d),\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ cd > 0,\ n = \overline{1,p}\}$?

8. Дано множество $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Найти его подмножества A:
$A_1 = \{x \in A | P(x)\colon\ 2x + 1 = x\}$,
$A_2 = \{y \in A | \mathbf{Q}(y)\colon\ |y| = y\}$,
$A_3 = \{z \in A | R(x)\colon\ |z| = -z\}$.

9. Найти множества:

а) $A = \{x \in \mathbf{Z} | \min(x+1,\, 4-0.5x) \geq 1\}$;
б) $B = \{x \in \mathbf{Z} | \max(x-2,\, 13-2x) \leq 6\}$;
в) $C = \{x \in I\!N^* | \min(3x-1,\, 2x+10) \leq 20\}$;
г) $D = \{x \in I\!N^* | \max(20-x,\, (45-2x)/3) > 13\}$;
д) $E = \{x \in \mathbf{Z} | \min(2x+7,\, 16-3x) > 0\}$;
е) $F = \{x \in \mathbf{Z} | \max(x-1,\, 1-x) \leq 4\}$;
ж) $G = \{x \in I\!R | \min(x-1,\, (13-x)/2) < 3\}$;
з) $H = \{x \in I\!R | \max(x+1,\, 7-x) > 5\}$;
и) $I = \{x \in \mathbf{Z} | \max(x+1,\, 4-0.5x) \leq 1\}$;
к) $J = \{x \in I\!N^* | \min(20-x,\, (45-2x)/3) \geq 20\}$;
л) $K = \{x \in \mathbf{Z} | \min(x+2,\, 10-x) > -2\}$;
м) $L = \{x \in \mathbf{Z} | \, |x-4| < 8\}$.

10. Сравнить ($\subset, \supset, =, \not\subset, \not\supset$) множества A и B, если:

а) $A = \left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x = \dfrac{2n+1}{n+4},\ n \in I\!N^*\right\}$, $B = \{x \in A | x < 2\}$;

б) $A = \left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x = \dfrac{3n^2+1}{n^2+n},\ n \in I\!N^*\right\}$, $B = \{x \in A | 2 \leq x < 3\}$;

в) $A = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 + 5x + 10 = n^2,\ n \in I\!N\}$, $B = \{-6, -3, -2, 1\}$;
г) $A = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 + 3x - 3 = n^2,\ n \in I\!N\}$, $B = \{-7, -4, 1, 4\}$;
д) $A = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 + 11x + 20 = n^2,\ n \in I\!N\}$, $B = \{-16, 5\}$;
е) $A = \{x \in \mathbf{R} | \, |x-1| + |x-2| > 5\}$, $B = \{x \in I\!R | (5/(x-4)) > -1\}$;
ж) $A = \{x \in \mathbf{R} | \, |x| + |1-x| \geq 2\}$, $B = \{x \in I\!R | 4x^2 - 4x - 3 \geq 0\}$;
з) $A = \{x \in \mathbf{R} | \, 4x^2 - 4x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x \in I\!R | (3/(x+1)) < 1\}$.

11. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Используя символы $\cup, \cap, \setminus, C$ (дополнение), опишите посредством множеств A, B и $I\!N^*$ множества:

а) $A_1 = \{5, 6, 7\}$;
б) $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$;
в) $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
г) $A_4 = \{8, 9, 10, \ldots\}$;
д) $A_5 = \{8, 9, 10\}$;
е) $A_6 = \{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, \ldots\}$;
ж) $A_7 = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}$.

12. Найти множество E в случае, если оно не указано, и его части A, B, C, которые одновременно удовлетворяют условиям:

а) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{1,2\}$, $A \setminus B = \{5\}$;

б) $\overline{A} = \{2,5,9,13,18,20\}$, $\overline{B} = \{2,6,18,20\}$,
$A \cup B = \{1,5,6,9,13,14\}$;

в) $A \cap B = \{1,3\}$, $\overline{A} = \{5,6,7,9,10\}$, $A \triangle B = \{2,4,5,8,9,10\}$;

г) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \setminus B = \{1,4\}$, $A \cap B \not\subseteq \{3,4,5\}$,
$E = \{1,2,3,4,5\}$;

д) $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B \cap C = \{4\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$,
$A \setminus C = \{1,3\}$, $5 \notin A \cup B$, $E = \{1,2,3,4,5\}$;

е) $E = \{1,2,3,4\}$, $1 \in A$, $\{2,4\} \cap B = \varnothing$, $3 \in A \cap B \cap C$, $4 \in A \cap C$,
$A \cap B \not\subseteq C$, $B \cup C \not\subseteq A$, $A \cup B \cup C = E$;

ж) $E = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cup B = E$, $A \cap B = \{2,3\}$, $\{2,3,4,5\} \cap B \not\subseteq$
$\not\subseteq A$, $\{1,4\} \cap A \not\subseteq B$;

з) $E = \{1,2,3\}$, $A \cup B \cup C = E$, $A \cap B \not\subset C$, $A \cap C \not\subset B$, $B \cap C = \{2\}$,
$1 \in B \setminus C$;

и) $E = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cup B = E$, $A \cap B = \{1,2\}$, $5 \notin A \setminus B$,
A имеет больше элементов, чем B;

к) $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cup B \cup C = E$, $A \cap B \cap C = \{5\}$,
$A \setminus B = \{1,3,6\}$, $A \setminus C = \{1,2,4\}$;

л) $E = \{1,2,3,4\}$, $A \cap B = \{1,2\}$, $A \setminus B = \{1,2,4\}$, $\{1,2,3\} \not\subset B$,
A имеет меньше элементов, чем B;

м) $\overline{A} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\overline{B} = \{1,5,6,7\}$, $A \cup B = \{2,3,4,7,8,9,10\}$,
$A \cap B = \{8,9,10\}$;

н) $E = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$, $A \cap B = \{d,f,i\}$,
$A \cup \{c,d,e\} = \{a,c,d,e,f,h,i\}$, $B \cup \{d,h\} = \{b,c,d,e,f,g,h,i\}$;

о) $E = \{1,2,3,\ldots,9\}$, $A \cap B = \{4,6,9\}$,
$A \cup \{3,4,5\} = \{1,3,4,5,6,8,9\}$, $B \cup \{4,8\} = \{2,3,\ldots,9\}$.

13. Найти множества $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, $A \triangle B$, $A \cup (B \setminus A)$, $A \setminus (B \setminus A)$, $A \times B$, $B \times A$, $(A \cup B) \times A$, $B \times (A \setminus B)$, если:

а) $A = \left\{ x \in I\!N \,\middle|\, x = \dfrac{8n-18}{2n-9},\ n \in I\!N \right\}$,

$$B = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| x = \frac{9n^2 - 48n + 16}{3n - 8},\ n \in \mathbb{N}\right\};$$

б) $A = \left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x = \dfrac{2n+1}{2n-3},\ n \in \mathbb{N}\right\}$,

$$B = \left\{y \in \mathbf{Q} \middle| y = \frac{3k+1}{3k-2},\ k \in \mathbb{N}\right\};$$

в) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x = \dfrac{4n}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$,

$$B = \left\{y \in \mathbf{Z} \middle| y = \frac{6n+7}{3n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\};$$

г) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \dfrac{2x+5}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$,

$$B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| y = \frac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1},\ n \in \mathbb{N}\right\};$$

д) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \dfrac{x+1}{3-x} \geq 0\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \dfrac{x^2 - 6x + 6}{x-1} \in \mathbf{Z}\right\}$;

е) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \dfrac{3-x}{5+x} \geq 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \dfrac{3-x}{5+x} \geq 1\right\}$;

ж) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \dfrac{x+1}{x-3} \in \mathbf{Z}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \dfrac{x+1}{x-3} \in \mathbf{Z}\right\}$;

з) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x+3} \in \mathbf{Z}\right\}$,

$$B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{x^2 - 5x + 6}{x+3} \in \mathbf{Z}\right\};$$

и) $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x = 2n, n = \overline{1,10}\}$,
$B = \{y \in \mathbb{N}^* | y = 4m + 6n,\ m = \overline{1,3},\ n \in \{-1, 0\}\}$;

к) $A = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-7| + |x+7| = 14\}$,
$B = \{x \in \mathbf{Z} |\ |x+3| + |x-9| = 14\}$;

л) $A = \{n^2 - 5 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^2 + 5 | n \in \mathbb{N}\}$;

м) $A = \{n^2 - 50 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^2 + 50 | n \in \mathbb{N}\}$;

н) $A = \{n^2 - 500 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^2 + 500 | n \in \mathbb{N}\}$;

о) $A = \{x \in \mathbb{R} | x - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 8x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0\}$.

14. Пусть $M = \left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x = \dfrac{7n-4}{n+3},\ n \in N^*\right\}$.

а) Найти множества:

$A = \{x \Leftrightarrow M | x \leq 6\}$, $B = \{x \in M | x < 7\}$, $C = \{x \in M | x \in \mathbf{Z}\}$.

б) Сколько элементов имеет множество $D = \{x \in M | x \leq (699/100)\}$?

15. Найти множества A, $B \subseteq E$, если

$$A \vartriangle B = \{2,4,5,8,9,10\}, \quad A \cap B = \{1,3\}, \quad \overline{A} = \{5,6,7,9,10\},$$
$$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}.$$

16. Найти множество E и его части A и B, если
$\overline{A} = \{2,5,9,13,18,20\}$, $\overline{B} = \{2,6,18,20\}$, $A \cup B = \{1,5,6,9,13,14\}$.

17. Сравнить множества A и B, если:

а) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x^2 - 25} < x + 1\}$,

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \begin{cases} x + 1 > 0, \\ x^2 - 25 < (x+1)^2 \end{cases} \right\};$$

б) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x^2 - 16} \cdot (x^2 - 80) \leq \sqrt{x^2 - 16}\}$,

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0, \\ x^2 - 80x \leq 1 \end{cases} \right\};$$

в) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{6 + x - x^2} > 2x - 1\}$,

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \begin{cases} 6 + x - x^2 \geq 0, \\ 2x - 1 \geq 0, \\ 6 + x - x^2 > (2x-1)^2, \end{cases} \right\};$$

г) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} | 2x - 3 - \dfrac{1}{x-5} < x - 4 - \dfrac{1}{x-5} \right\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} | 2x - 3 < x - 4\}$;

д) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| -\dfrac{5}{2}(x - x^2 - 1)(x+4) < -\dfrac{5}{2}(x - x^2 - 1)(3x+1) \right\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} | x + 4 < 3x + 1\}$;

е) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \dfrac{2}{\sqrt{x} + 1} < 0 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \left(\dfrac{2}{\sqrt{x} + 1} \right)^2 < 0 \right\}$;

ж) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3} < 1/2\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} | 2\sqrt{(x+3)(x-3)} < 1\}$.

18. Найти действительные значения параметра m, при которых множество A имеет один элемент, два элемента либо является пустым, если:

а) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + mx + 1 = 0\}$;

б) $A=\{x\in I\!R|mx^2-5x+m=0\}$;
в) $A=\{x\in I\!R|x^2-mx+3=0\}$;
г) $A=\{x\in I\!R|x^2-2(m-2)x+m^2-4m+3=0\}$;
д) $A=\{x\in I\!R|(m+1)x^2-(5m+4)x+4m+3=0\}$;
е) $A=\{x\in I\!R|x^2-mx+36=0\}$;
ж) $A=\{x\in I\!R|(2m-1)x^2+2(1-m)x+3m=0\}$;
з) $A=\{x\in I\!R|mx^2-(m+1)x+m-1=0\}$.

19. Найти число элементов множества A:
а) $A=\{x\in \mathbf{Q}|x=(n^2+3)/(n^2+n),\ n=\overline{1,50}\}$;
б) $A=\left\{x\in \mathbf{Q}\middle|x=\dfrac{z}{(z+6)(z+5)},\ z\in \mathbf{Z},\ |z|\le 45\right\}$;
в) $A=\{x\in \mathbf{Z}|(x^2+1)(5-x^2)\ge 0\}$;
г) $A=\{x\in \mathbf{Z}|(x^2-3)(x^2-33)(x^2-103)(x^2-203)<0\}$;
д) $A=\left\{x\in \mathbf{Z}\middle|x=\dfrac{z+4}{z+1},\ z\in \mathbf{Z}\right\}$;
е) $A=\left\{x\in I\!N\middle|x=\dfrac{z+4}{z+1},\ z\in \mathbf{Z}\right\}$.

20. Рассматриваются множества A, B, C. Найти $A\cap B\cap C$.
а) $A=\{10x+3|x\in I\!N\}$, $B=\{12y+7|y\in I\!N\}$,
$C=\{15z+13|z\in I\!N\}$;
б) $A=\{15n-700|n\in I\!N\}$, $B=\{270-10m|m\in I\!N\}$,
$C=\{48k+56|k\in I\!N\}$.

21. Найти $A\cap B$, если:
а) $A=\{6n+7|n\in I\!N\}$, $B=\{114-7m|m\in I\!N\}$;
б) $A=\{3p+28|p\in I\!N\}$, $B=\{107-14q|q\in I\!N\}$;
в) $A=\{3n-2|n\in I\!N\}$, $B=\{1003-2m|m\in I\!N\}$.

22. Доказать свойства операций над множествами (см. п. 1.1).

23. Докажите равенства (A,B,C и т.д. – призвольные множества):
а) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\setminus B$;
б) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;
в) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
г) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$;
д) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)=(A\cap C)\setminus B$;

е) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
ж) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
з) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
и) $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$;
к) $(A \cap B) \vartriangle A = A \setminus B$;
л) $A \cup (\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$;
м) $A \setminus (\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(A \setminus B_i)$;
н) $A \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{n}(A \setminus B_i)$.

24. Даны множества $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{3,4,5\}$ и $D = \{4,5,6\}$. Опишите элементы следующих множеств:
а) $(A \times A) \cap (B \times B)$;
б) $A^2 \times C^2$;
в) $(A \setminus B) \times (C \setminus D)$;
г) $(A \cap B) \times (C \cap B)$;
д) $(A \cup B) \times (B \cup D)$;
е) $(A \times B) \setminus (C \times D)$;
ж) $(A \setminus B) \times (C \cap B)$;
з) $(A \setminus C) \times (B \setminus D)$;
и) $(A \setminus (C \setminus D)) \times ((D \setminus B) \cup A)$;
к) $(A \vartriangle B) \times (D \vartriangle B)$.

25. Даны множества A, B и C. Решите уравнения

$$(A\, f\, B) \vartriangle X = C, \text{ где } f \in \{\cup, \cap, \setminus, \vartriangle\}:$$

а) $A = \{1,4,6\}$, $B = \{5,7,9\}$, $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;
б) $A = \{4,5,6\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $C = \{1,5,6,7\}$.

26. Найти множества $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup (B \setminus \overline{A})$, $A \cap (\overline{A} \setminus B)$, если:
а) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x-3)(2+x)(4-x) > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 7x + 12 \le 0\}$;
б) $A = \{x \in \mathbb{R} | 4x^2 - 12x + 5 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1/2 < x < 5/2\}$;
в) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 \le 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \le 2x + 7 \le 3\}$;
г) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2-4)(x+1) > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 > 0\}$;
д) $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x(x+7) = x^2 + 3x\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} 5x^2 = 6x, \\ 5x + 4 = 0 \end{array}\right.\right\}$;
е) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2-4x)(x+1) < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 < 0\}$;

ж) $A = \{x \in \mathbb{R} | 3x(x-2) - (x+1)(x-13) = 0\}$,

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \left[\begin{array}{l} x^2 + 7 = 0, \\ 13x^2 - 14x + 9 = 0 \end{array} \right. \right\};$$

з) $A = \{x \in \mathbb{R} | 3(x-9)^2 - 2(x-9) - 16 = 0\}$,

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \left[\begin{array}{l} x^2 - 14x + 49 = 0, \\ x - \dfrac{9}{5}\left(x + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{39}{2} \end{array} \right. \right\};$$

и) $A = \{x \in \mathbb{R} | 4(2x-3)^2 - 4(2x-3) + 1 = 0\}$,

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}x^2 - x + 2 = 0, \\ 3(4x-7)(x^2+1) = 0 \end{array} \right. \right\};$$

к) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, |2x-1| < |4x+1|\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | \, |3x-1| - |2x+3| \geq 0\}$;

л) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, |4-3x| \geq 2-x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | \, |2x-3| \geq 2x-3\}$;

м) $A = \{x \in \mathbb{R} | 6x^2 - 2x + 1 \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2|x| - 3 \leq 0\}$;

н) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, |x| + |x-1| < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | \, |x+1| + |x-2| > 5\}$;

о) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, ||x-3|+1| \geq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | \, ||x-1|+x| < 3\}$.

ГЛАВА II

ОТНОШЕНИЯ И ФУНКЦИИ

2.1. Основные определения. Обозначения

I. Отношения, виды отношений. Композиция отношений. Пусть A и B – два непустых множества и $A \times B$ – их декартовое произведение. Подмножество $R \subseteq A \times B$ называется **отношением** между элементами A и элементами B. В случае, когда $A = B$, отношение $R \subseteq A \times A$ называется **бинарным отношением**, определенным на множестве A.

Если имеется отношение $R \subseteq A \times B$, тогда для упорядоченной пары $(a, b) \in A \times B$ либо $(a, b) \in R$, либо $(a, b) \notin R$. В первом случае пишем aRb и читаем "a находится в отношении R с b", а во втором случае пишем $a \not R b$ и читаем "a не находится в отношении R с b". Таким образом, запомним, что

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R.$$

Под **областью определения отношения** $R \subseteq A \times B$ понимаем подмножество $\delta_R \subseteq A$, состоящее из тех и только тех элементов множества A, которые находятся в отношении R с одним элементом из B, т.е.

$$\delta_R = \{x \in A | (\exists)\, y \in B,\ (x, y) \in R\}.$$

Под **областью значений отношения** $R \subseteq A \times B$ понимаем подмножество $\rho_R \subseteq B$, состоящее из тех и только тех элементов множества B, которые находятся в отношении R хотя бы с одним элементом из A, т.е.

$$\rho_R = \{y \in B | (\exists)\, x \in A,\ (x, y) \in R\}.$$

Обратное отношение. Если имеется отношение $R \subseteq A \times B$, тогда под **обратным отношением** к отношению

R будем понимать отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$, определяемое равносильностью

$$(b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R,$$

т.е.

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in R\}.$$

Пример 1. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ и отношения $\alpha = \{(1,5), (2,4), (2,6)\} \subseteq A \times B$, $\beta = \{(2,4), (2,5), (2,6)\} \subseteq A \times B$ и $\gamma = \{(4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\} \subseteq B \times A$.

Найти области определения и значений для этих отношений и соответствующие им обратные отношения.

Решение. а) $\delta_\alpha = \{1, 2\} = A$, $\rho_\alpha = \{4, 5, 6\} = B$; $\alpha^{-1} = \{(5,1), (4,2), (6,2)\}$; $\delta_{\alpha^{-1}} = B$, $\rho_{\alpha^{-1}} = A$;

б) $\delta_\beta = \{2\}$, $\rho_\beta = \{4, 5, 6\} = B$; $\beta^{-1} = \{(4,2), (5,2), (6,2)\}$; $\delta_{\beta^{-1}} = B$, $\rho_{\beta^{-1}} = \{2\}$;

в) $\delta_\gamma = \{4, 5\}$, $\rho_\gamma = \{1, 2\} = A$; $\gamma^{-1} = \{(1,4), (2,4), (1,5), (2,5)\}$; $\delta_{\gamma^{-1}} = A$, $\rho_{\gamma^{-1}} = \{(4,5)\}$.

Композиция отношений. Пусть даны три множества A, B, C. Рассмотрим отношения $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$. Отношение $R \circ S \subseteq A \times C$, построенное посредством равносильности

$$(a, c) \in R \circ S \Leftrightarrow (\exists) b \in B \ ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S),$$

т.е.

$$R \circ S = \{(a, c) \in A \times C | (\exists) b \in B((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S)\} \subseteq A \times C,$$

называется **композицией отношений** R и S.

Пример 2. Пусть $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ те же, что и в примере 1. Найти $\alpha \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta$, $\alpha \circ \gamma, \beta \circ \gamma$, $\beta^{-1} \circ \alpha$, $\beta^{-1} \circ \beta$, $\gamma \circ \beta^{-1}$, $\gamma^{-1} \circ \beta^{-1}$ и $(\beta \circ \gamma)^{-1}$.

Решение. Обратим внимание, что композиция отношений $\alpha \subseteq C \times D$ с $\beta \subseteq E \times E$ существует тогда и только тогда, когда $D = E$.

а) Так как $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq A \times B$, то $\alpha \circ \alpha$ и $\alpha \circ \beta$ не существуют.

б) $\alpha \subseteq A \times B$ и $\gamma \subseteq B \times A \Rightarrow \alpha \circ \gamma \in A \times A$. Определим $\alpha \circ \gamma$:

$(1,5) \in \alpha$ и $(5,1) \in \gamma \Rightarrow (1,1) \in \alpha \circ \gamma$,

$(1,5) \in \alpha$ и $(5,2) \in \gamma \Rightarrow (1,2) \in \alpha \circ \gamma$,

$(2,4) \in \alpha$ и $\{(4,1), (4,2)\} \subseteq \gamma \Rightarrow \{(2,1), (2,2)\} \subseteq \alpha \circ \gamma$;

$(2,6) \in \alpha$, но в γ нет ни одной пары, которая имела бы первой компонентой 6. Следовательно, $\alpha \circ \gamma = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

в) $\beta \subseteq A \times B$, $\gamma \subseteq B \times A \Rightarrow \beta \circ \gamma$ существует. Повторяя рассуждения из б), получаем

$$\beta \circ \gamma = \{(2,1), (2,2)\}.$$

г) $\beta^{-1} \subseteq B \times A$ и $\alpha \subseteq A \times B \Rightarrow \beta^{-1} \circ \alpha \subseteq B \times B$ и

$$\beta^{-1} \circ \alpha = \{(4,4), (4,6), (5,4), (5,6), (6,4), (6,6)\}.$$

д) $\beta^{-1} \subseteq B \times A$ и $\beta \subseteq A \times B \Rightarrow \beta^{-1} \circ \beta \subseteq B \times B$ и

$$\beta^{-1} \circ \beta = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} = B^2.$$

е) $\beta \subseteq A \times B$ и $\beta^{-1} \subseteq B \times A \Rightarrow \beta \circ \beta^{-1} \subseteq A \times A$ и $\beta \circ \beta^{-1} = \{(2,2)\}$.

ж) $\gamma^{-1} \subseteq A \times B$ и $\beta^{-1} \subseteq B \times A \Rightarrow \gamma^{-1} \circ \beta^{-1} \subseteq A \times A$ и

$$\gamma^{-1} \circ \beta^{-1} = \{(1,2), (2,2)\}.$$

з) $(\beta \circ \gamma)^{-1} = \{(1,2), (2,2)\} = \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}$.

Отношение равенства. Пусть A – некоторое множество. Отношение

$$1_A = \{(x,x) | x \in A\} = \Delta \subseteq A \times A$$

называется **отношением равенства** на A, т.е.

$$x 1_A y \Leftrightarrow x = y.$$

Очень полезной является

Теорема 1. *Пусть даны множества A, B, C, D и отношения $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$. Тогда:*

1) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (композиция отношений ассоциативна);

2) $1_A \circ R = R \circ 1_B = R$;

3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$;

4) $(R^{-1})^{-1} = R$.

Отношения эквивалентности. Бинарное отношение $R \subseteq A^2$ называется:

а) **рефлексивным**, если xRx для $(\forall)\, x \in A$;

б) **симметричным**, если $(xRy \Rightarrow yRx)$, $(\forall)\, x, y \in A$;

в) **транзитивным**, если $((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$, $(\forall)\, x, y, z \in A$;

г) **антисимметричным**, если $((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$, $(\forall)\, x, y \in A$;

д) **отношением эквивалентности на** A, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным;

е) **антирефлексивным**, если $x \not R x$ для $(\forall)\, x \in A$.

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Для каждого элемента $x \in A$ множество

$$R_x = \{y \in A | xRy\}$$

называется **классом эквивалентности** x по модулю R (или по отношению R), а множество

$$A/R = \{R_x | x \in A\}$$

называется **фактор-множеством** (или **множеством вычетов**) A по R.

Свойства классов эквивалентности. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A и $x, y \in A$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $x \in R_x$;
2) $R_x = R_y \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y \in R_x$;
3) $R_x \neq R_y \Leftrightarrow R_x \cap R_y = \varnothing$;
4) $\bigcup\limits_{x \in A} R_x = A$.

Разбиение некоторого множества. Пусть A – непустое множество. Семейство подмножеств $\{A_i | i \in I\}$ множества A называется **разбиением на** A, если выполнены следующие условия:

1) $i \in I \Rightarrow A_i \neq \varnothing$;
2) $A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
3) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.

Теорема 2. *Для любого отношения эквивалентности R на множестве A фактор-множество $A/R = \{R_x | x \in A\}$ является разбиением на A.*

Теорема 3. *Для любого разбиения $S = \{A_i | i \in I\}$ множества A существует единственное отношение эквивалентности α_S на A такое, что*

$$A/\alpha_S = \{A_i | i \in I\}.$$

Отношение $\alpha_S \subseteq A^2$ строится по правилу

$$x\alpha_S y \Leftrightarrow (\exists)\, i \in I \ \ (x \in A_i \wedge y \in A_i).$$

Легко доказывается, что α_S является отношением эквивалентности на A и удовлетворяет требуемому равенству.

Пример 3. Определим на множестве $\mathbf{Z}$ бинарное отношение α по правилу $a\alpha b \Leftrightarrow (a-b)\vdots n$, где $n \in I\!N^*$, n фиксированное, $(\forall)\, a, b \in \mathbf{Z}$.

а) Доказать, что α есть отношение эквивалентности на $\mathbf{Z}$.

б) Найти строение классов эквивалентности.

в) Построить фактор-множество $\mathbf{Z}/\alpha$. Приложение: $n=5$.

Решение. а) Пусть $a, b, c \in \mathbf{Z}$, тогда:

1) **рефлексивность** $a - a = 0 \vdots n \Rightarrow a\alpha a$;

2) **симметричность** $a\alpha b \Rightarrow (a-b)\vdots n \Rightarrow -(b-a)\vdots n \Rightarrow$ $\Rightarrow (b-a)\vdots n \Rightarrow b\alpha a$;

3) **транзитивность** $(a\alpha b \wedge b\alpha c) \Rightarrow ((a-b)\vdots n \wedge (b-c)\vdots n) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((a-b)+(b-c))\vdots n \Rightarrow (a-c)\vdots n \Rightarrow a\alpha c$.

Из 1) – 3) вытекает, что α есть отношение эквивалентности на $\mathbf{Z}$.

б) Пусть $a \in \mathbf{Z}$, тогда

$$\alpha_a = \{b \in \mathbf{Z} | a\alpha b\} = \{b \in \mathbf{Z} | (b-a)\vdots n\} = \{b \in \mathbf{Z} | (\exists)\, t \in \mathbf{Z}\colon\ b - a = nt\} =$$
$$= \{b \in \mathbf{Z} | (\exists)\, t \in \mathbf{Z}\colon\ b = a + nt\} = \{a + nt | t \in \mathbf{Z}\}.$$

В силу теоремы о делении с остатком для целых чисел a и n получаем

$$a = nq + r_a, \quad 0 \le r_a \le n-1.$$

Тогда

$$a + nt = nq + r_a + nt = r_a + (nt + nq) = r_a + ns,$$

где $s = t + q \in \mathbf{Z}$, и потому

$$\alpha_a = \{r_a + ns | s \in \mathbf{Z}\},$$

где r_a – остаток от деления a на n. Но

$$a = nq + r_a \Leftrightarrow a - r_a = nq \Leftrightarrow (a - r_a)\vdots n \Leftrightarrow a\alpha r_a \Leftrightarrow \alpha_a = \alpha_{r_a}.$$

Другими словами, класс эквивалентности $a \in \mathbf{Z}$ совпадает с классом остатка от деления a на n.

в) Так как от деления на n могут быть получены только остатки $0, 1, 2, \ldots, n-1$, тогда из б) следует, что имеем точно n различных классов эквивалентности:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}.$$

Как правило, применяется обозначение $\alpha_i = \hat{i}$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда

$$\mathbf{Z}/\alpha = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\},$$

где $\hat{i}$ состоит из тех и только тех целых чисел, которые при делении на n дают остаток i, $i = \overline{0, n-1}$.

Для $n = 5$ получаем

$$\mathbf{Z}/\alpha = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\},$$

где

$$\hat{0} = \{\pm 0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots\} = \{5t | t \in \mathbf{Z}\},$$

$$\hat{1} = \{1 + 5q | q \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\},$$

$$\hat{2} = \{2 + 5s | s \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\},$$

$$\hat{3} = \{3 + 5u | u \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\},$$

$$\hat{4} = \{4 + 5v | v \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}.$$

Определение. *Отношение α называется* **отношением конгруэнции по модулю** *n на $\mathbf{Z}$, класс $\hat{a} = \alpha_a$ называется* **классом вычетов по модулю** *n а его элементы называются представителями этого класса.*

Принятое обозначение:
$a \alpha b \Leftrightarrow (a - b) \vdots n \Leftrightarrow a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$, ($a$ конгруэнтно b по модулю n), а

$$\mathbf{Z}/\alpha = \mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$$

есть множество всех классов вычетов по модулю n.

Пример 4 (геометрический). Пусть π – некоторая плоскость и L – множество всех прямых на этой плоскости. Определим на L бинарное отношение β по правилу

$$d_1 \beta d_2 \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2, \ (\forall)\, d_1, d_2 \in L.$$

а) Показать, что β есть отношение эквивалентности на L.

б) Описать классы вычетов по модулю β.

в) Указать фактор-множество.

Решение. а) Очевидно, что β есть отношение эквивалентности (каждая прямая параллельна себе, если $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_2 \parallel d_1$ и

$$(d_1 \parallel d_2 \wedge d_2 \parallel d_3) \Rightarrow d_1 \parallel d_3).$$

б) Пусть $d \in L$. Тогда класс

$$\beta_d = \{l \in L | l \alpha d\} = \{l \in L | l || d\}$$

состоит из тех и только тех прямых из L, которые параллельны прямой d.

в) $L/\beta = \{\beta_d | d \in L\}$ – бесконечное множество, так как на плоскости π имеется бесконечное множество направлений.

Пример 5. Дано множество $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и его подмножества $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,4,6\}$, $A_3 = \{5,7,8\}$, $A_4 = \{9\}$, $B_1 = \{1,2,4\}$, $B_2 = \{2,5,6\}$, $B_3 = \{3,7,8,9,10\}$.

а) Показать, что $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ есть разбиение на A.

б) Найти отношение эквивалентности α_S на A.

в) Является ли $T = \{B_1, B_2, B_3\}$ разбиением на A?

Решение. а) 1) Замечаем, что $A_i \in S \Rightarrow A_i \neq \varnothing$, $i = \overline{1,4}$;

2) $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_1 \cap A_4 = A_2 \cap A_3 = A_2 \cap A_4 = A_3 \cap A_4 = \varnothing$.

3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$.

т.е. семейство S подмножеств множества A определяет некоторое разбиение на A.

б) В силу теоремы 3 имеем

$$(x, y) \in \alpha_S \Leftrightarrow x\alpha_S y \Leftrightarrow (\exists)\, i \in \{1,2,3,4\}\, (x \in A_i \wedge y \in A_i).$$

Таким образом,

$\alpha_S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(3,6),(4,3),(4,4),(4,6),(6,3),(6,4),(6,6),(5,5),(5,7),(5,8),(8,5),(8,8),(8,7),(7,5),(7,7),(7,8),(9,9)\}$.

в) 1) $B_i \in T \Rightarrow B_i \neq \varnothing$; $i = \overline{1,3}$;

2) $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A$;

3) $B_1 \cap B_2 = \{2\} \neq \varnothing$,

а это доказывает, что семейство T не является разбиением на A.

Отношения порядка. Бинарное отношение R, определенное на множестве A, называется **отношением порядка на** A, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Если R является отношением порядка на A, тогда и R^{-1} также является отношением порядка на A (проверить!). Как правило, отношение R обозначается „$\leq$" а отношение R^{-1} – "$\geq$", так что

$$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x.$$

Учитывая эти обозначения, условия, что „$\leq$" является отношением порядка на A, записываются следующим образом:

рефлексивность $\quad x \in A \Rightarrow x \leq x$;

антисимметричность $\quad (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$;

транзитивность $\quad (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Пример 6. На множестве $I\!N$ определяем бинарное отношение γ по правилу

$$a\gamma b \Leftrightarrow (\exists)\, k \in I\!N (a = b \cdot k).$$

Показать, что γ есть отношение порядка на $I\!N$.

Решение. Проверим условия, определяющие отношение порядка.

1) **Рефлексивность**

$$a = a \cdot 1 \Rightarrow a\gamma a,\ (\forall)\, a \in I\!N.$$

2) **Антисимметричность.** Пусть $a, b \in I\!N$, где $a\gamma b$ и $b\gamma a$. Отсюда следует существование натуральных чисел $c, d \in I\!N$ таких, что $a = b \cdot c$ и $b = a \cdot d$. Но тогда

$$a = b \cdot c = (a \cdot d) \cdot c = a \cdot (d \cdot c) \Rightarrow d \cdot c = 1 \Rightarrow d = c = 1,$$

откуда следует, что

$$a = b \cdot c = b \cdot 1 = b.$$

3) **Транзитивность.** Пусть $a, b, c \in I\!N$ где, $a\gamma b$ и $b\gamma c$. Тогда существуют $u, v \in I\!N$ такие, что $a = bu$ и $b = cv$, и потому

$$a = bu = (cv)u = c(vu) \Rightarrow a\gamma c.$$

Так как $v \cdot u \in I\!N$, то справедлива импликация

$$(a\gamma b \wedge b\gamma c) \Rightarrow a\gamma c,$$

а это доказывает, что γ является отношением порядка на множестве $I\!N$.

Замечание. *Отношение порядка γ называется отношением делимости на $I\!N$ и обозначается $a \vdots b$, т.е.*

$$a\gamma b \Rightarrow a \vdots b \Leftrightarrow (\exists)\, k \in I\!N(a = b \cdot k) \Leftrightarrow b | a$$

($b|a$ *читается "b делит a", а $a \vdots b$ – "a делится на b"*).

II. Функциональные отношения. Пусть даны два множества A и B. Отношение $R \subseteq A \times B$ называется **функциональным отношением**, если выполнены следующие условия:

1) $(\forall) x \in A\, (\exists)\, y \in B$ так, что xRy;

2) $(xRy \wedge xRy_1) \Rightarrow y = y_1$.

Отображение (или **функция**) представляет собой тройку $f = (A, B, R)$, где A и B – два множества, а $R \subseteq A \times B$ – функциональное отношение.

Если $R \subseteq A \times B$ является отображением, тогда для каждого элемента $x \in A$ существует, согласно приведенным выше условиям 1) и 2), единственный элемент $y \in B$ такой, что xRy. Этот элемент y обозначается $f(x)$. Таким образом,

$$f(x) = y \Leftrightarrow xRy.$$

Элемент $f(x) \in B$ называется **образом** элемента $x \in A$ при отображении f, множество A называется **областью определения** f, которое обозначается $D(f) = A$, а множество B называется **областью значений (кообластью)** f. Говорим, что f есть отображение, определенное на A со значениями в B. Функциональное отношение R называется также и **графиком** отображения (функции) f, который в дальнейшем будем обозначать G_f. Для того чтобы указать, что f является отображением на A со значениями в B, запишем $f\colon A \longrightarrow B$, или $A \xrightarrow{f} B$, а вместо того, чтобы указать, что является его графиком R (для f), указываем образ $f(x)$ каждого элемента $x \in A$. Тогда

$$y = f(x) \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow xRf(x) \Leftrightarrow (x, f(x)) \in R = G_f,$$

т.е.

$$G_f = \{x, f(x))|x \in A\} \subseteq A \times B.$$

Равенство отображений. Два отображения $f = (A, B, R)$ и $g = (C, D, S)$ называются **равными** тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же область $A = C$, одну и ту же кообласть $B = D$ и один и тот же график $R = S$. В случае, когда $f, g\colon A \longrightarrow B$, равенство $f = g$ равносильно $f(x) = g(x), (\forall)\, x \in A$, т.е.

$$f = g \Leftrightarrow (\forall)\, x \in A\ (f(x) = g(x)).$$

Тождественное отображение. Пусть A – некоторое множество. Тройка $(A, A, 1_A)$, очевидно, является отображением, которое обозначается тем же символом 1_A (или ε) и называется **тождественным отображением** множества A.

Имеем

$$1_A(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in 1_A \Leftrightarrow x = y.$$

Следовательно,

$$1_A\colon A \longrightarrow A \text{ и } 1_A(x) = x \text{ для } (\forall)\, x \in A.$$

Через $F(A, B)$ будем обозначать множество функций, определенных на A со значениями в B. Для $B = A$ применим обозначение $F(A)$ вместо $F(A, A)$.

В случае, когда множество конечно $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, функцию $\varphi\colon A \longrightarrow A$ иногда можно определить и при помощи таблицы вида

x	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
$\varphi(x)$	$\varphi(a_1)$	$\varphi(a_2)$	$\ldots$	$\varphi(a_n)$

,

где в первой строке записываются элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ множества A, а во второй строке записываются образы соответствующих элементов при отображение φ, а именно $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$.

Если множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, тогда для определения отображения φ: $A \longrightarrow A$ будем использовать и запись

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \ldots & \varphi(n-1) & \varphi(n) \end{pmatrix};$$

чаще это обозначение применяется для записи биективных отображений множества A на себя. Например, если $A = \{1, 2\}$, тогда элементами $F(A)$ являются:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если f: $A \longrightarrow B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, тогда:

$$f(X) = \{b \in B | (\exists)\, x \in X\colon\ f(x) = b\} = \{f(x) | x \in X\} \subseteq B$$

называется **образом** подмножества X при отображении f.

В частном случае, $\varphi(A) = \mathcal{I}m\varphi$ – **образ отображения** φ;

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A | (\exists)\, y \in Y\colon\ f(a) = y\} = \{a \in A | f(a) \in Y\} \subseteq A$$

называется **прообразом** подмножества Y при отображении f.

В частном случае, для $y \in B$ вместо $f^{-1}(\{y\})$ запишем просто $f^{-1}(y)$, т.е.

$$f^{-1}(y) = \{a \in A | f(a) = y\}$$

есть множество всех прообразов y при отображении f, а

$$f^{-1}(B) = \{a \in A | \varphi(a) \in B\}$$

есть **полный прообраз** множества B при отображении f.

Композиция отображений. Рассмотрим отображения $f = (A, B, R)$ и $g = (B, C, S)$, т.е. кообласть f совпадает с областью g. Образуем тройку $g \circ f = (A, C, R \circ S)$.

Тогда $g \circ f$ является также отображением, называемым произведением отображения g с отображением f, а операция "$\circ$" называется **композицией отображений.** Имеем

$$(g \circ f)(x) = z \Leftrightarrow (x, z) \in R \circ S \Leftrightarrow (\exists)\, y \in B((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists)\, y \in B\colon\ xRy \wedge ySz \Leftrightarrow (\exists)\, y \in B\colon\ (f(x) = y \wedge g(y) = z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(f(x)) = z,$$

т.е.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ (\forall)\, x \in A.$$

Теорема 4. *Пусть даны отображения* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. *Тогда* *а)* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *(композиция отображений ассоциативна);*

б) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

Пример 7. Рассмотрим отношения $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $S \subseteq [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, определенные следующим образом: $xRy \Leftrightarrow x^2 = y$, $xSy \Leftrightarrow x = y^2$, $xTy \Leftrightarrow y = x + 1$.

А. Определить, какие из отношений R, R^{-1}, S, S^{-1}, T, T^{-1} являются функциональными отношениями.

Б. Указать функции, определенные в А.

В. Вычислить $f \circ g, g \circ f, f \circ h, h \circ f, h \circ h^{-1}, h^{-1} \circ h$, где f, g, h – функции из п. Б.

Г. Вычислить $(f \circ h)(-3), (h^{-1} \circ h)(1/2), (h \circ f)(1/3)$.

Решение. Пункты А и Б решим одновременно.

а) Рассмотрим отношение R.

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{R}, \text{ т.е.}$$

1) $(\forall)\, x \in \mathbb{R}\, (\exists)\, y = x^2 \in \mathbb{R}$ так, что xRy;

2) $(xRy \wedge xRy_1) \Rightarrow (y = x^2 \wedge y_1 = x^2) \Rightarrow y = y_1$, т.е. R является функциональным отношением. Отображение, определяемое R, обозначим через f, $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, R)$.

б) Рассмотрим отношение R^{-1}:

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y = x^2,$$

т.е. если $y \in \mathbb{R} = \{a \in \mathbb{R} | a < 0\}$, тогда не существует ни один $x \in \mathbb{R}$ такой что, $yR^{-1}x$, а это доказывает, что R^{-1} не является функциональным отношением.

в) Для отношения S имеем: S и S^{-1} являются функциональными отношениями. Обозначим $g = ([0, +\infty), [0, +\infty), S)$ и $g^{-1} = ([0, +\infty), [0, +\infty), S^{-1})$ – функции (отображения), определенные для S и S^{-1} соответственно.

з) Рассмотрим отношение T:

1) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{R}$, а значит,

$$(\forall) x \in \mathbb{R}\, (\exists)\, y = x + 1 \in \mathbb{R}, \text{ так что } xTy;$$

2) $(xTy \wedge xTy_1) \Rightarrow (y = x + 1 \wedge y_1 = x + 1) \Rightarrow y = y_1$, а это доказывает, что T является функциональным отношением.

д) Для отношения T^{-1} получаем

$$yT^{-1}x \Leftrightarrow xTy \Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1.$$

1) $(\forall)\, y \in \mathbb{R}\, (\exists)\, x = y - 1 \in \mathbb{R}$ так, что $yT^{-1}x$;

2) $(yT^{-1}x \wedge yT^{-1}x_1) \Rightarrow (xTy \wedge x_1Ty) \Rightarrow (y = x + 1 \wedge y = = x_1 + 1) \Rightarrow x_1 + 1 = x + 1 \Rightarrow x_1 = x$, т.е. T^{-1} также является

функциональным отношением. Обозначим $h = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T)$ и $h^{-1} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T^{-1})$ соответственно.

В. Из А и Б следует

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty),\ h(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R},\ h^{-1}(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

а) Тогда $f \circ g$, $g \circ f$ и $g \circ h$ не существуют, так как области и кообласти не совпадают ($f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, R)$, $g = ([0, +\infty), [0, +\infty), S)$, $h = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T)$).

б) Вычислим $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ h^{-1}$ и $h^{-1} \circ h$.

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x+1) = (x+1)^2;$$
$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2) = x^2 + 1;$$
$$(h \circ h^{-1})(x) = h(h^{-1}(x)) = h(x-1) = (x-1) + 1 = x = 1_{\mathbb{R}}(x);$$
$$(h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(x+1) = (x+1) - 1 = x = 1_{\mathbb{R}}(x).$$

Таким образом, $f \circ h \neq h \circ f$ и $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{R}}$.

Г. Вычислим $(f \circ h)(-3) = (x+1)^2/_{x=-3} = 4$, $(h^{-1} \circ h)(1/3) = 1/2$, $(h \circ f)(1/3) = (x^2+1)/_{x=1/3} = 1/9 + 1 = 10/9$.

Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Отображение $f \colon A \longrightarrow B$ называется:

1) **инъективным**, если $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, $(\forall)\, a_1, a_2 \in A$ (равносильно $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$);

2) **сюръективным**, если $(\forall)\, b \in B\, (\exists)\, a \in A$: $f(a) = b$ (любой элемент из B имеет хотя бы один прообраз в A);

3) **биективным**, если f является и инъективным и сюръективным.

Замечание. *Чтобы доказать, что функция $f \colon A \longrightarrow B$ является сюръективной, необходимо, чтобы уравнение $f(x) = b$ было разрешимо в A для любого $b \in B$.*

Особенно полезными являются

Теорема 5. *Пусть даны отображения $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Тогда:*

а) если f и g инъективны, тогда $g \circ f$ также инъективно;

б) если f и g сюръективны, тогда $g \circ f$ также сюръективно;

в) если f и g биективны, тогда $g \circ f$ также биективно;

г) если $g \circ f$ инъективно, тогда f является инъективным;

д) если $g \circ f$ сюръективно, тогда g является сюръективным.

Теорема 6. *Отображение $f \colon A \longrightarrow B$, графиком которого является $G_f = R$, является биективным отображением тогда и только тогда, когда обратное отношение R^{-1} является функциональным отношением (f^{-1} является отображением).*

Эта теорема непосредственно следует из

$$(y,x) \in R^{-1} \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y = f(x).$$

Обратное отображение. Пусть $f\colon A \longrightarrow B$ – биективное отображение с графиком $G_f = R$. Из теоремы 6 следует, что тройка $f^{-1} = (B, A, R^{-1})$ является отображением (функцией). Эта функция называется **обратной** к функции f. Имеем

$$f^{-1}\colon B \longrightarrow A \text{ а для } y \in R,$$
$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow f(x) = y,$$

т.е.

$$(y,x) \in R^{-1} = G_{f^{-1}} \Leftrightarrow (x,y) \in R = G_f.$$

Теорема 7. *Отображение $f\colon A \longrightarrow B$ является биективным тогда и только тогда, когда существует отображение $g\colon B \longrightarrow A$ такое, что $g \circ f = 1_A$ и $f \circ g = 1_B$. В этом случае имеем $g = f^{-1}$.*

III. Действительные функции. Функция $f\colon A \longrightarrow B$ называется **функцией действительного переменного**, если $A = D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Функция действительного переменного $f\colon A \longrightarrow B$ называется **действительной функцией**, если $B \subseteq \mathbb{R}$. Другими словами, функция $f\colon A \longrightarrow B$ называется **действительной функцией**, если $A \subseteq \mathbb{R}$ и $B \subseteq \mathbb{R}$. Графиком действительной функции $f\colon A \longrightarrow B$ является подмножество G_f множества $\mathbb{R}^2$, состоящее из всех пар $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, где $x \in A$ а $y = f(x)$, т.е.

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

Если функция f обратима, то

$$(y,x) \in G_{f^{-1}} \Leftrightarrow (x,y) \in G_f,$$

По традиции, вместо $f^{-1}(y) = x$ пишут $y = f^{-1}(x)$. Тогда график обратной функции f^{-1} симметричен графику функции f относительно биссектрисы $y = x$.

Пример 8. Обратной к функции

$$f\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty), \quad y = f(x) = x^2$$

является функция

$$f^{-1}\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty), \ y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Графиком функции f является ветвь параболы $y = x^2$, содержащаяся в первой четверти, а графиком функции f^{-1} – ветвь параболы $x = y^2$, содержащаяся в той же четверти (рис. 2.1).

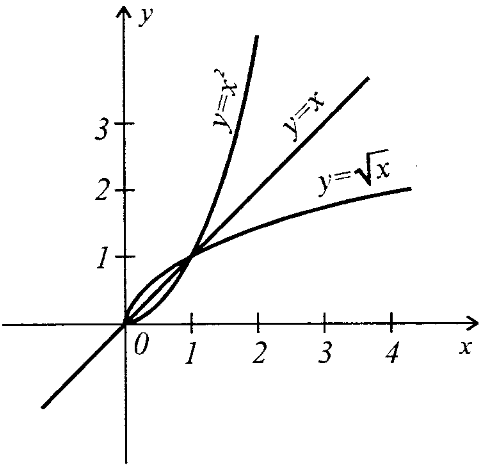


Рис. 2.1

Алгебраические операции над действительными функциями. Пусть f, g: $D \longrightarrow \mathbb{R}$ – две действительные функции, определенные на одном и том же множестве D. Рассмотрим функции:

$s = f + g$: $D \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством $s(x) = f(x) + g(x)$, $(\forall)\ x \in D$;

$s = f + g$ – **сумма функций.**

$p = f \cdot g$: $D \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $(\forall)\ x \in D$;

$p = f \cdot g$ – **произведение функций.**

$d = f - g$: $D \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством $d(x) = f(x) - g(x)$, $(\forall)\ x \in D$;

$d = f - g$ – **разность функций.**

$q = \dfrac{f}{g}$: $D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(\forall)\ x \in D_1$; где $D_1 = \{x \in D | g(x) \neq 0\}$;

$q = \dfrac{f}{g}$ – **частное функций.**

$|f|$: $D \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством $|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0, \end{cases}$ для $(\forall)\ x \in D$;

$|f|$ – **модуль функции.**

Пример 9. Пусть $f, g\colon [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, где $f(x) = x^2$, а $g(x) = \sqrt{x}$. Найти $f \pm g$, $f \cdot g$ şi f/g.

Решение. Так как функции f, g имеют одну и ту же область определения, то функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и f/g имеют смысл и

$s(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in [0, +\infty)$;
$d(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in [0, +\infty)$;
$p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in [0, +\infty)$;
$q(x) = f(x)/g(x) = x^2/\sqrt{x} = x\sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in D_1 = (0, +\infty)$.

Пример 10. Пусть $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ и $g\colon [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Найти а) $g \circ f$ и б) $f \circ g$.

Решение. а) $g \circ f = \varphi$ имеет смысл и получаем функцию $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, где $\varphi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

б) Также имеет смысл $\psi = f \circ g\colon [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, и
$\psi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, $(\forall)\, x \in [0, \infty)$.

2.2. Решенные примеры

1. Пусть $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $\alpha \subseteq A \times B$, $\alpha = \{(x, y) |\, x \geq 6$ либо $y \leq 1\}$:

а) что является графиком отношения α?

б) составить схему отношения α.

Решение. а) Так как $x \in A$, а $y \in B$, тогда

$$x \geq 6 \Leftrightarrow x \in \{6, 8\},\ y \leq 1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Таким образом,

$\alpha = \{(6,1), (6,3), (6,5), (6,7), (8,1), (8,3), (8,5), (8,7), (2,1), (4,1)\}$.

б) (См. рис. 2.2).

2. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Написать график отношения $\alpha = \{(x, y) |\, 3x + 4y = 10\} \subseteq A \times B$.

Решение. Замечаем, что $3x + 4y = 10 \Leftrightarrow 3x = 2(5 - 2y) \Rightarrow x$ четное и $(5 - 2y) \vdots 3$. Учитывая, что $x \in A$ а $y \in B$, получаем $x \in \{2, 4\}$, $y \in \{1, 7\}$. Равенство $3x + 4y = 10$ удовлетворяется только для $x = 2$ и $y = 1$. Следовательно, $G_\alpha = \{(2, 1)\}$.

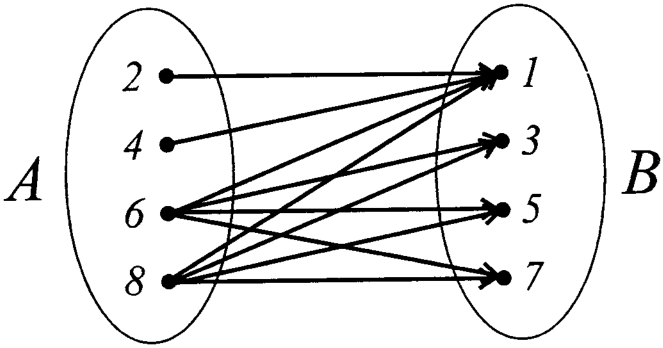


Рис. 2.2

3. Пусть $A = \{1,3,4,5\}$ и $B = \{1,2,5,6\}$. Написать отношение α с помощью букв $x \in A$ и $y \in B$, если известен график отношения α.

$$G_\alpha = \{(1,1), (1,2), (1,5), (1,6), (3,6), (5,5)\}.$$

Решение. $(x,y) \in G_\alpha \Leftrightarrow y \vdots x$.

4. На множестве натуральных чисел $I\!N$ рассмотрим отношения $\alpha, \beta, \gamma, \omega \subseteq I\!N^2$, определенные следующим образом:

$$(x, y \in I\!N)\colon\ \alpha = \{(3,5), (5,3), (3,3), (5,5)\};\ x\beta y \Leftrightarrow x \leq y;$$
$$x\gamma y \Leftrightarrow y - x = 12;\ \ x\omega y \Leftrightarrow x = 3y.$$

а) Найти δ_α, ρ_α, δ_β, ρ_β, δ_γ, ρ_γ, δ_ω, ρ_ω.

б) Какими свойствами обладают отношения $\alpha, \beta, \gamma, \omega$?

в) Найти отношения α^{-1}, β^{-1}, γ^{-1} и ω^{-1}.

г) Найти отношения $\beta \circ \gamma$, $\gamma \circ \beta$, $\gamma^{-1} \circ \beta^{-1}$, $(\beta \circ \gamma)^{-1}$, $\gamma \circ \omega$ и $\omega^{-1} \circ \omega$.

Решение. а) 1) $\delta_\alpha = \{3,5\} = \rho_\alpha$.

2) $\delta_\beta = \{x \in I\!N \,|\, (\exists)\, y \in I\!N\colon x\beta y\} = \{x \in I\!N \,|\, (\exists)\, y \in I\!N\colon x \leq y\} = I\!N$ (для любого натурального числа существуют натуральные числа больше его).

$\rho_\beta = \{y \in I\!N \,|\, (\exists)\, x \in I\!N\colon x\beta y\} = \{y \in I\!N\ (\exists)\, x \in I\!N\colon x \leq y\} = I\!N$ (для любого натурального числа существует, по крайней мере, одно число не больше его).

3) $\delta_\gamma = \{x \in I\!N \,|\, (\exists)\, y \in I\!N\colon x\gamma y\} = \{x \in I\!N \,|\, (\exists)\, y \in I\!N\colon y - x = 12\} =$
$= \{x \in I\!N \,|\, (\exists)\, y \in I\!N\colon x = y - 12\} = I\!N$

(например, $0 = 12 - 12$, $1 = 13 - 12$ и т.д.).

$\rho_\gamma = \{y \in I\!N | (\exists)\, x \in I\!N\colon\ y = x + 12\} = I\!N \setminus \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$ (например, уравнение $2 = x + 12$ не имеет решения в $I\!N$).

4) $\delta_\omega = \{x \in I\!N | (\exists)\, y \in I\!N\colon\ x\omega y\} = \{x \in I\!N | (\exists)\, y \in I\!N\colon\ x =$
$= 3y\} = \{x \in I\!N | x \vdots 3\} = \{0, 3, 6, 9, \ldots\} = \{3k | k \in I\!N\}$.

$\rho_\omega = \{y \in I\!N | (\exists)\, x \in I\!N\colon\ x = 3y\} = \{y \in I\!N | (\exists)\, x \in I\!N\colon\ y = x : 3\} = I\!N$ (для любого $n \in I\!N$ имеем $n = 3n/3$).

б) 1) α является симметричным, транзитивным, но не является рефлексивным. Например, $(2, 2) \notin \alpha$; **так как** $(3, 3) \in \alpha$, **то** α **не является и антирефлексивным.**

2) β является рефлексивным ($x \le x$, $(\forall)\, x \in I\!N$), антисимметричным ($(x\beta y \wedge y\beta x) \Rightarrow (x \le y \wedge y \le x) \Rightarrow x = y$), транзитивным ($(x \le y \wedge y \le z) \Rightarrow x \le z$). Таким образом, β является отношением порядка на множестве $I\!N$.

3) γ является антирефлексивным ($x - x \ne 12$, $(\forall)\, x \in I\!N$), антисимметричным ($(x\gamma y \wedge y\gamma x) \Rightarrow (y - x = 12$ и $x - y = 12) \Rightarrow$ $\Rightarrow x - y = y - x \Rightarrow x = y$), но не является симметричным ($x\gamma y \Rightarrow y - x = 12 \Rightarrow x - y = -12 \Rightarrow x \not\gamma y$), не является транзитивным ($(x\gamma y \wedge y\gamma z) \Rightarrow (y - x = 12 \wedge z - y = 12) \Rightarrow z - x =$ $= 24 \Rightarrow x \not\gamma z$).

4) ω не является антирефлексивным ($x \ne 3x$, $(\forall)\, x \in I\!N^*$, $0 = 3 \cdot 0$), является антисимметричным ($(x\omega y \wedge y\omega x) \Rightarrow (x = 3y \wedge$ $\wedge\, y = 3x) \Rightarrow x = 9x \Rightarrow x = 0 = y$, а для $x \ne 0 \ne y$, равенства $x = 3y$ и $y = 3x$ невозможны), не является рефлексивным (например, $1 \ne 3 \cdot 1 \Rightarrow 1 \not\omega 1$), не является транзитивным ($(x\omega y \wedge y\omega z) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x = 3y \wedge y = 3z) \Rightarrow x = 9z \ne 3z$, в общем случае $\Rightarrow x \not\omega z$).

в) 1) $\alpha^{-1} = \{(5, 3), (3, 5), (3, 3), (5, 5)\} = \alpha$.

2) $\beta^{-1} = \{(y, x) \in I\!N^2 | (x, y) \in \beta\} = \{(y, x) \in I\!N^2 | x\beta y\} =$
$= \{(y, x) \in I\!N^2 | x \le y\} = \{(y, x) \in I\!N | y \ge x\}$.

Следовательно,

$$y\beta^{-1}x \Leftrightarrow y \ge x. \tag{1}$$

3) $(y, x) \in \gamma^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \gamma \Leftrightarrow x\gamma y \Leftrightarrow y - x = 12 \Leftrightarrow x = y - 12$, т.е.

$$y\gamma^{-1}x \Leftrightarrow x = y - 12. \tag{2}$$

4) $(y, x) \in \omega^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \omega \Leftrightarrow x = 3y \Leftrightarrow y = x/3$, т.е.

$$y\omega^{-1}x \Leftrightarrow y = x/3. \tag{3}$$

г) 1) $(x,y) \in \beta \circ \gamma \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbb{N}\colon (x,z) \in \beta \wedge (z,y) \in \gamma \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbb{N}\colon x \le z \wedge y - z = 12 \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbb{N}\colon x \le z \wedge z =$
$= y - 12 \Leftrightarrow x \le y - 12 \Leftrightarrow x + 12 \le y,$

т.е.

$$\beta \circ \gamma = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | x + 12 \le y\}. \tag{4}$$

2) $(x,y) \in \gamma \circ \beta \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbb{N}\colon (x,z) \in \gamma \wedge (z,y) \in \beta \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \in \mathbb{N}\colon z-x=12 \wedge z \le y \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbb{N}\colon z = x+12 \wedge z \le y \Leftrightarrow x+12 \le y,$ откуда следует

$$\gamma \circ \beta = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | x + 12 \le y\}.$$

3) $(u,v) \in \gamma^{-1} \circ \beta^{-1} \Leftrightarrow (\exists)\, w \in \mathbb{N}\colon (u,v) \in \gamma^{-1} \wedge (w,v) \in \beta^{-1} \Leftrightarrow$
$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow} (\exists)\, w \in \mathbb{N}\colon w = u - 12 \wedge w \ge v \Leftrightarrow u - 12 \ge v \Leftrightarrow u \ge v + 12,$

т.е.

$$\gamma^{-1} \circ \beta^{-1} = \{(u,v) \in \mathbb{N}^2 | u \ge v + 12\}. \tag{5}$$

4) $(s,t) \in (\beta \circ \gamma)^{-1} \Leftrightarrow (t,s) \in \beta \circ \gamma \overset{(4)}{\Leftrightarrow} t+12 \le s \overset{(5)}{\Leftrightarrow} (s,t) \in \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}.$ Другими словами,

$$(\beta \circ \gamma)^{-1} = \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}.$$

5) $(x,y) \in \gamma \circ \omega \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbb{N}\colon (x,z) \in \gamma \wedge (z,y) \in \omega \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \in \mathbb{N}\colon z - x = 12 \wedge z = 3y \Leftrightarrow (\exists)\, z \in N\colon z = x + 12 \wedge z = 3y \Leftrightarrow \Leftrightarrow x + 12 = 3y$, откуда следует

$$\gamma \circ \omega = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | x + 12 = 3y\}.$$

6) $(u,v) \in \omega^{-1} \circ \omega \Leftrightarrow (\exists)\, w \in \mathbb{N}\colon (u,w) \in \omega^{-1} \wedge (w,v) \in \omega \Leftrightarrow$
$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} (\exists)\, w \in \mathbb{N}\colon u = w/3 \wedge w = 3v \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (u,v) \in 1_{\mathbb{N}},$

откуда следует

$$\omega^{-1} \circ \omega = 1_{\mathbb{N}}.$$

5. Рассмотрим бинарное отношение на $\mathbb{R}$, определенное следующим образом:

$$x \alpha y \Leftrightarrow (x = y \vee x + y = 2).$$

а) Доказать, что α есть отношение эквивалентности.

б) Найти фактор-множество $\mathbb{R}/\alpha$.

Решение. а) 1) Так как $x = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, то $x \alpha x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

2) $a \alpha b \Rightarrow (a = b \vee a + b = 2) \Rightarrow (b = a \vee b + a = 2) \Rightarrow b \alpha a$.

3) Пусть $a \alpha b$ и $b \alpha c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Тогда

$(a \alpha b \wedge b \alpha c) \Rightarrow ((a = b \vee a + b = 2) \wedge (b = c \vee b + c = 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow ((a = b \wedge b = c) \vee (a = b \wedge b + c = 2) \vee (a + b = 2 \wedge b = c) \vee (a + b =$
$= 2 \wedge b + c = 2)) \Rightarrow\Rightarrow (a = c \vee a + c = 2) \Rightarrow a \alpha c.$

Другими словами, бинарное отношение α является рефлексивным, симметричным и транзитивным, а это доказывает, что α является отношением эквивалентности на $\mathbb{R}$.

б) Пусть $a \in \mathbb{R}$. Определим класс эквивалентности α_a элемента a по отношению к α.

$$\alpha_a = \{x \in \mathbb{R} | x\alpha a\} = \{x \in \mathbb{R} | x = a \vee x + a = 2\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | x = a \vee x = 2 - a\} = \{a, 2 - a\}.$$

Тогда фактор-множеством является

$$\mathbb{R}/\alpha = \{\alpha_x | x \in \mathbb{R}\} = \{\{x, 2 - x\} | x \in \mathbb{R}\}.$$

Замечаем, что

$|\alpha_a| = 1 \Leftrightarrow a = 1$; $|\alpha_a| = 2 \Leftrightarrow a \neq 1$; $(a \neq b \Rightarrow (\alpha_a = \alpha_b \Leftrightarrow a+b = 2))$. Другими словами, для $a \neq 1$ имеем $a \neq 2 - a$ и потому $\alpha_a = \alpha_{2-a}$, а фактор-множество можно записать в виде

$$\mathbb{R}/\alpha = \{\alpha_a | a \in \mathbb{R}, a \geq 1\} = \{\{a, 2 - a\} | a \geq 1\}.$$

6. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{a, b, c, d, e\}$. Укажите, какие из диаграмм, приведенных на рис. 2.3, представляют функцию, определенную на A со значениями в B и какие не являются таковыми?

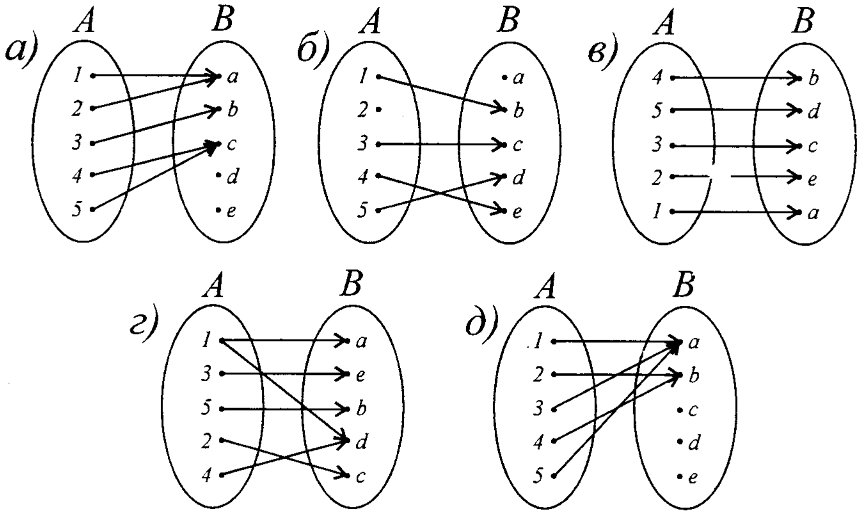


Рис. 2.3

Решение. Диаграммами а), в), д) заданы функции, определенные на A со значениями в B. Диаграмма б) не представляет функцию, определенную на A со значениями в B, так как не указан образ 2. Диаграмма г) также не представляет определенную на A функцию со значениями в B, так как 1 соответствуют два элемента из B, а именно, a, d.

7. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b\}$. Указать все функции, определенные на A со значениями в B, нарисовав соответствующие диаграммы.

Решение. Существует восемь функций, определенных на A со значениями в B. Их диаграммы приведены на рис. 2.4.

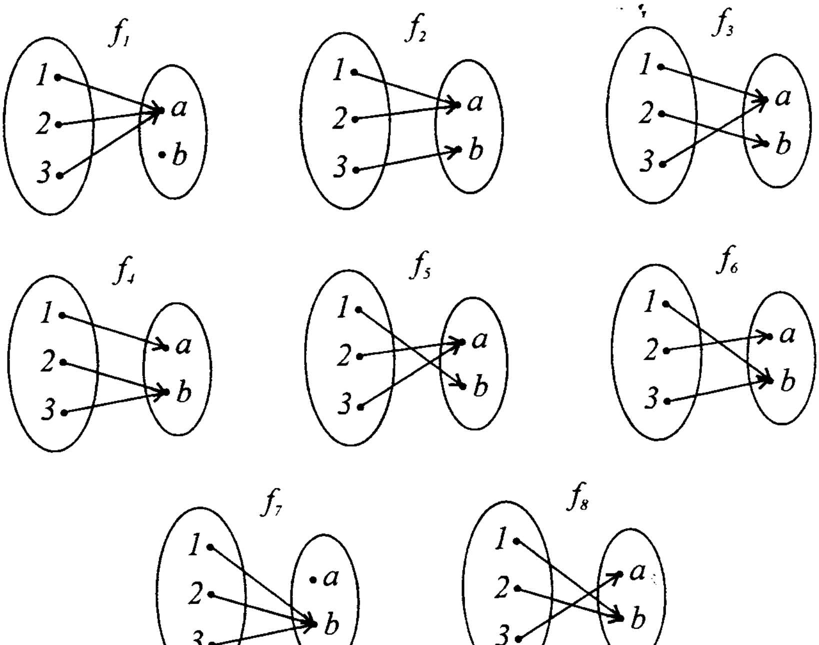


Рис. 2.4

8. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y, z, t\}$ и $D = \{1, 2\}$.

а) Нарисовать диаграммы, соответствующие двум сюръективным функциям, определенным на A со значениями в B.

б) Нарисовать диаграммы инъективных функций, определенных на D со значениями в B.

в) Нарисовать диаграмму функции, определенную на B со значениями в C, не являющуюся инъективной.

г) Нарисовать диаграммы, соответствующие двум биективным функциям, определенным на A со значениями в C.

Решение. а) Диаграммы двух сюръективных и двух несюръективных функций, определенных на A со значениями в B, приведены на рис. 2.5.

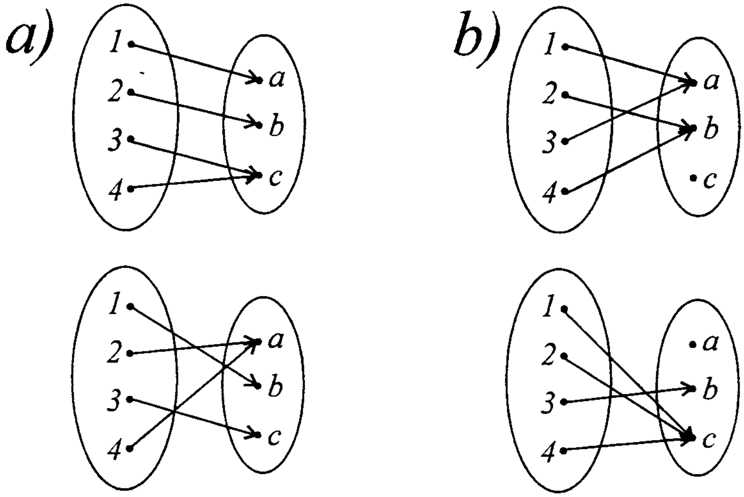


Рис. 2.5

б) Диаграммы инъективных функций, определенных на D со значениями в B, приведены на рис. 2.6.

в) Диаграммы неинъективной функции, определенной на B со значениями в C, приведены на рис. 2.7.

г) Диаграммы двух биективных функций, определенных на A со значениями в C, приведены на рис. 2.8.

9. Пусть $A=\{0,1,5,6\}$, $B=\{0,3,8,15\}$ и функция $f\colon A \longrightarrow B$ определена равенством $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $(\forall)\ x \in A$.

а) Является ли функция f сюръективной?

б) Является ли f инъективной?

в) Является ли f биективной?

Решение. а) Вычислим $f(A) = \{f(0), f(1), f(5), f(6)\} = \{3, 0,$

$8, 15\} = B$. Таким образом, f является сюръективным отображением.

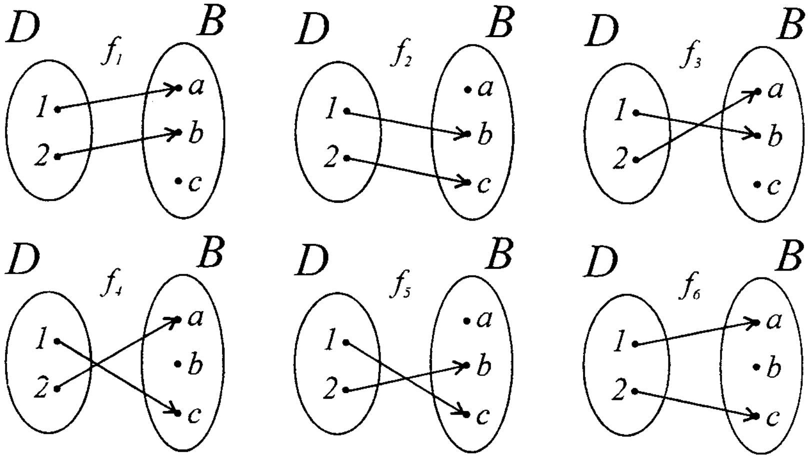


Рис. 2.6

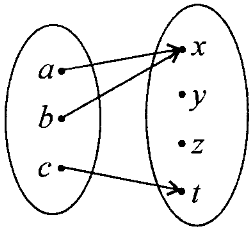


Рис. 2.7

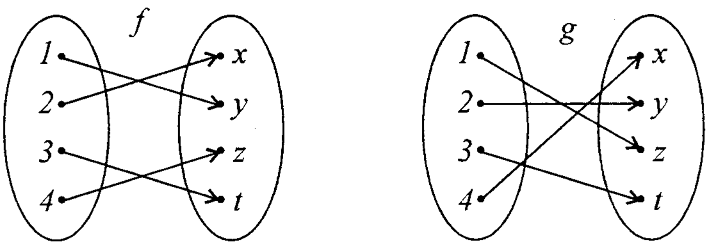


Рис. 2.8

б) Функция f является и инъективным отображением, так как $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(5) = 8$ и $f(6) = 15$, т.е. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

в) Функция f является биективным отображением.

10. Используя график функции $f\colon A \longrightarrow B$, $f\colon I\!R \longrightarrow I\!R$, показать, что функция f является или инъективным, или сюръективным, или биективным отображением.

а) $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \in (-\infty, 2), \\ 3x-6, & \text{если } x \in [2, +\infty). \end{cases}$

б) $f\colon [1;5] \longrightarrow [-1;3]$, $f(x) = |x^2 - 6x + 8|$.

в) $f\colon [-1, +\infty] \longrightarrow I\!R$, $f(x) = \begin{cases} -3x, \text{ если } -1 < x \leq 0, \\ -x, \text{ если } 0 < x \leq 1, \\ -0.5(x+1), \text{ если } x > 1. \end{cases}$

г) $f\colon I\!R \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \max(x+1, 1-x)$.

Решение. Если любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает график функции не более чем в одной точке (т.е. пересекает его только в одной точке или совсем не пересекает его), то функция является инъективной. Если существует прямая, параллельная оси абсцисс, которая пересекает график функции в двух и более точках, то функция не является инъективной. Если $E(f)$ является множеством значений функции f, а любая прямая, параллельная оси абсцисс и проведенная через точки оси ординат, которые содержатся в $E(f)$, пересекает график функции f по крайней мере в одной точке, то функция является сюръективной. Следовательно, функция fявляется биективной, если любая прямая, параллельная оси абсцисс, проведенная через точки множества $E(f)$, пересекает ее график в одной точке.

а) График функции f приведен на рис. 2.9.

Имеем $E(f) = (-\infty, +\infty)$ и любая прямая $y = m$, $m \in I\!R$, параллельная оси абсцисс, пересекает график функции f в одной точке. Следовательно, f является биективной.

б) Заметим, что $f(x) \geq 0, (\forall) x \in [1;5]$. Расписывая функцию $f(x)$, имеем:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{если } x^2 - 6x + 8 \geq 0, \\ -x^2 + 6x - 8, & \text{если } x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{если } x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty), \\ -x^2 + 6x - 8, & \text{если } x \in (2, 4). \end{cases}$$

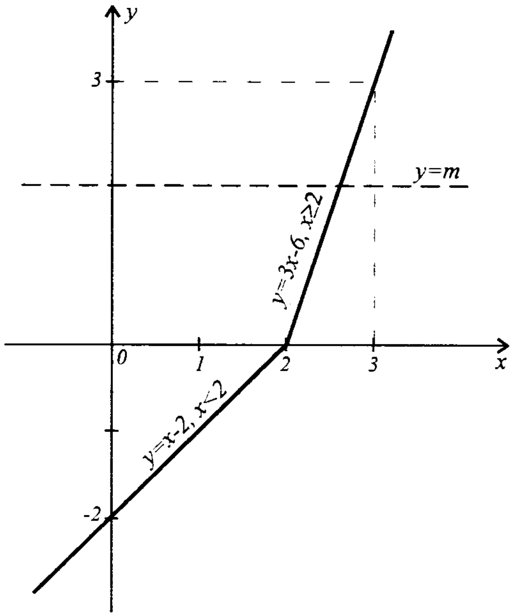


Рис. 2.9

График функции f приведен на рис. 2.10.

Имеем $E(f) = [0;3] \subset [-1;3]$. Любая прямая $y = m$, $m \in \in (0;1)$, параллельная оси абсцисс, пересекает график функции f в четырех точках; прямая $y = 1$ пересекает график в трех точках; любая прямая $y = m, m \in (1;3]$, параллельная оси абсцисс, пересекает график функции f в двух точках. Следовательно, функция f не является ни сюръективной, ни инъективной.

в) График функции приведен на рис. 2.11. Имеем

$$D(f) = [-1, +\infty), \ E(f) = (-\infty, 3].$$

Любая прямая $y = m$, параллельная оси абсцисс, пересекает график функции $f(x)$ самое большее в одной точке ($y = -3, y = 2, y = 4$) и потому $f(x)$ является инъективной. Уравнение $f(x) = r \in I\!\!R$ разрешимо только при $r \leq 3$, поэтому функция $f(x)$ не является сюръективной.

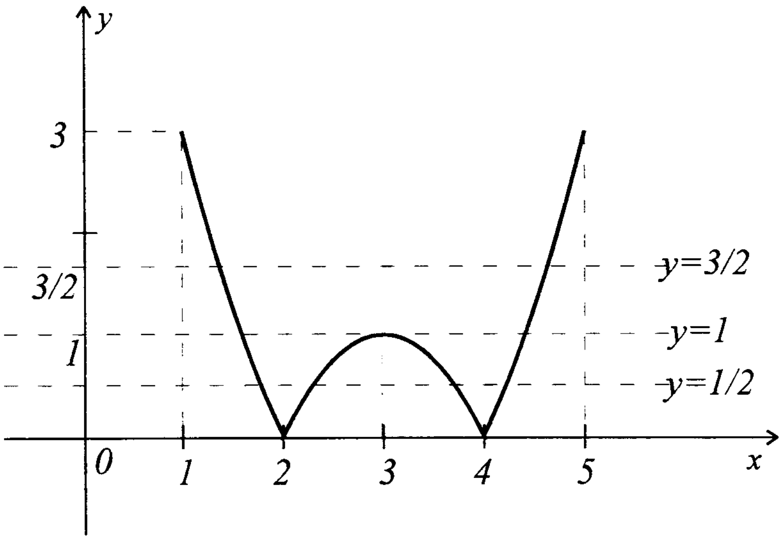


Рис. 2.10

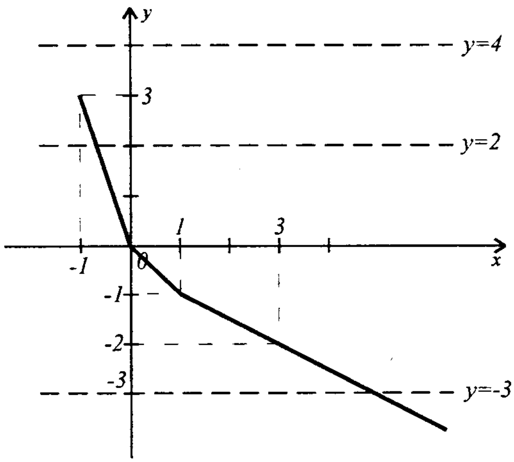


Рис. 2.11

г) Распишем функцию f следующим образом:

$$f(x) = \max(x+1, 1-x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } 1-x \leq x+1, \\ 1-x, & \text{если } x+1 < 1-x \end{cases} \quad =$$

$$= \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq 0, \\ 1-x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График функции f приведен на рис. 2.12.

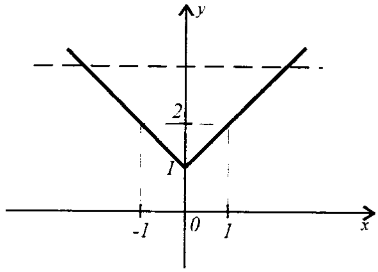


Рис. 2.12

Имеем $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [1, +\infty)$. Любая прямая $y = m$, $m \in$ $\in (1, +\infty)$, параллельная оси абсцисс, пересекает график функции в двух точках и потому f не является инъективной. Прямая $y = 1/2 \in [0, +\infty)$ не пересекает график функции f, поэтому f не является сюръективной.

11. Установить, какие из следующих отношений являются отображениями; какие отображения являются инъективными, сюръективными и биективными?

а) $\varphi = \{(x, y) \in |\mathbb{N}^2| x - y = 3\}$;

б) $f = \{(x, y) \in [-1; 0] \times [-1; 1] | x^2 + y^2 = 1\}$;

в) $g = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) | y = x^2\}$;

г) $\psi = \{(x, y) \in [0, +\infty)^2 | y = x^2\}$.

Для биективных отображений указать их обратные отображения.

Решение. а) $(x, y) \in \varphi \Leftrightarrow x - y = 3 \Leftrightarrow x = y + 3$. Так как

$$D(\varphi) = \delta_\varphi = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} \colon x = y + 3\} \neq \mathbb{N}$$

(уравнение $2 = y + 3$ не имеет решений в $\mathbb{N}$), то φ не является функциональным отношением.

б) $(x, y) \in f \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Так как $D(f) = \delta_f =$ $= [-1; 0]$, а

$$\left.\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1, \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in f, \\ &\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in f \end{aligned}\right.$$

где $\sqrt{3}/2 \neq -\sqrt{3}/2$, то следует, что и f не является функциональным отношением.

в) Имеем $(x, y) \in g \Leftrightarrow xgy \Leftrightarrow y = g(x) = x^2$. Тогда:

1) $x \in [0, +\infty) \Rightarrow y = x^2 \in I\!R \Rightarrow (x, x^2) \in g$;

2) $(xgy_1 \wedge xgy_2) \Rightarrow y_1 = x^2 = y_2$;

3) $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$, так как $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$;

4) уравнение $g(x) = r \in I\!R$ разрешимо в $[0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда $r \geq 0$, а это показывает, что g не сюръективно (число -2, например, не имеет прообраза в $[0, +\infty)$).

г) Имеем $(x, y) \in \psi \Leftrightarrow x\psi y \Leftrightarrow y = \psi(x) = x^2$. Повторяя рассуждения, приведенные в в), устанавливаем, что ψ является инъективной. Более того, уравнение $\psi(x) = r \in [0, +\infty)$ имеет решение $x = \sqrt{r} \in [0, +\infty)$ и потому ψ является сюръективным отображением. Таким образом, ψ является биективным отображением, но тогда, в силу теоремы 6, отображение ψ^{-1} также является отображением (функцией).

И в силу той же теоремы 6 имеем

$$\psi^{-1}(x) = \sqrt{x}, \ x \in [0, +\infty).$$

12. Пусть $\{A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $\varphi \in F(A)$ задана при помощи таблицы

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(x)$	2	2	1	3	4	5	3	2	1

а) Найти $\varphi(\{2, 3, 5\})$; $\varphi(\{1, 3, 7, 9\})$; $\mathcal{I}m\varphi$.

б) Найти $\varphi^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$; $\varphi^{-1}(\{2, 3\})$; $\varphi^{-1}(\{7, 8, 9\})$.

в) Вычислить $\varphi^{-1}(1)$; $\varphi^{-1}(4)$; $\varphi^{-4}(7)$.

Решение. а) $\varphi(\{2, 3, 5\}) = \{\varphi(2), \varphi(3), \varphi(5)\} = \{2, 1, 4\}$;
$\varphi(\{1, 3, 7, 9\}) = \{\varphi(1), \varphi(3), \varphi(7), \varphi(9)\} = \{2, 1, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$;
$$\mathcal{I}m\varphi = \varphi(A) = \{\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6), \varphi(7), \varphi(8), \varphi(9)\} = \\ = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

б) $\varphi^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{y \in A | \varphi(y) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = A$;
$\varphi^{-1}(\{2, 3\}) = \{a \in A | \varphi(a) \in \{2, 3\}\} = \{1, 2, 4, 7, 8\}$;
$\varphi^{-1}(\{7, 8, 9\}) = \{b \in A | \varphi(b) \in \{7, 8, 9\}\} = \varnothing$.

в) $\varphi^{-1}(1) = \{a \in A | \varphi(a) = 1\} = \{3, 9\}$;
$\varphi^{-1}(4) = \{b \in A | \varphi(b) = 4\} = \{5\}$;

$\varphi^{-1}(7) = \{c \in A | \varphi(c) = 7\} = \varnothing.$

13. Пусть $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{a,b,c\}$. Рассматриваем отношения

$$\alpha = \{(1,a),(2,b),(3,a),(3,c)\}, \beta = \{(1,b),(2,a),(3,c)\},$$
$$\gamma = \{(2,a),(3,c),(1,c)\}.$$

а) Найти $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$ и $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$.

б) Какие из отношений α, β и γ являются отображениями? Укажите вид отображения.

в) Найти отношения α^{-1}, β^{-1} и γ^{-1}. Какие из них являются функциями?

г) Найти отношения $\alpha\circ\beta^{-1}$, $\beta\circ\alpha^{-1}$, $\alpha\circ\gamma^{-1}$, $\gamma\circ\alpha^{-1}$, $\beta\circ\gamma^{-1}$ и $\gamma\circ\beta^{-1}$. Какие из них являются отображениями?

Решение. а) $\delta_\alpha = \{1,2,3\} = A = \delta_\beta = \delta_\gamma$; $\rho_\alpha = \{a,b,c\} = B = \rho_\beta$; $\rho_\gamma = \{a,c\}$.

б) α не является отображением, так как элемент 3 имеет два образа a и c. β является биективным отображением, γ является отображением, но не инъективным (элементы $3 \neq 1$ имеют один и тот же образ c), ни сюръективным (b не имеет прообраза).

в) $\alpha^{-1} = \{(a,1),(b,2),(a,3),(c,3)\}$, $\beta^{-1} = \{(b,1),(a,2),(c,3)\}$, $\gamma^{-1} = \{(a,2),(c,3),(c,1)\}$.

Имеем $\delta_{\alpha^{-1}} = B = \delta_{\beta^{-1}}$, $\delta_{\gamma^{-1}} = \{a,c\} \neq B$, $\rho_{\alpha^{-1}} = A = \rho_{\beta^{-1}} = \rho_{\gamma^{-1}}$. α^{-1} не является отображением, так как элемент a имеет два образа 1 и 3; β^{-1} является биективным отображением; γ^{-1} не является отображением, так как $\delta_{\gamma^{-1}} \neq B$ (элемент b не имеет образа);

г) $\alpha \circ \beta^{-1} = \{(1,2),(2,1),(3,2),(3,3)\}$;
$\beta \circ \alpha^{-1} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,3)\}$;
$\alpha \circ \gamma^{-1} = \{(1,2),(3,2),(3,3),(3,1)\}$;
$\gamma \circ \alpha^{-1} = \{(2,1),(3,3),(1,3),(2,3)\}$;
$\beta \circ \gamma^{-1} = \{(2,2),(3,3),(3,1)\}$;
$\gamma \circ \beta^{-1} = \{(2,2),(3,3),(1,3)\}$.

Отображением является только отношение $\gamma \circ \beta^{-1}$, но ни инъективным, ни сюръективным.

14. Даны функции: $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{если } x \leq 2, \\ x - 1, & \text{если } x > 2, \end{cases} \qquad g(x) = \max(x-1, 3-x).$$

Показать, что $f = g$.

Решение. Функции f и g определены на $\mathbb{R}$ и имеют значения в $\mathbb{R}$. Покажем, что $f(x) = g(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Распишем функцию g:

$$g(x)=\begin{cases} 3-x, & \text{если } x-1 \le 3-x, \\ x-1, & \text{если } 3-x < x-1 \end{cases} = \begin{cases} 3-x, & \text{если } x \le 2, \\ x-1, & \text{если } x > 2 \end{cases} = f(x)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f = g$.

15. Даны функции $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x \le 2, \\ \dfrac{x+10}{3}, & \text{если } x > 2, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x-2, & \text{если } x < 3, \\ 2x-5, & \text{если } x \ge 3. \end{cases}$$

а) Показать, что f и g являются биективными функциями.

б) Построить графики функций f и f^{-1} в одну и ту же систему координат.

в) Найти функции: $s = f + g$, $d = f - g$, $p = f \cdot g$, $q = f/g$.

г) Является ли функция d биективной?

Решение. а), б) На рис. 2.13 график функции f изображен прямой линией, а график функции f^{-1} – пунктирной.

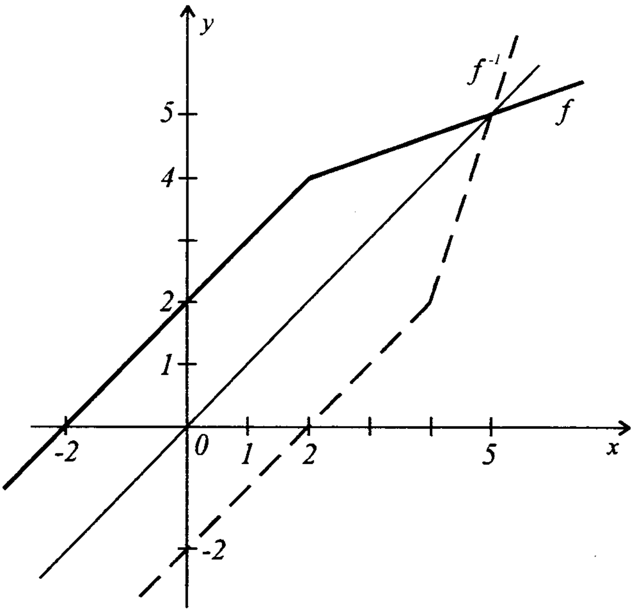


Рис. 2.13

Имеем $g^{-1}, f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2, \text{ если } x \le 4, \\ 3x-10, \text{ если } x > 4; \end{cases} \qquad g^{-1}(x)=\begin{cases} x+2, \text{ если } x < 1, \\ \frac{1}{2}(x+5), \text{ если } x \ge 1. \end{cases}$$

д) Составим следующую таблицу:

x	$(-\infty, 2]$	(2,3)	$[3, +\infty)$
f	$x+2$	$(x+10)/3$	$(x+10)/3$
g	$x-2$	$x-2$	$2x-5$
$f+g$	$2x$	$4(x+1)/3$	$(7x-5)/3$
$f-g$	4	$(16-2x)/3$	$(25-5x)/3$
$f\cdot g$	x^2-4	$(x^2+8x-20)/3$	$(2x^2+15x-50)/3$
f/g	$\frac{x+2}{x-2}$, $x \neq 2$	$\frac{x+10}{3(x-2)}$	$\frac{x+10}{3(2x-5)}$

Имеем

$$s(x)=\begin{cases} 2x, \text{ если } x \le 2, \\ \frac{4}{3}(x+1), \text{ если } 2 < x < 3, \\ \frac{1}{3}(7x-5), \text{ если } x \ge 3. \end{cases}$$

$$d(x)=\begin{cases} 4, \text{ если } x \le 2, \\ \frac{2}{3}(8-x), \text{ если } 2 < x < 3, \\ \frac{5}{3}(5-x), \text{ если } x \ge 3. \end{cases}$$

$$p(x)=\begin{cases} x^2-4, \text{ если } x \le 2, \\ \frac{1}{3}(x^2+8x-20), \text{ если } 2 < x < 3, \\ \frac{1}{3}(2x^2+15x-50), \text{ если } x \ge 3. \end{cases}$$

$$q(x)=\begin{cases} \frac{x+2}{x-2}, \text{ если } x \le 2, \\ \frac{x+10}{3(x-2)}, \text{ если } 2 < x < 3, \\ \frac{x+10}{3(2x-5)}, \text{ если } x \ge 3. \end{cases}$$

е) Имеем $d(x) = 4$, $(\forall)\, x \in (-\infty, 2]$, и потому d не является инъективным, т.е. d не является биективным. Это доказывает, что разность (сумма) двух биективных функций не обязана быть биективной функцией.

16. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-d/c\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{a/c\}$,
$f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, $ad-bc \neq 0$, $c \neq 0$.

а) Показать, что функция f обратима.

б) Найти f^{-1}.

в) В каком случае $f = f^{-1}$?

Решение. а) 1) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{ax_1+b}{cx_1+d} = \dfrac{ax_2+b}{cx_2+d} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow acx_1x_2 + adx_1 + bcx_2 + bd = acx_1x_2 + bcx_1 + adx_2 + bd \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow adx_1 + bcx_2 = adx_2 + bcx_1 \Leftrightarrow ad(x_1-x_2) - bc(x_1-x_2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (ad-bc)(x_1-x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ является инъективной.
2) Пусть $r \in \mathbb{R}\setminus\{a/c\}$. Рассмотрим уравнение $f(x) = r$. Тогда

$$f(x) = r \Leftrightarrow (ax+b)/(cx+d) = r \Leftrightarrow ax+b = crx+dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-cr)x = dr-b \overset{r\neq\frac{a}{c}}{\Longleftrightarrow} x = (dr-b)/(a-cr).$$

Если $x = (dr-b)/(a-cr) = -d/c \Leftrightarrow cdr-bc = -ad+cdr \Leftrightarrow ad-bc = 0$, что невозможно. Следовательно, $(dr-b)/(a-cr) \in \mathbb{R}\setminus\{-d/c\}$, а это показывает, что уравнение $f(x) = r$ имеет решения в $\mathbb{R}\setminus\{-d/c\}$ для любого $r \in \mathbb{R}\setminus\{a/c\}$. А это в свою очередь показывает, что f является сюръективной.

Из 1) – 2) следует, что f является биективной функцией, а значит, и обратимой.

б) Находим $f^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{a/c\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{-d/c\}$:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow (cf(x)-a)x = b - df(x) \overset{f(x)\neq\frac{a}{c}}{\Longleftrightarrow} x = \frac{-df(x)+b}{cf(x)-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

в) Для того чтобы $f = f^{-1}$, необходимо, чтобы функции f и f^{-1} имели ту же самую область определения, и потому $d = -a$. Это условие является и достаточным для обеспечения равенства f и f^{-1}. Действительно, если $d = -a$, то функции f и f^{-1} определены на $\mathbb{R}\setminus\{a/c\}$, принимают значения в $\mathbb{R}\setminus\{a/c\}$ и $f^{-1}(x) = (ax+b)/(cx+d) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}\setminus\{a/c\}$, т.е. $f^{-1} = f$.

17. Представить функцию $f(x) = \sqrt{5x^2-2x+8}$ в виде композиции двух функций.

Решение. Положим $u(x) = x^2 - 2x + 8$ а $v(x) = \sqrt{x}$. Тогда $f(x) = \sqrt{5x^2-2x+8} = v(5x^2-2x+8) = v(u(x)) = (v\circ u)(x)$.

Ответ: $f(x) = (v\circ u)(x)$, где $u(x) = 5x^2-2x+8$, $v(x) = \sqrt{x}$.

18. Вычислить $f\circ g$, $g\circ f$, $(f\circ g)(4)$ и $(g\circ f)(4)$, где:

а) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ и $g(x) = \sqrt{x}$;

б) $f(x) = \sqrt{x+3}$ и $g(x) = x^2 - 4$;

в) $f(x) = \begin{cases} x^2+6x, & \text{если } x < -3, \\ -2x-5, & \text{если } x \geq -3 \end{cases}$ и $g(x) = \begin{cases} 5x-2, & \text{если } x \leq 1, \\ x^2-2x+4, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Укажите $D(f \circ g)$ и $D(g \circ f)$.

Решение. а) Имеем $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \dfrac{3}{\sqrt{x}-1}$;

$$(f \circ g)(4) = \frac{3}{\sqrt{4}-1} = 3;\ D(f \circ g) = [0;1) \cup (1,+\infty).$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{3}{x-1}};\ (g \circ f)(4) = \sqrt{\frac{3}{4-1}} = 1;$$

$$D(g \circ f) = (1,+\infty).$$

Следовательно, $(g \circ f)(4) \neq (f \circ g)(4)$, а это показывает, что в общем случае операция $(\circ)$, композиция двух функций, не является коммутативной.

б) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x^2-4)+3} = \sqrt{x^2-1}$;

$$x \in D(f \circ g) \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) = D(f \circ g).$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+3}) = (\sqrt{x+3})^2 - 4 = x - 1;\ D(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

$$(f \circ g)(4) = \sqrt{4^2-1} = \sqrt{15},\ (g \circ f)(4) = 4 - 1 = 3.$$

в) Для нахождения функции $f \circ g$ и $g \circ f$ поступаем следующим образом:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) + 6g(x), & \text{если } g(x) < -3, \\ -2g(x) - 5, & \text{если } g(x) \geq -3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g^2(x) + 6g(x), & \text{если } g(x) < -3, \\ -2g(x) - 5, & \text{если } g(x) \geq -3 \text{ и } x \leq 1, \\ -2(x^2-2x+4) - 5, & \text{если } g(x) \geq -3 \text{ и } x > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (5x-2)^2 + 6(5x-2), & \text{если } 5x - 2 < -3, \\ -2(5x-2) - 5, & \text{если } 5x - 2 \geq -3 \text{ и } x \leq 1, \\ -2(x^2-2x+4) - 5, & \text{если } 5x - 2 \geq -3 \text{ и } x > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 25x^2 + 10x - 8, & \text{если } x < -1/5, \\ -10x - 1, & \text{если } -1/5 \leq x \leq 1, \\ -2x^2 + 4x - 13, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$(f \circ g)(4) = -2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 13 = -29.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 5f(x) - 2, & \text{если } f(x) \leq 1, \\ f^2(x) - 2f(x) + 4, & \text{если } f(x) > 1. \end{cases}$$

Замечаем, что

$$f(x)\le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+6x\le 1,\\ x<3\end{cases}\\ \begin{cases}-2x-5\le 1,\\ x\ge -3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-3-\sqrt{10},-3+\sqrt{10}],\\ x<-3\end{cases}\\ \begin{cases}-2x\le 6,\\ x\ge -3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-3-\sqrt{10};-3),\\ x\ge -3\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-3-\sqrt{10};-3)\cup[-3,+\infty).$$

Следовательно, для $f(x)\le 1$ получаем

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}5(x^2+6x)-2, \text{ если } x\in[-3-\sqrt{10},-3)\\ 5(-2x-5)-2, \text{ если } x\in[-3,+\infty).\end{cases}$$

Аналогично,

$$f(x)>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+6x>1,\\ x<-3\end{cases}\\ \begin{cases}-2x-5>1,\\ x\ge -3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x\in(-\infty,-3-\sqrt{10}),\\ x\in\varnothing\end{cases}\right.$$

и потому для $f(x)>1$ получаем
$(g\circ f)(x)=(x^2+6x)^2-2(x^2+6x)+4=x^4+12x^3+34x^2-12x+4$
для $x\in(-\infty,-3-\sqrt{10})$.

Подводя итог, имеем

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^4+12x^3+34x^2-12x+4, \text{ если } x\in(-\infty,-3-\sqrt{10}),\\ 5x^2+30x-2, \text{ если } x\in[-3-\sqrt{10},-3),\\ -10x-7, \text{ если } x\ge -3.\end{cases}$$

$$(g\circ f)(4)=-10\cdot 4-27=-67.$$

19. Решить уравнения:

а) $(g\circ f\circ f)(x)=(f\circ g\circ g)(x)$, если $f(x)=3x+1$, $g(x)=x+3$;

б) $(f\circ f\circ f)(x)=x$, если $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+a}$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-a\}$;

в) $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$, если $f(x)=2x^2-1$, $g(x)=4x^3-3x$.

Решение. а) Находим функции $(g\circ f\circ f)(x)$ и $(f\circ g\circ g)(x)$:

$$(g\circ f\circ f)(x)=g(f(f(x)))=g(f(3x+1))=g(3(3x+1)+1)=$$
$$=g(9x+4)=9x+4+3=9x+7;$$
$$(f\circ g\circ g)(x)=f(g(g(x)))=f(g(x+3))=f((x+3)+3)=$$
$$=f(x+6)=3(x+6)+1=3x+19.$$

Уравнение принимает вид

$$9x+7=3x+19 \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: $x=2$.

б) Вычислим $(f\circ f\circ f)(x)$:

$$(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))=f\left(f\left(\frac{ax+1}{x+a}\right)\right)=$$

$$= f\left(\frac{a\cdot\dfrac{ax+1}{x+a}+1}{\dfrac{ax+1}{x+a}+a}\right) = f\left(\frac{ax^2+x+2a}{2ax+1+a^2}\right) =$$

$$= \frac{a\cdot\dfrac{a^2x+x+2a}{2ax+1+a^2}+1}{\dfrac{a^2x+x+2a}{2ax+1+a^2}+a} = \frac{a^3x+3ax+3a^2+1}{3a^2x+x+3a+a^3} =$$

$$= ((a^3+3a)x+(3a^2+1))/((3a^2+1)x+(a^3+3a)).$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{(a^3+3a)x+(3a^2+1)}{(3a^2+1)x+(a^3+3a)} = x \Leftrightarrow (3a^2+1)x^2 = 3a^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{-1, 1\}$.

в) Находим $(f\circ g)(x)$ и $(g\circ f)(x)$:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x^3-3x) = 2(4x^3-3x)^2-1 =$$
$$= 32x^6-48x^4+18x^2-1.$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2-1) = 4(2x^2-1)^3-3(2x^2-1) =$$
$$= 4(8x^6-12x^4+6x^2-1)-6x^2+3 = 32x^6-48x^4+18x^2-1.$$

Уравнение принимает вид

$$32x^6-48x^4+18x^2-1 = 32x^6-48x^4+18x^2-1 \Leftrightarrow 0=0,$$

т.е. равенство верно для любого $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $x \in \mathbb{R}$.

20. Пусть $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ заданы следующим образом: $f(x) = x^2+x+12$, а $g(x) = x^2-x+2$. Показать, что не существует ни одной функции $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$(\varphi\circ f)(x) + (\varphi\circ g)(x) = (g\circ f)(x),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}. \qquad (A)$$

Решение. Соотношение (A) можно записать еще в виде

$$\varphi(x^2+x+2)+\varphi(x^2-x+2) = (x^2+x+2)^2-(x^2+x+2)+2. \quad (A')$$

Допустим, что существует функция $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет соотношению (A'). Положим в (A') $x=1$ и $x=-1$. Получаем

$$\varphi(4)+\varphi(2) = 14, \quad \varphi(2)+\varphi(4) = 4,$$

откуда следует, что $\varphi(4)+\varphi(2) \neq \varphi(2)+\varphi(4)$, а это противоречит предположению. Следовательно, не существует функция

φ со свойствами, указанными в формулировке задачи.

21. Найти все значения параметров $a, b \in \mathbb{R}$, при которых $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, где $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x^2 + ax + b$.

Решение. Находим $f \circ g$ и $g \circ f$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + ax + b) = (x^2 + ax + b)^2 - (x^2 + ax + b) =$$
$$= x^4 + 2ax^3 + (2b - 1)x^2 + a^2x^2 + b^2 - ax - b + 2abx =$$
$$= x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b - 1)x^2 + (2ab - a)x + b^2 - b.$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 + a(x^2 - x) + b =$$
$$= x^4 - 2x^3 + (a + 1)x^2 - ax + b.$$

Тогда

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x),\ (\forall)\ x \in R \Leftrightarrow x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b - 1)x^2 +$$
$$+ (2ab - a)x + b^2 - b = x^4 - 2x^3 + (a + 1)x^2 - ax + b \Leftrightarrow$$
$$\overset{(\forall)x\in \boldsymbol{R}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2a = -2, \\ a^2 + 2b - 1 = a + 1, \\ 2ab - a = -a, \\ b = b^2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 0. \end{cases}$$

Ответ: $a = -1$, $b = 0$, $g(x) = x^2 - x = f(x)$.

22. Заданы функции $f, g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3,\ g(x) = x^3 + x + 3 \text{ и } h(x) = x^3 + 8.$$

Показать, что:

а) f не является инъективной;

б) g является инъективной;

в) h является биективной и найти h^{-1}.

Решение. а) Пусть $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда

$$x_1^4 + 4x_1^3 + 3 = x_2^4 + 4x_2^3 + 3 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 - x_2)\times$$
$$\times(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \not\Rightarrow x_1 = x_2.$$

Например, $f(x) = x^3(x + 4) + 3$, полагая $x_1 = 0$ и $x_2 = -4$, получаем $f(0) = f(-4) = 3$, $x_1 \neq x_2$.

б) $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 + x_1 + 3 = x_2^3 + x_2 + 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

так как $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 > 0$, $(\forall)\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

в) $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 + 8 = x_2^3 + 8 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, т.е. h является инъективной функцией.

Докажем, что h является сюръективной. Пусть $r \in \mathbb{R}$. Решим уравнение $h(x) = r \Leftrightarrow x^3 + 8 = r \Leftrightarrow x^3 = r - 8 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{r - 8}$ (корень нечетной степени существует для любого действительного числа). Следовательно, h является сюръективной, а значит, h является биективной функцией.

Находим h^{-1}:

$$(y,x) \in G_{h^{-1}} \Leftrightarrow (x,y) \in G_h \Leftrightarrow h(x) = y = x^3 + 8 \Leftrightarrow x^3 = y - 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-8} \Leftrightarrow h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8}.$$

23. Пусть $f\colon [1,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$, где

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1.$$

а) Доказать, что f является биективной функцией.

б) Найти f^{-1}.

Решение. а) Имеем $f(x) = (x^2 - x + 1)^3$. Представим эту функцию в виде композиции двух функций:

$$u, v\colon [1,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty), \text{ где } u(x) = x^3,\ v(x) = x^2 - x + 1.$$

Тогда $f(x) = (u \circ v)(x)$, откуда следует, что $f = u \circ v$ является биективной функцией, так как является композицией двух таких функций.

б) $f^{-1} = (u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$. Находим v^{-1} и u^{-1}.

$$u^{-1}\colon [1,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty),\quad u^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Далее, $v(x) = x^2 - x + 1 = y \Rightarrow x^2 - x + 1 - y = 0$. Решим это уравнение относительно $x \in [1,+\infty)$. Дискриминант уравнения имеет вид

$$D = 1 - 4(1-y) = 4y - 3, \text{ а } x_{1,2} = (1 \mp \sqrt{4y-3})/2$$
$$(y \geq 1 \Leftrightarrow 4y - 3 \geq 0!).$$

Уравнение имеет единственный корень в $[1,+\infty)$:

$$x = (1 + \sqrt{4y-3})/2.$$

Тогда

$$v^{-1}(x) = (1 + \sqrt{4x-3})/2.$$

Итак,

$$f^{-1}(x) = (v^{-1} \circ u^{-1})(x) = v^{-1}(u^{-1}(x)) = v^{-1}(\sqrt[3]{x}) =$$
$$= (1 + \sqrt{4\sqrt[3]{x} - 3})/2, \text{ где } f^{-1}\colon [1,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty).$$

24. Рассматривается функция $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $(\forall)\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

2) $f(1) = 1$;

3) $f(1/x) = 1/x^2 \cdot f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^*$.

а) Найти функцию f.

б) Вычислить $f(\sqrt{1998})$.

Решение. а) Для $x_2 = 0$ из 1) следует $f(x_1) = f(x_1) + f(0)$, а это влечет $f(0) = 0$. Для $x_2 = -x_1$ из 1) получаем

$$f(0)=f(x_1)+f(-x_1)=0 \Rightarrow f(-x_1)=-f(x_1) \Rightarrow f(x_2)= \\ =-f(-x_2) \Rightarrow f(-x_2)=-f(x_2).$$

Тогда

$$f(x_1-x_2)=f(x_1+(-x_2)) \overset{1)}{=} f(x_1)+f(-x_2)=$$

$$=f(x_1)-f(x_2),\ (\forall)\ x_1,x_2\in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Пусть $x \notin \{0,1\}$. Тогда

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) \overset{3)}{=} \frac{1}{(1-x)^2}\cdot f(1-x) \overset{(1)}{=} \frac{f(1)-f(x)}{(1-x)^2}. \tag{2}$$

С другой стороны, $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1-x+x}{1-x}=1+\dfrac{x}{1-x}$ влечет

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=f\left(1+\frac{x}{1-x}\right) \overset{1)}{=} f(1)+f\left(\frac{x}{1-x}\right)=1+f\left(\frac{x}{1-x}\right)=$$

$$\overset{3)}{=} 1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\cdot f\left(\frac{1-x}{x}\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\cdot\left[f\left(\frac{1}{x}-1\right)\right]=$$

$$\overset{1)}{=} 1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\cdot\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-f(1)\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot f(x)-1\right)=$$

$$=1+\frac{1}{(1-x)^2}\cdot f(x)-\frac{x^2}{(1-x)^2}=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует

$$\frac{f(1)-f(x)}{(1-x)^2}=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2} \Leftrightarrow f(x)=x.$$

Таким образом, $f(x)=x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

б) $f(\sqrt{1998})=\sqrt{1998}$.

Ответ: а) $f(x)=x$; б) $f(\sqrt{1998})=\sqrt{1998}$.

25. Используя свойства характеристической функции, доказать равенство

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\ A,B,C\in P(M).$$

Решение. Используя свойства $A=B \Leftrightarrow f_A=f_B$, докажем нужное равенство, вычисляя при помощи f_A, f_B и f_C характеристические функции множеств $A\cup(B\cap C)$ и $(A\cup B)\cap(A\cup C)$:

$$f_{A\cup(B\cap C)} \overset{6)}{=} f_A+f_{B\cap C}-f_A\cdot f_{B\cap C} \overset{4)}{=} f_A+f_B\cdot f_C-f_A(f_B\cdot f_C)= \\ =f_A+f_B\cdot f_C-f_A\cdot f_B\cdot f_C.$$

$$f_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}=f_{A\cup B}\cdot f_{A\cup C} \overset{6)}{=} (f_A+f_B-f_A\cdot f_B)(f_A+f_C-f_A\cdot f_C)=$$

$= f_A^2 + f_A \cdot f_C - f_A^2 \cdot f_C + f_B \cdot f_A + f_B \cdot f_C - f_B \cdot f_A \cdot f_C - f_A^2 \cdot f_B -$

$- f_A \cdot f_B \cdot f_C + f_A^2 \cdot f_B \cdot f_C \overset{3)}{=} f_A + f_B \cdot f_C - f_A \cdot f_B \cdot f_C = f_{A\cup(B\cap C)}$,

а это влечет $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.3. Предлагаемые задачи

1. Найти область определения и область значений для следующих отношений:

1) $\alpha = \{(2,4),(3,1),(2,-4),(0,27)\}$;

2) $\beta = \{(100,10),(200,20),(300,30),(400,40)\}$;

3) $\gamma = \{(1,5),(2,7),(3,9),(4,11)\}$;

4) $\delta = \{(1/2,5)\}$;

5) $\rho = \{(-2,-5),(-2,0),(7,-2),(9,0)\}$;

6) $\omega = \{(-1,2),(-5,-2),(0,-2),(0,9)\}$.

2. Пусть $A = \{2,4,6,8\}$ и $B = \{1,3,5,7\}$, $\alpha \subseteq A \times B$.

а) Определить график отношения α.

б) Построить схему отношения α:

1) $\alpha = \{(x,y) | x < 3 \text{ и } y > 3\}$;

2) $\alpha = \{(x,y) | x > 2 \text{ и } y < 5\}$;

3) $\alpha = \{(x,y) | x > 6 \text{ или } y > 7\}$;

4) $\alpha = \{(x,y) | \max(x,y) \le 3\}$;

5) $\alpha = \{(x,y) | \min(x,y) \le 2\}$;

6) $\alpha = \{(x,y) | \min(x,y) > 6\}$;

7) $\alpha = \{(x,y) | \min(x,5) > \max(y,3)\}$;

8) $\alpha = \{(x,y) | \max(x,6) > \max(y,5)\}$.

3. Пусть $A = \{1,2,3,4\}$ и $B = \{1,3,5,7,8\}$. Написать график отношения $\alpha \subseteq A \times B$, если:

1) $\alpha = \{(x,y) | x + y = 9\}$;

2) $\alpha = \{(x,y) | 2x - y = 1\}$;

3) $\alpha = \{(x,y) | x^2 - y^2 = 8\}$;

4) $\alpha = \{(x,y) | x - y \ge 3\}$;

5) $\alpha = \{(x,y) | y \vdots x\}$;

6) $\alpha = \{(x,y) | 4x + y = 11\}$;

7) $\alpha = \{(x,y) | (x + y) \vdots 3\}$;

8) $\alpha = \{(x,y) | x \ge y\}$.

4. Пусть $A = \{1,3,4,5\}$, $B = \{1,2,5,6\}$ и G график отношения α. Написать отношение α с помощью предложений, содержащих буквы x и y, где $x \in A$, а $y \in B$:

1) $G_\alpha = \{(1,5),(4,2),(5,1)\}$;

2) $G_\alpha = \{(1,2),(4,5),(5,6)\}$;

3) $G_\alpha = \{(1,2),(1,5),(1,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$;

4) $G_\alpha = \{(1,5),(1,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,5),(5,6)\}$;

5) $G_\alpha = \{(3,2),(4,2),(5,2)\}$;

6) $G_\alpha = \{(4,2),(4,6)\}$;

7) $G_\alpha = \{(4,1),(4,2),(4,5),(4,6),(1,6),(3,6),(5,6)\}$;

8) $G_\alpha = \{(1,1),(4,2)\}$.

5. Пусть $A = \{1,2,3,4\}$. Исследовать свойства отношения $\alpha \subseteq A^2$(вар. 1–6) и $\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ (вар. 7–14):

1) $\alpha = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;

2) $\alpha = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,4),(4,3)\}$;

3) $\alpha = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;

4) $\alpha = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;

5) $\alpha = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$;

6) $\alpha = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$;

7) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 1 \text{ и } y > 1\}$;

8) $\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}\right\}$;

9) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ или } y < 0\}$;

10) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1 \text{ или } y > 1\}$;

11) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + x = y^2 + y\}$;

12) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 3x + 2 = y^2 - 3y + 2\}$;

13) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + x = y^2 - y\}$;

14) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y^2\}$.

6. Для каждого из бинарных отношений α, определенных на множестве $\mathbb{N}$:

а) найти область определения δ_α и область значений ρ_α;

б) установить свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность);

в) найти обратное отношение α^{-1} $(x, y \in \mathbb{N})$:

1) $x\alpha y \Leftrightarrow$ НОД $(x,y)=1$; 2) $x\alpha y \Leftrightarrow y<2x$;
3) $x\alpha y \Leftrightarrow |y-x|=12$; 4) $x\alpha y \Leftrightarrow x=y^2$;
5) $x\alpha y \Leftrightarrow (x-y)\vdots 3$; 6) $x\alpha y \Leftrightarrow x\cdot y=30$;
7) $x\alpha y \Leftrightarrow y=2x+1$; 8) $x\alpha y \Leftrightarrow x<y+1$;
9) $x\alpha y \Leftrightarrow x<y-1$; 10) $x\alpha y \Leftrightarrow y=2x$;
11) $x\alpha y \Leftrightarrow y^2=x^2$; 12) $x\alpha y \Leftrightarrow x\cdot y=0$.

7. Дано множество A и бинарное отношение $\alpha \subseteq A^2$. Доказать, что α является отношением эквивалентности и найти фактор-множество A/α.

1) $A=\{1,2,3\}$, $\alpha=\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3)\}$;
2) $A=\{1,2,3,4\}$, $\alpha=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,2),(2,3)\}$;
3) $A=\{1,2,3,4\}$, $\alpha=\{(1,4),(1,1),(4,1),(1,2),(2,1),(3,3),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$;
4) $A=\{1,2,3\}$, $\alpha=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$;
5) $A=\{1,3,5,6\}$, $\alpha=\{(1,6),(6,1),(1,1),(6,6),(3,3),(5,5)\}$;
6) $A=\{1,2,3,4\}$, $\alpha=\{(1,3),(1,4),(1,1),(3,3),(3,1),(4,1),(4,4),(2,2),(3,4),(4,3)\}$;
7) $A=\mathbb{N}^2$, $(a,b)\alpha(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$;
8) $A=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$, $(a,b)\alpha(c,d) \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$;
9) $A=\{1,2,3,4,6,9\}$, $\alpha=\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(1,2),(4,4),(3,3),(2,1),(6,6),(9,9)\}$;
10) $A=\{1,2,3,5\}$, $\alpha=\{(1,3),(1,1),(3,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,3),(5,5)\}$.

8. Для заданных множества $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и семейства подмножеств $S=\{A_i\subseteq A,\ i=\overline{1,n}\}$ докажите, что S определяет разбиение на A и постройте отношение эквивалентности α_S.

1) $A_1=\{1,2,3,8,9\}$, $A_2=\{4\}$, $A_3=\{5,6,7\}$;
2) $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,4\}$, $A_3=\{5,6\}$, $A_4=\{7,8\}$, $A_5=\{9\}$;
3) $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2,3,4\}$, $A_3=\{5,6\}$, $A_4=\{7,8,9\}$;
4) $A_1=\{1\}$, $A_2=\{3,4,5\}$, $A_3=\{2,7\}$, $A_4=\{6,9\}$, $A_5=\{8\}$;
5) $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,9\}$, $A_3=\{4,8\}$, $A_4=\{5,6,7\}$;
6) $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,8,9\}$, $A_3=\{4,5,6\}$, $A_4=\{7\}$;
7) $A_1=\{1,9,7\}$, $A_2=\{2,8,6\}$, $A_3=\{3,4,5\}$;
8) $A_1=\{7,8\}$, $A_2=\{1,9\}$, $A_3=\{2,3,4,5,6\}$;
9) $A_1=\{1,8,9\}$, $A_2=\{2,7\}$, $A_3=\{4\}$, $A_4=\{5\}$, $A_5=\{3,6\}$;
10) $A_1=\{1,3,5,7,9\}$, $A_2=\{2,4,6,8\}$.

9. Определяем на $I\!R$ бинарное отношение α:

$$x\alpha y \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x = \ln^2 y - \ln y.$$

а) Показать, что α является отношением эквивалентности на $I\!R$.

б) Найти классы эквивалентности.

10. Определяем на $I\!R$ бинарное отношение β:

$$x\beta y \Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x = \sin^2 y - 2\sin y.$$

а) Показать, что β является отношением эквивалентности.

б) Найти классы эквивалентности.

11. Пусть $\alpha \subseteq A^2$, где $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и

$$x\alpha y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x - y).$$

а) Является ли α отношением эквивалентности?

б) В случае утвердительного ответа, найти классы эквивалентности.

12. Найти $\delta_\alpha, \rho_\alpha, \alpha^{-1}, \alpha \circ \alpha, \alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^{-1} \circ \alpha$, если:

1) $\alpha = \{(x, y) \in I\!N^2 | y \vdots x\}$;

2) $\alpha = \{(x, y) \in I\!N^2 | x \vdots y\}$;

3) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | x + y \leq 0\}$;

4) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | 2x \geq 3y\}$;

5) $\alpha = \{(x, y) \in [-\pi/2, -\pi/2]^2 | y \geq \sin x\}$.

13. Найти отношения $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, α^{-1}, β^{-1}, $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$, $(\beta \circ \alpha)^{-1}$:

1) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | x \geq y\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!R^2 | x \leq y\}$;

2) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | x > y\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!R^2 | x < y\}$;

3) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | x + y < 2\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!R^2 | 2x - y > 0\}$;

4) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | (x-1)^2 + y^2 > 1\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!R^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}$;

5) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | x - y$ четное$\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | x - y$ нечетное$\}$;

6) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | \, |x| = |y|\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | y = 2^x\}$;

7) $\alpha = \{(x, y) \in I\!N^2 | x \vdots y\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!N^2 | y \vdots x\}$;

8) $\alpha = \{(x, y) \in I\!N^2 | x^y = 1\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!N^2 | x \cdot y = 1\}$.

14. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Найти область определения и область значений для каждого из отношений α, β. Какие из этих отношений являются отображениями? Укажите вид отображения. Найти отношения $\alpha^{-1} \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta^{-1}$, $\beta \circ \alpha^{-1}$, $\beta \circ \beta^{-1}$. Являются ли они отображениями?

1) $\alpha = \{(1,a),(2,c),(3,c),(4,d)\}$, $\beta = \{(1,d),(2,a),(3,c),(4,b)\}$;

2) $\alpha = \{(1,a),(1,c),(2,b),(3,c),(4,d)\}$,
$\beta = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a)\}$;

3) $\alpha = \{(2,a),(3,c),(4,d),(1,b),(2,b)\}$,
$\beta = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d)\}$.

15. Рассмотрим отображение $\varphi: I\!\!R \longrightarrow I\!\!R$, $\varphi(x) = \sin x$. Найти $\varphi(I\!\!R)$, $\varphi((0,\pi))$, $\varphi^{-1}([-1,0])$, $\varphi^{-1}(1/2)$, $\varphi^{-1}([1,2])$, $\varphi^{-1}((1,2])$.

16. Отображение φ: $A \longrightarrow B$, где $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f\}$, задано таблицей

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(x)$	a	d	b	f	b	c	b	d	e

Найти $\varphi(A)$, $\varphi(\{2,3,5\})$, $\varphi(\{5,6,7,8\})$, $\varphi(\{1,3,7,9\})$, $\varphi^{-1}(\{b,f,c\})$, $\varphi^{-1}(\{e,c\})$, $\varphi^{-1}(d)$.

17. Рассмотрим отображение φ: $I\!\!R \longrightarrow \mathbf{Z}$, $\varphi(x) = [x]$ ($[x]$, целая часть x). Найти $\varphi(\{2,4,6,7\})$, $\varphi((1,5))$, $\varphi([-2.5;2])$, $\varphi^{-1}(\{2,4,5\})$ и $\varphi^{-1}(-1)$.

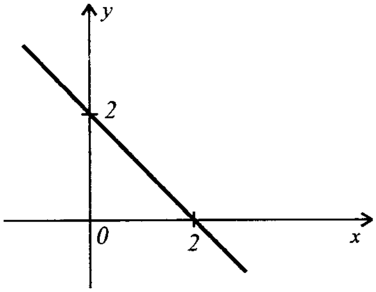
18. Дано отображение φ: $I\!\!N \longrightarrow I\!\!N$, $\varphi(x) = x^2$. Найти $\varphi(A)$ и $\varphi^{-1}(A)$, если $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

19. Пусть A и B – два конечных множества, $|A| = m, |B| = n$. Сколько сюръективных отображений φ: $A \longrightarrow B$ существует, если

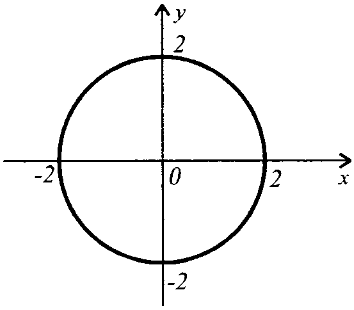
1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $m = 4,\ n = 3$; 4) $m = 5,\ n = 3$;
5) $m = 5,\ n = 4$; 6) $m = n = 5$?

20. Отношение α задано своим графиком. Установить, является ли α функцией. Найти δ_α и ρ_α. Варьируя δ_α и ρ_α, сделать так, чтобы α стало инъективным, сюръективным и биективным отображением. Построить график отношения α^{-1}. Является ли отношение α^{-1} функцией? Укажите ее вид.

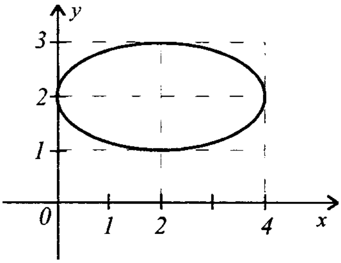
1) α: $x + y = 2$



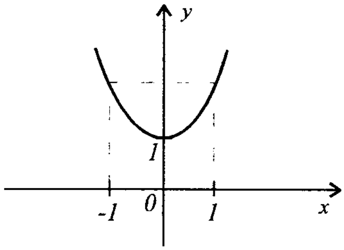
2) α: $x^2 + y^2 = 4$



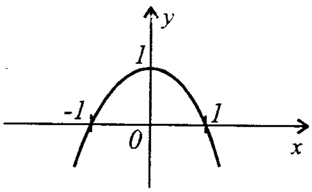
3) α: $(x-2)^2/4 + (y-2)^2 = 1$



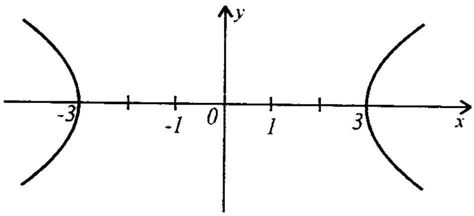
4) α: $y = x^2 + 1$



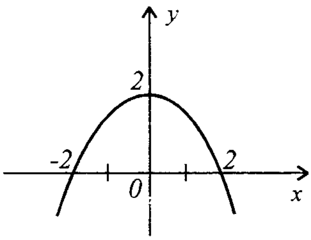
5) α: $y = -x^2 + 1$



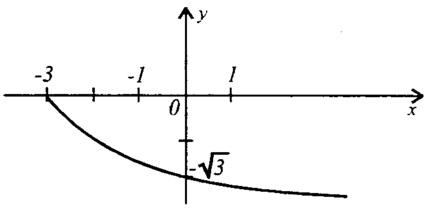
6) α: $x^2 - y^2 = 9$



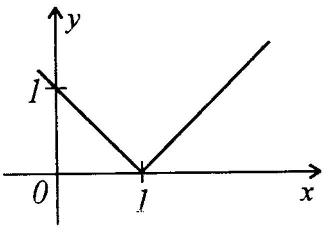
7) α: $y = 4 - x^2$



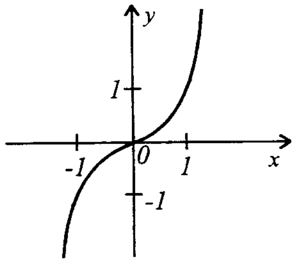
8) α: $y = -\sqrt{x+3}$



9) α: $y = |x-1|$



10) α: $y = x^3$



21. Пусть $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{0,1,5,6\}$ и $C = \{7,8,9\}$.

а) Нарисовать диаграммы двух инъективных и двух неинъективных функций, определенных на C со значениями в B.

б) Нарисовать диаграммы двух сюръективных и двух несюръективных отображений, определенных на C со значениями в B.

в) Нарисовать диаграммы двух биективных и двух небиективных функций, определенных на A со значениями в B.

22. Пусть $A = \{1,3,5,6\}$, $B = \{0,1,2,3,5\}$, $x \in A$, $y \in B$. Какое из соотношений, приведенных ниже, является функцией, определенной на A со значениями в B? Какое является функцией, определенной на B со значениями в A? Для функций укажите их вид:

1) α: $x + y = 6$; 2) α: $y = x + 1$; 3) α: $x = y$;

4) α: $y = x^2$; 5) α: $y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$;

6) α: $y^5 - 11y^4 + 41y^3 - 61y^2 + 30y - x + 1 = 0$.

23. Используя график функции f: $A \longrightarrow B$, определите, является ли функция f инъективной, сюръективной, биективной. В случае биективности функции f найти функцию f^{-1} и построить графики функций f и f^{-1} в одной и той же системе координат.

1) f: $(-2;0) \cup [2,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $f(x) = |x|$;

2) f: $I\!R \longrightarrow [2,+\infty)$, $f(x) = |x| + |x-2|$;

3) f: $[-2,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $f(x) = \begin{cases} -x/2, & -2 \le x \le 0, \\ x+1, & x > 0; \end{cases}$

4) f: $I\!R \longrightarrow [0,+\infty)$, $f(x) = \begin{cases} |x^2-1|, & x \le 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$

5) $f\colon \{0,1,3\} \longrightarrow \{-2,0,4\}$, $f(x) = 2x - 2$;

6) $f\colon \{-3,0,2\} \longrightarrow \{1, 11/5, 3, 4\}$, $f(x) = 0.2(2x + 11)$.

24. Какие из следующих отношений $\alpha \subseteq I\!R^2$ являются функциями? Укажите область определения функций. Установить вид функции.

1) α: $2y - 3x = 19$; 2) α: $x \cdot y = 9$; 3) α: $3x - 7 + 5y = 0$;

4) α: $2x^2+3y-6=0$; 5) α: $y = \sqrt{x-2}$; 6) α: $xy-2y+5x-7=0$;

7) α: $x^2 - (y-2)^2 = 0$; 8) α: $3(4-5x) + 4(y+5) = 1$;

9) α: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$; 10) α: $x^2 - y + 7x = 3$;

11) α: $4x - 2y = 9x + y$; 12) α: $y^2 + xy + 1 = 0$;

13) α: $x^2+y^2 = 16$; 14) α: $y = x^2 - 3x + 1$; 15) α: $2xy = y^2 + 5$.

25. Отношение α задано посредством $\delta_\alpha = [-3;5]$ и $\rho_\alpha = [-4;7]$.

а) Принадлежит ли отношению α пара $(-4,5)$? Почему?

б) Укажите все упорядоченные пары $(x,y) \in \alpha$, где $x = 0$. Объясните.

26. Для данной функции $f(x)$ вычислить ее значения в указанных точках.

1) $f(x) = -7$; $f(4)$, $f(-3)$, $f(c)$, $c \in I\!R$;

2) $f(x) = |x^3 - 2x|$; $f(5)$, $f(-2)$, $f(-7)$, $f(1,4)$;

3) $f(x) = x^4 - x^3 - x - 3$; $f(0)$, $f(-1)$, $f(2+c)$;

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & \text{если } x > 0, \\ 2x + 3, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$ $f(-2)$, $f(0)$, $f(5)$;

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x > 0, \\ -4, & \text{если } x = 0, \\ 1 - 2x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$ $f(5)$, $f(-1)$, $f(1/2)$;

6) $f(x) = x^2 - 5x + 2$; $(f(1+c) - f(1))/c$, $c \in I\!R^*$.

27. Найти $D(f)$, если:

1) $f(x) = (2x+3)/(|x-4|)$; 2) $f(x) = \sqrt{|2x+1|}$;

3) $f(x) = 5/(x^2 + x + 1)$; 4) $f(x) = 3 - 2/(5 - x)$;

5) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 + 13x - 5}$; 6) $f(x) = (4x)/(9 - 4x^2)$;

7) $f(x) = (5x)/(\sqrt{4 - 3x})$; 8) $f(x) = \pi$;

9) $f(x) = (5x)/(x^2 - 2x - 15)$.

28. Для заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ найдите функции $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ и f/g. Укажите их области определения.

1) $f(x)=\sqrt{x-5}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$; 2) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$, $g(x)=2x+1$;
3) $f(x)=x-5$, $g(x)=x^2+1$; 4) $f(x)=x-3$, $g(x)=2/x$;
5) $f(x)=x^2-4$, $g(x)=1-x^2$; 6) $f(x)=3/x$. $g(x)=4/x$;
7) $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2-5x+6$; 8) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $g(x)=x$;
9) $f(x)=5$, $g(x)=-3$; 10) $f(x)=1-x^2$, $g(x)=4x$.

29. Представьте функцию $f(x)$ в виде композиции некоторых функций:

1) $f(x)=7(4x-9)^5+4$; 2) $f(x)=(x^2+3x)^{\frac{2}{3}}+(x^2+3x)^{\frac{1}{3}}-7$;
3) $f(x)=1/\sqrt{x^2-3}$; 4) $f(x)=4(x^2-3)^6-7$;
5) $f(x)=-2(x+5)^4+10$; 6) $f(x)=(2x-3)^2-(2x-3)+1$;
7) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$; 8) $f(x)=(x-1)^{\frac{4}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}-4$;
9) $f(x)=(3x+5)^{\frac{2}{3}}+3(3x+5)^{\frac{1}{3}}+7$; 10) $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt[3]{5-3x}}$.

30. Для заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ найдите функции $f\circ g$ и $g\circ f$. Вычислить $(f\circ g)(3)$ и $(g\circ f)(3)$ в вариантах 1) – 6) и $(f\circ g)(-1)$ и $(g\circ f)(-1)$ в вариантах 7) – 12).

1) $f(x)=x+2$, $g(x)=x-1$; 2) $f(x)=x^2+8$, $g(x)=x-3$;
3) $f(x)=g(x)=x$; 4) $f(x)=x^2-1$, $g(x)=x+1$;
5) $f(x)=2x^2+1$, $g(x)=x^2-1$; 6) $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$;
7) $f(x)=x^2+2x+1$, $g(x)=-2x^2-1$; 8) $f(x)=3x^2+2$, $g(x)=x-3$;
9) $f(x)=2x^4+4x^3+1$, $g(x)=x^2+1$; 10) $f(x)=x-8$, $g(x)=|x|$;
11) $f(x)=|x+1|=g(x)$; 12) $f(x)=x-1$, $g(x)=x+1$.

31. Для заданных функций $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ и $h(x)=x-1$, вычислить:

1) $(f\circ g)(1)$; 2) $(g\circ f)(1)$; 3) $(h\circ f)(3)$;
4) $(f\circ h)(3)$; 5) $(g\circ f)(-2)$; 6) $(f\circ h)(-3)$;
7) $(g\circ h)(-2)$; 8) $(h\circ g)(-2)$; 9) $(f\circ h)(-1/2)$;
10) $(g\circ f)(-1/2)$; 11) $(f\circ h)(\sqrt{2}+3)$; 12) $(f\circ g)(1+\sqrt{2})$;
13) $(f\circ g)(c)$; 14) $(g\circ h)(c)$; 15) $(f\circ(g\circ h))(c)$;
16) $((f\circ g)\circ h)(c)$.

32. В приведенных ниже парах функций f и g установить, является ли одна из них обратной к другой:

1) $f(x)=2x+1$, $g(x)=\dfrac{x-1}{2}$; 2) $f(x)=-2x+3$, $g(x)=2x-3$;
3) $f(x)=x+4$, $g(x)=x-4$; 4) $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$;
5) $f(x)=4x-5$, $g(x)=\dfrac{x+5}{4}$; 6) $f(x)=x-\dfrac{1}{2}$, $g(x)=2x+1$;
7) $f(x)=x$, $g(x)=-x$; 8) $f(x)=-2x+3$, $g(x)=-2x-3$.

33. Дано значение функции f. Вычислить значение функции f^{-1}, если:

1) $f(3) = 4$; 2) $f(1/2) = 6$; 3) $f(a) = b$;

4) $f(a+1) = 2$; 5) $f(m+n) = p$.

34. Найти f^{-1}, если:

1) $f(x) = (x+2)/2$; 2) $f(x) = (2x+1)/x$;
3) $f(x) = 1/\sqrt{x} + 2$; 4) $f(x) = (1/x)^2$;
5) $f(x) = (x/(x+4))^2$; 6) $f(x) = \sqrt{x/(x-1)}$;
7) $f(x) = \sqrt{(x-1)/(x+1)}$; 8) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 2}$;
9) $f(x) = ((x-3)/(x+1))^2$; 10) $f(x) = (\sqrt{x/(x+4)} - 2)^2$.

35. Функция $f\colon \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ задана равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & x \geq 1, \\ 2x - 1, & x < 1. \end{cases}$$

а) Доказать, что f является биективной.

б) Найти f^{-1}.

в) Вычислить $f \circ f^{-1}$ и $f^{-1} \circ f$.

36. Для заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ найти функции $(f \circ g)(x)$ и $(g \circ f)(x)$ $(f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$:

1) $f(x) = |x-1| + 2$; $g(x) = |x-2| + 1$;

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ -5x - 1, & x > 0; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 4x - 2; & x < 0, \\ 3x^2 - 2, & x > 0. \end{cases}$

37. Доказать равенство функций f и g:

1) $f, g\colon \{-1, 0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$;
$g(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1$;

2) $f, g\colon \{-1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = \sin \pi x$;

3) $f, g\colon [1; 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max(-t^2 + 4t - 3),\ 1 \leq t \leq x$;

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, 1 \leq x \leq 2, \\ 1 \qquad 2 < x \leq 3; \end{cases}$$

4) $f, g\colon [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} -x+1, -1 \le x \le 0, \\ \quad x+1, \quad 0 < x \le 1; \end{cases}$

$g(x) = \max(-x+1,\ x+1);$

5) $f, g\colon \{-1, 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 1 + x,\quad g(x) = \sqrt{1-x^2};$

6) $f, g\colon \{-1, 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -1 + \sqrt{4+2x-x^2};$

$g(x) = 1 - \sqrt{-2x-x^2};$

7) $f, g\colon \{0, 2\} \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(x) = 2 - x,\quad g(x) = \sqrt{4-x^2};$

8) $f, g\colon \{0, 2\} \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(x) = \sqrt{4-x^2};$

$g(x) = 2 - \sqrt{4x-x^2};$

9) $f, g\colon [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}};$

$g(x) = \begin{cases} \quad 2, \quad\ 1 \le x \le 2; \\ 2\sqrt{x-1}, x > 2; \end{cases}$

10) $f, g\colon \{k\pi, 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} | k \in \mathbf{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sin x,\ g(x) = \sin 2x.$

38. Найти функции $s = f + g$, $d = f - g$, $p = f \cdot g$ и $q = f/g$:

1) $f\colon \{1,2,3,4\} \to \{0,1,3,5,6\}, f(1)=0, f(2)=1, f(3)=3, f(4)=6;$
$g\colon \{1,2,3,5\} \to \{1,3,4,5\}, g(1)=1, g(2)=4, g(3)=3, g(5)=4;$

2) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} \ \ x+2, x \le 3, \\ -x+3, x > 3; \end{cases}\quad g(x) = \begin{cases} x-2, x \le 0, \\ x+1, x > 0; \end{cases}$

3) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} \ \ x, \quad x \le -1, \\ -x, -1 < x < 1, \\ \ \ 0, \quad x \ge 1; \end{cases}\quad g(x) = \begin{cases} x-1, x < 0, \\ x, \quad\ x \ge 0; \end{cases}$

4) $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, 0 \le x \le 2, \\ \quad 1, \qquad\ x > 2; \end{cases}$

$g\colon (-\infty, 5] \to \mathbb{R},\quad g(x) = \begin{cases} -x, \quad x < 0, \\ \ \ 1, \quad x = 0, \\ \ \ x, 0 < x \le 5. \end{cases}$

5) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \max(x+1,\ x^2);\ g(x) = \min(-x, x).$

39. Пусть $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{0,1,3,4\}$ и функции

$f\colon A \longrightarrow B,\ f(1) = 0,\ f(2) = 0,\ f(3) = 1,\ f(4) = 3;$

$g\colon B \longrightarrow A,\ g(0) = 2,\ g(1) = 1,\ g(3) = 4,\ g(4) = 1.$

Могут ли быть определены функции $f \circ g$, $g \circ f$? Если да, то найдите эти функции. Нарисуйте их диаграммы.

40. а) Показать, что функция f является биективной.

б) Найти f^{-1}.

в) Построить графики функций f и f^{-1} в одной и той же системе координат.

1) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ , f(x) = 6x - 2;$

2) $f\colon [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty), \ f(x) = 3x + 1;$

3) $f\colon (-\infty, 0) \cup [2; 4] \longrightarrow (-\infty, 4], \ f(x) = -x^2 + 4x;$

4) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, 3) \cup [4, +\infty), \quad f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \le 0, \\ \frac{2}{3}x + 4, & x > 0; \end{cases}$

5) $f\colon [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ \cos x, & \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$

41. Показать, что функция $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = x^2 - 6x + 2$ удовлетворяет условиям обратимости на:

а) $(-\infty, 3]$;

б) $[3, +\infty)$;

в) $(-\infty, 0] \cup [3, 6)$.

Найти обратные этих функций и построить их графики в одной и той же системе координат.

42. Используя свойства характеристической функции, докажите равенства (утверждения):

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

2) $(A \cup B = B \cap A) \Rightarrow (A = B)$;

3) $\left.\begin{matrix} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{matrix}\right\} \Rightarrow (B = C)$;

4) $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$;

5) $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$;

6) $A \vartriangle B = (A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$;

7) $A' \vartriangle B' = A \vartriangle B$;

8) $A' \vartriangle B = A \vartriangle B'$;

9) $A \vartriangle B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$;

10) $A \vartriangle B = A \cup B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$;

11) $A \cap B = A \setminus B \Leftrightarrow A = \varnothing$;

12) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \varnothing$;

13) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

14) $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B$.

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

3.1. Перестановки. Размещения. Сочетания. Бином Ньютона

В процессе решения многих практических задач (и не только) необходимо:

1) оценить число различных сочетаний, образованных элементами некоторого множества или элементами нескольких множеств;

2) выбрать из некоторого множества предметов подмножество (сделать выборку) элементов, которые обладают заданными свойствами;

3) расположить элементы некоторого множества или элементы нескольких множеств в заданном порядке и т.д.

Область математики, которая изучает такие задачи, а также методы их решения, называется комбинаторикой. Иными словами, комбинаторика изучает некоторые операции над конечными множествами. Эти операции приводят к понятиями перестановок, размещений и сочетаний.

Пусть $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – конечное множество, которое имеет n элементов. Множество M называется **упорядоченным**, если каждому его элементу ставится в соответствие, некоторое число от 1 до n, названное порядком элемента, так, чтобы различным элементам из M соответствовали различные числа.

Определение 1. **Всевозможные упорядоченные множества**, составленные из данных n элементов данного множества M $(n(M) = n)$, называются **перестановками** из n элементов.

Число возможных перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!\ (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n),\ n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

По определению считают, что $P_0 = 0! = 1 = 1! = P_1$.

Определение 2. **Размещениями** из n элементов по m называются **всевозможные упорядоченные подмножества** n элементного множества M, содержащие m элементов из данных n.

Число возможных размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и находится по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1);\ 0 \le m \le n;\ n, m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Определение 3. **Сочетаниями** из n элементов по m называются **всевозможные подмножества** n элементного множества M, содержащие m элементов из данных n.

Число возможных сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m и определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{P_n}{P_m \cdot P_{n-m}}, \quad (3)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$; $0 \le m \le n$.

Замечание. Во всех подмножествах, участвовавших в определениях 1 – 3, каждый элемент заданного множества M встречается только один раз.

Наряду с соединениями, в которые каждый из n различных элементов некоторого множества входит один раз, можно рассматривать соединения с повторениями, допускающие появление одного и того же элемента более одного раза.

Пусть дано n групп элементов. Каждая группа содержит несколько одинаковых элементов.

Определение 1$'$. Перестановки из n элементов, в каждую из которых входит α_1 элементов a_{i_1}, α_2 элементов $a_{i_2}, \ldots, \alpha_k$ элементов a_{i_k}, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$, называются **перестановками из n элементов с повторениями.**

Число всевозможных перестановок с повторениями обозначается символом $\overline{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ и находится по формуле

$$\overline{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!}. \qquad (4)$$

Определение 2$'$. Размещения из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более m, называются **размещениями из n элементов по m с повторениями.**

Число всевозможных размещений с повторениями из n элементов по m элементов в каждом обозначается символом $\overline{A_n^m}$ и вычисляется по формуле

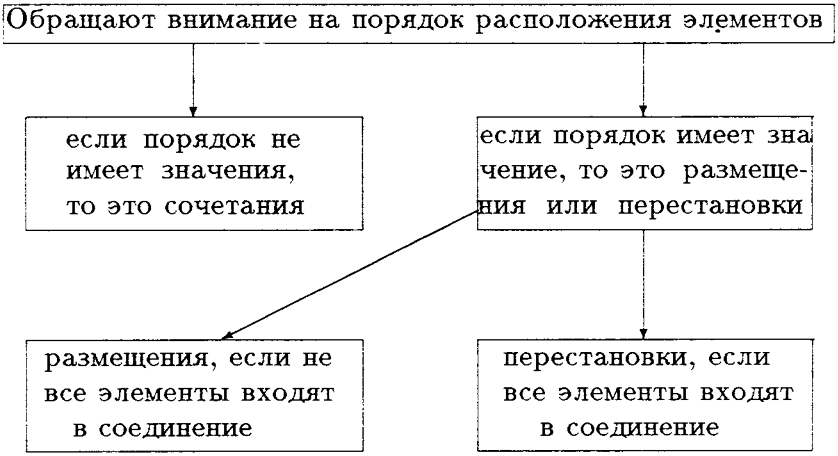
$$\overline{A_n^m} = n^m, \quad n, m \in I\!N^*. \qquad (5)$$

Определение 3$'$. Сочетания из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом сочетании любое число раз, но не более m, называются **сочетаниями из n элементов по m с повторениями.**

Число всевозможных сочетаний с повторениями обозначается символом $\overline{C_n^m}$ и вычисляется по формуле

$$\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!}; \quad n, m \in I\!N^*. \qquad (6)$$

При решении комбинаторных задач необходимо сначала определить вид соединения. При этом можно руководствоваться правилами для установления вида соединений, вытекающих из признаков, определяющих понятие того или иного из этих видов. Одно из них показано в следующей таблице:



Во многих комбинаторных задачах полезно использовать следующие два правила:

Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B – n способами, то выбор либо A, либо B может быть осуществлен $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект B, в свою очередь, может быть выбран n способами, то выбор A и B, в указанном порядке может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Укажем некоторые свойства сочетаний, а именно:

I. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

II. $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$.

III. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$

$$(C_n^{n-k} = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-3}^{n-k-2} + \ldots + C_{k-1}^{0}).$$

IV. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Формула

$$(x+a)^n = C_n^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot a + C_n^2 \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot x \cdot a^{n-1} + C_n^n \cdot a^n \quad (7)$$

называется биномом Ньютона ($n \in \mathbb{N}^*$).

Коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ называются биномиальными. Они обладают следующими основными свойствами:

V. Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и от конца разложения бинома (7), равны между собой.

VI а. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.

VI б. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

VII. Если n – четное число (т.е. $n = 2k$), тогда биномиальный коэффициент среднего члена разложения (т.е. C_n^k) является наибольшим. Если n – нечетное число (т.е. $n = 2k+1$), тогда биномиальные коэффициенты двух средних членов разложения равны между собой (т.е. $C_n^k = C_n^{k+1}$) и они являются наибольшими.

VIII. Член $C_n^k x^{n-k} a^k$ разложения, т.е. $(k+1)$-й член разложения (7), называется общим членом разложения и обозначается T_{k+1}. Таким образом,

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

IX. Коэффициент $k+1$-го члена разложения бинома равен произведению коэффициента k-го члена на показатель степени x в том члене, деленному на k, т.е.

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}. \tag{9}$$

X.
$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \cdot C_n^k. \tag{10}$$

3.2. Решение задач

1. Сколькими способами можно расставить на полке четыре книги?

Решение. Из условия задачи следует, что порядок расположения имеет значение и в нем участвуют все элементы данного множества. Следовательно, речь идет о перестановках:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Ответ: 24.

2. Пассажирский поезд имеет десять вагонов. Сколькими способами можно расставить вагоны?

Решение. Как и в предыдущей задаче, речь идет о перестановках из 10 элементов. Тогда число всевозможных способов расположения вагонов будет

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800.$$

Ответ: 3 628 800.

3. Сколькими способами можно разместить семь учеников за семью партами так, чтобы все парты были заняты?

Решение. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040.$

Ответ: 5 040.

4. Сколько шестизначных телефонных номеров можно составить, если:

1) каждая цифра входит в номер телефона только один раз;

2) цифра может быть в номере телефона более одного раза?

(Номер телефона может начаться цифрой ноль.)

Решение. Всего имеется 10 цифр: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Так как число может начаться нулем, то имеем:

1) размещения из 10 цифр по 6, т.е.

$$A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200;$$

2) так как цифра в номере может повторяться, то речь идет о размещениях с повторениями, т.е.

$$\overline{A_{10}^6} = 10^6 = 1\,000\,000.$$

Ответ: 1) 151 200; 2) 1 000 000.

5. Волейбольная команда состоит из 6 спортсменов. Сколько команд может образовать тренер, если имеет в своем распоряжении 10 спортсменов?

Решение. Так как при комплектовании команды тренера интересует только ее состав, то достаточно найти число сочетаний из 10 элементов, взятых по 6, т.е.:

$$C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Ответ: 210.

6. Сколько пятизначных чисел можно составить при помощи цифр 0 и 1?

Решение. Так как цифры повторяются, то речь идет о размещениях с повторениями. Из условий задачи имеем $m = 5$, $n = 2$.

Цифрами 0 и 1 можно составить $\overline{A_2^5} = 2^5$ пятизначных чисел. Однако нужно учитывать, что число не может начинаться цифрой 0. Поэтому из числа $\overline{A_2^5}$ нужно вычесть число тех пятизначных чисел, которые начинаются нулем. Таких чисел будет $\overline{A_2^4}$. Следовательно, искомое число равно

$$\overline{A_2^5} - \overline{A_2^4} = 2^5 - 2^4 = 16.$$

Ответ: 16.

7. Сколько трехзначных чисел можно составить цифрами 1, 2, 3, 4, 5, если цифры могут повторяться?

Решение. Так как цифры могут повторяться то очевидно, что имеем размещения с повторениями из пяти цифр, взятых по три. Следовательно, можно составить $\overline{A_5^3} = 5^3$ трехзначных чисел.

Ответ: 125.

8. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

Решение. Две розы из 10 можно выбрать C_{10}^2 способами, а три георгины из 8 – C_8^3 способами. Применяя правило умножения, получим общее число букетов $C_{10}^2 \cdot C_8^3 = 1\,890$.

Ответ: 1 890.

9. В студенческой вечеринке участвуют 12 девушек и 15 парней. Сколькими способами можно выбрать четыре пары для танцев?

Решение. 12 девушек можно разбить на группы по четыре в каждой C_{12}^4 способами, а 15 парней – C_{15}^4 способами. Так как в каждой группе, образованной девушками (или парнями) порядок имеет значение, то каждая группа может быть упорядочена P_4 способами. В результате (применяя правило умножения) получаем $C_{12}^4 \cdot P_4 \cdot C_{15}^4 = A_{12}^4 \cdot C_{15}^4 = C_{12}^4 \cdot A_{15}^4 = 16\,216\,200$.

Ответ: 16 216 200.

10. Для полета на Марс необходимо укомплектовать следующий экипаж космического корабля: командир корабля, первый его помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командующая тройка может быть отобрана из числа 25 готовящихся к полету летчиков, два бортинженера – из числа 20 специалистов, в совершенстве знающих устройство космического корабля, и врач – из 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж исследователей космоса?

Решение. При выборе командира и его помощников важно определить, какой из военных летчиков лучше других справляется со своими функциями в управлении кораблем. Значит, здесь важен не только персональный состав командующей тройки, но и соответствующая расстановка подобранных людей. Поэтому ясно, что командующая тройка может быть укомплектована A_{25}^3 способами.

Обязанности у обоих бортинженеров почти одинаковы. Они могут выполнять их по очереди. Следовательно, пара бортинженеров может быть укомплектована C_{20}^2 способами. Аналогичное положение и с врачом – его можно подобрать C_8^1 способами.

Применяя правило умножения, получаем: к каждой управляющей тройке присоединяется одна пара инженеров C_{20}^2 способами. В итоге получаем $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2$ пятерки. К каждой пятерке присоединяется один врач C_8^1 способами. В результате экипаж космического корабля может быть укомплектован $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1$ способами,

$$A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1 = 20\,976\,000.$$

Ответ: 20 976 000.

11. Сколькими способами можно выбрать пять одинаковых или пять разных пирожных из 11 различных видов пирожных?

Решение. Пять выбранных пирожных могут быть все одинаковы или четыре одинаковые а одно другого вида, или три одинаковые и два другого вида и т.д., или все пять разные.

Искомое число наборов по пять пирожных из 11 видов будет равно числу сочетаний с повторениями из 11 элементов, взятых по пять, т.е.

$$\overline{C_{11}^5} = \frac{(11+5-1)!}{5!(11-1)!} = \frac{15!}{5!10!} = 3\,003.$$

Ответ: 3 003.

12. Из 10 спортсменов, из которых два гребца, 3 пловца, а остальные бегуны, нужно выделить команду из 6 человек для предстоящих соревнований. Сколько может быть случаев создания команды, в которую бы вошли не менее одного спортсмена от каждого вида спорта?

Решение. а) В команде может быть один гребец, один пловец и четыре бегуна. Гребца можно выбрать C_2^1 способами, пловца – C_3^1 способами, а бегунов – C_5^4 способами. Применяя правило умножения, получаем $C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^4$ способов.

б) В команде могут быть один гребец, два пловца и три бегуна. Повторяя предыдущие рассуждения, число команд такого состава будет $C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3$.

в) В команде могут быть один гребец, три пловца и два бегуна. Число команд в этом случае будет $C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^2$.

г) В команде могут быть два гребца, один пловец и три бегуна. Имеем $C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3$ команд.

д) В команде могут быть два гребца, два пловца и два бегуна. Число команд будет $C_2^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2$.

е) В команде могут быть два гребца, три пловца и один бегун. В этом случае имеем $C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot C_5^1$ команд.

Используя правило суммы, всего команд будет

$$C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^4 + C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 + C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^2 + C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3 + C_2^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2 + C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot C_5^1 = \\ = 175.$$

Ответ: 175.

13. Даны $k = 15$ прописных букв, $m = 10$ гласных и $n = 11$ согласных (всего $k+m+n = 36$ букв). Сколько различных слов можно составить из таких букв, если каждое слово должно начинаться с прописной буквы, среди остальных букв должны быть $\mu = 4$ различных гласных (из числа $m = 10$ заданных) и $\nu = 6$ различных согласных (из числа $n = 11$ заданных).

Решение. Выберем некоторую прописную букву. Этот выбор может быть осуществлен k способами. После этого из m гласных выбираем μ букв. Это можно сделать C_m^μ способами. Наконец, выбираем ν согласных, что можно сделать C_n^ν способами. Применяя правило умножения, выбор необходимых букв можно сделать $k \cdot C_m^\mu \cdot C_n^\nu$ способами.

После выбора прописной буквы, из остальных $\mu + \nu$ букв можно образовать $(\mu+\nu)!$ перестановок. Каждая перестановка порождает новое слово. Таким образом, всего может быть образовано $k \cdot C_m^\mu \cdot C_n^\nu(\mu+\nu)!$ различных слов, т.е. $15 \cdot C_{10}^4 C_{11}^6 \cdot 10!$

Ответ: $15 \cdot C_{10}^4 C_{11}^6 \cdot 10!$

14. В продовольственном магазине имеется три вида конфет. Конфеты упакованы в три различных вида коробок для каждого наименования. Сколькими способами можно заказать набор из пяти коробок?

Решение (см. задачу 11). $\overline{C_3^5} = \dfrac{(3+5-1)!}{5! \cdot (3-1)!} = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = 21.$

Ответ: 21.

15. Для составления почетного караула приглашены 10 офицеров шести родов войск: пехоты, авиации, пограничных, артиллерии, морского флота и ракетных войск.

Сколькими способами может быть составлен почетный караул?

Решение. Имеются 6 категорий офицеров. Повторяя рассуждения, приведенные в задаче 10, нужно подсчитать число сочетаний с повторениями из 6 элементов, взятых по 10, т.е.

$$\overline{C_6^{10}} = \frac{(6+10-1)!}{(6-1)! \cdot 10!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3\,003.$$

Ответ: 3 003.

16. На полке находится $m + n$ различных книг, из которых m в синих переплетах, а n – в желтых. Книги переставляются всевозможными способами. Сколько существует различных положений книг, при которых:

а) книги в синих переплетах занимают m первых мест;

б) книги в синих переплетах стоят рядом?

Решение. а) Книги в синих переплетах могут занимать m первых мест $P_m = m!$ способами. При каждом расположении такого вида, книги в желтом переплете могут быть расположены $P_n = n!$ способами. Применяя правило умножения, всего положений книг, в которых книги в синих переплетах займут m первых мест, будет $m! \cdot n!$

б) Допустим, что книги в синих переплетах расположены рядом. Тогда на полке за ними следуют либо n книг в желтых переплетах, либо $n-1$, либо $n-2, \ldots$, либо ни одна книга в желтом переплете. Таким образом, книги в синих переплетах могут быть расположены подряд $n+1$ способами. При каждом таком расположении книг в синих переплетах, книги в желтых переплетах, а также книги в синих переплетах могут быть переставлены в любом виде. В результате получим $m! \cdot n! \cdot (n+1)$ различных положений книг на полке.

Ответ: а) $m! \cdot n!$; б) $m! \cdot n! \cdot (n+1)$.

17. Найти четвертый член разложения бинома Ньютона

$$(2x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\,)^8.$$

Решение. Согласно формуле (9), четвертый член разложения имеет вид

$$T_4 = C_8^3(2x\sqrt{x})^{8-3} \cdot (-x^{1/3})^3 = -C_8^3 \cdot 2^5 \cdot x^{15/2} \cdot x =$$
$$= -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^5 \cdot x^{17/2} = -256 \cdot 7 \cdot x^{17/2} = -1792 \cdot x^{17/2}.$$

Ответ: $-1792 \cdot x^{17/2}$.

18. Найти наибольший коэффициент разложения

$$[(1+x)(1/x-1)]^m.$$

Решение. $$\left[(1+x)\left(\frac{1}{x}-1\right)\right]^m = \left(\frac{(1+x)(1-x)}{x}\right)^m =$$
$$= \frac{(1-x^2)^m}{x^m} = x^{-m} \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k \cdot x^{2k}.$$

Если m четное число, т.е. $m = 2s$, $s \in I\!N^*$, тогда разложение бинома содержит $2s+1$ члена, а в силу свойства VII, C_{2s}^s является наибольшим коэффициентом разложения.

Если m нечетное число, т.е. $m = 2s+1$, $s \in \mathbb{N}$, в силу того же свойства VII разложение имеет два наибольших коэффициента $C_{2s+1}^{s}, C_{2s+1}^{s+1}$.

Ответ: C_{2s}^{s}, если m – четное число; $C_{2s+1}^{s}, C_{2s+1}^{s+1}$, если m – нечетное число.

19. Найти член разложения $[(1+x)(1+1/x)]^n$, который не содержит x.

Решение. $\left[(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^n = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$. $k+1$ член разложения этого бинома имеет вид

$$T_{k+1} = \frac{1}{x^n} C_{2n}^{k} x^k = C_{2n}^{k} \cdot x^{k-n}.$$

Этот член не будет содержать x, если $k - n = 0$, что равносильно $k = n$. Таким образом, член T_{n+1} не содержит x.

Ответ: T_{n+1}.

20. Найти член разложения

$$(a\sqrt[5]{a/3} - b/\sqrt[7]{a^3})^n,$$

который содержит a в третьей степени, если сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна 2 048.

Решение. Найдем сначала показатель n. В силу свойства IV а, сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n. Так как сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах, то, учитывая условия задачи, имеем

$$2048 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{11} = 2^{n-1} \Leftrightarrow n = 12.$$

Таким образом, показатель бинома равен 12. $k+1$-й член разложения имеет вид

$$T_{k+1} = C_{12}^{k}(a\sqrt[5]{a/3})^{12-k} \cdot (-1)^k \cdot (b/\sqrt[7]{a^3})^k =$$

$$= C_{12}^{k} \cdot (-1)^k/(3^{(12-k)15}) \cdot (a^{6/5})^{12-k} \cdot a^{-3k/7} \cdot b^k.$$

Исходя из условий задачи

$$a^{\frac{6(12-k)}{5} - \frac{3k}{7}} = a^3 \Leftrightarrow \frac{72-6k}{5} - \frac{3k}{7} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \cdot 7 - 2 \cdot 7k - 5k = 35 \Leftrightarrow 19k = 133 \Leftrightarrow k = 7,$$

а

$$T_8 = C_{12}^7 \cdot a^3 \cdot 3^{-1} \cdot (-1)^7 \cdot b^7 = -264a^3b^7.$$

Ответ: $-264a^3b^7$.

21. При каком значении n биномиальные коэффициенты второго, третьего и четвертого членов разложения бинома $(x+y)^n$ образуют арифметическую прогрессию?

Решение. В силу формулы (8) имеем

$$T_2 = C_n^1 x^{n-1} y, \quad T_3 = C_n^2 x^{n-2} y^2, \quad T_4 = C_n^3 x^{n-3} y^3,$$

а из условий задачи следует

$$C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(6+(n-1)(n-2)-6(n-1)) = 0 \overset{n\in \boldsymbol{N}^*}{\Longleftrightarrow} n^2-9n+14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2, \\ n = 7. \end{array}\right.$$

Условиям задачи удовлетворяет только значение $n = 7$.

Ответ: $n = 7$.

22. Доказать, что разность между коэффициентами при x^{k+1} и x^k в разложении $(1+x)^{n+1}$ равна разности между коэффициентами x^{k+1} и x^{k-1} в разложении $(1+x)^n$.

Решение. Коэффициенты при x^{k+1} и x^k в разложении бинома $(1+x)^{n+1}$ равны C_{n+1}^{k+1} и C_{n+1}^k соответственно. Оценим их разность

$$C_{n+1}^{k+1} - C_{n+1}^k \overset{(9)}{=} \frac{(n+1)-k}{k+1} C_{n+1}^k - C_{n+1}^k = \left(\frac{n+1-k}{k+1} - 1\right) \cdot C_{n+1}^k =$$

$$= \frac{n+1-k-k-1}{k+1} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n-2k)\cdot(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n+1-k)!}. \qquad (*)$$

Коэффициенты при x^{k+1} и x^{k-1} в разложении бинома $(1+x)^n$ равны C_n^{k+1} и C_n^{k-1} соответственно. Оценим их разность

$$C_n^{k+1} - C_n^{k-1} \overset{(9)}{=} \frac{n-k}{k+1} C_n^k - C_n^{k-1} \overset{(9)}{=} \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1} - C_n^{k-1} =$$

$$= \left(\frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)k} - 1\right) \cdot C_n^{k-1} =$$

$$= \frac{(n-k)^2 + (n-k) - k^2 - k}{(k+1)k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)(n-2k)\cdot n!}{(k+1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-2k)\cdot(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k+1)!}. \qquad (**)$$

Так как правые части равенств (*) и (**) совпадают, следует, что и их левые части совпадают. Но тогда

$$C_{n+1}^{k+1} - C_{n+1}^{k} = C_n^{k+1} - C_n^{k-1},$$

что и требовалось доказать.

23. Сравнивая коэффициенты при x в обеих частях равенства

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

доказать, что

$$C_n^k C_m^0 + C_n^{k-1} C_m^1 + \ldots + C_n^0 C_m^k = C_{m+n}^k. \qquad (A)$$

Решение. $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \ldots + C_m^k x^k + \ldots + C_m^{m-1} x^{m-1} + x^m) \cdot (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n)$. В правой части этого равенства коэффициент при x^k равен

$$C_m^0 \cdot C_n^k + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + C_m^2 \cdot C_n^{k-2} + \ldots + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + C_n^0 \cdot C_m^k,$$

а в разложении бинома $(1+x)^{n+m}$ $k+1$-й член разложения имеет вид

$$T_{k+1} = C_{m+n}^k \cdot x^k.$$

Так как многочлены $(1+x)^m \cdot (1+x)^n$ и $(1+x)^{m+n}$ имеют одинаковую степень и равны, следует, что и коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равны между собой. А это заканчивает доказательство равенства (A).

24. Доказать равенство

$$\frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n-1} + \ldots + \frac{C_n^n}{1} = \frac{2}{n+1}\left(2^n - \frac{1}{2}\right).$$

Решение. Пусть $\dfrac{C_n^0}{n+1} + \dfrac{C_n^1}{n} + \dfrac{C_n^2}{n-1} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{1} = A \overset{V}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^n}{n+1} + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^{n-2}}{n-1} + \ldots + \frac{C_n^0}{1} = A.$$

Умножаем обе части последнего равенства на $(n+1)$. В результате получаем

$$\frac{n+1}{n+1} C_n^n + \frac{n+1}{n} C_n^{n-1} + \frac{n+1}{n-1} C_n^{n-2} + \ldots + \frac{n+1}{1} C_n^0 = A(n+1) \overset{(10)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = A(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = C_{n+1}^0 + A(n+1) \overset{IV}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} = C_{n+1}^0 + A(n+1) \Leftrightarrow 2^{n+1} - C_{n+1}^0 = A(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \Leftrightarrow A = \frac{2}{n+1} \cdot \left(2^n - \frac{1}{2}\right).$$

Возвращаясь к первоначальному выражению, имеем
$$\frac{C_n^0}{n+1}+\frac{C_n^1}{n}+\frac{C_n^2}{n-1}+\ldots+\frac{C_n^n}{1}=\frac{2}{n+1}\left(2^n-\frac{1}{x}\right),$$
что и требовалось доказать.

25. Доказать, что
$$nC_n^0-(n-1)C_n^1+(n-2)C_n^2-(n-3)C_n^3+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}=0.$$

Решение. Напишем разложение бинома $(x-1)^n$:
$$(x-1)^n=C_n^0x^n-C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}-C_n^3x^{n-3}+$$
$$+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x+(-1)C_n^n. \qquad (A)$$

Возьмем производную по x от обеих частей равенства (A). Получаем
$$n(x-1)^{n-1}=nC_n^0x^{n-1}-(n-1)C_n^1x^{n-2}+(n-2)C_n^2x^{n-3}-$$
$$-(n-3)C_n^3x^{n-4}+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}. \qquad (**)$$

Положим в $(**)$ $x=1$. Тогда
$$0=nC_n^0-(n-1)C_n^1+(n-2)C_n^2-(n-3)C_n^3+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1},$$
что и требовалось доказать.

(Другие методы доказательства – в списке литературы в работе [2]).

26. Доказать справедливость равенства
$$1-10C_{2n}^1+10^2C_{2n}^2-10^3C_{2n}^3+\ldots-10^{2n-1}C_{2n}^1+10^{2n}=(81)^n.$$

Решение. Замечаем, что выражение
$$1-10C_{2n}^1+10^2C_{2n}^2-10^3C_{2n}^3+\ldots-10^{2n-1}C_{2n}^1+10^{2n}$$
представляет собой разложение бинома $(1-10)^{2n}=9^{2n}=(81)^n$, что и требовалось доказать.

27. Упростить выражение $P_1+2P_2+\ldots+nP_n$.

Решение. Применим метод математической индукции. Пусть
$$P_1+2P_2+\ldots+nP_n=A_n. \qquad (*)$$

При:

$n=1$ имеем $P_1=A_1 \Leftrightarrow A_1=1$;

$n=2$ имеем $P_1+2p_2=A_2 \Leftrightarrow 1+2\cdot 2!=A_2 \Leftrightarrow 5=A_2 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 3!-1=A_2 \Leftrightarrow P_3-1=A_2.$$

$n = 3$ имеем $P_1 + 2p_2 + 3P_3 = A_3 \Leftrightarrow A_2 + 3P_3 = A_3 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 3! - 1 + 3 \cdot 3! = A_3 \Leftrightarrow 3!(1+3) - 1 = A_3 \Leftrightarrow 4! - 1 = = A_3 \Leftrightarrow P_4 - 1 = A_3.$$

Допустим, что для $n = k$ равенство $(*)$ принимает вид

$$P_1 + 2P_2 + \ldots + kP_k = (k+1)! - 1. \qquad (**)$$

Вычислим значение выражения $(*)$ при $n = k+1$. Имеем
$$P_1 + 2P_2 + 3P_3 \ldots + kP_k + (k+1)P_{k+1} \overset{(**)}{=} (k+1)! - 1 + (k+1)P_{k+1} =$$
$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(1+k+1) - 1 =$$
$$= (k+2)! - 1 = P_{k+2} - 1.$$

В силу принципа математической индукции выводим, что $(*)$ верна для любого натурального n, т.е.
$$P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n = (n+1)! - 1 = P_{n+1} - 1.$$

Ответ: $P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n = P_{n+1} - 1.$

28. Доказать, что для любых $m, n \in I\!\!N$ число $m! \cdot n!$ делит $(m+n)!$

Решение. В силу определения 3, $\dfrac{(m+n)!}{m! \cdot n!} = C^n_{m+n}$ есть число всех подмножеств из n элементов множества из $(m+n)$ элементов, т.е. C^n_{m+n} есть натуральное число. Следовательно, $\dfrac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$ является целым числом, а это означает, что $m! \cdot n!$ делит $(m+n)!$

29. Доказать равенство
$$(n-k)C_n^{k+1} - (k+1)C_n^k = (n-2k-1)C_{n+1}^{k+1}.$$

Решение. Применяя свойство X, получаем
$$C_n^{k+1} = (n-k)/(k+1)C_{n+1}^{k+1}, \quad C_n^k = (k+1)/(n+1)C_{n+1}^{k+1}.$$

В результате
$$(n-k)C_n^{k+1} - (k+1)C_n^k = \frac{(n-k)^2}{n+1}C_{n+1}^{k+1} - \frac{(k+1)^2}{n+1}C_{n+1}^{k+1} =$$
$$= \frac{(n-k)^2 - (k+1)^2}{n+1} \cdot C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n-k-k-1)(n-k+k+1)}{n+1}C_{n+1}^{k+1} =$$
$$= \frac{(n-2k-1)(n+1)}{n+1} \cdot C_{n+1}^{k+1} = (n-2k-1) \cdot C_{n+1}^{k+1}, \text{ ч.т.д.}$$

30. Вычислить сумму

$$S_n = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \ldots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}.$$

Решение. Замечаем, что общий член a_n этой суммы можно преобразовать следующим образом:

$$a_n = \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} = \frac{n+2}{n!(1+n+1+(n+1)(n+2))} =$$
$$= \frac{n+2}{n!(n+2)^2} = \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{n!(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Тогда сумма S_n принимает вид

$$S_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots - \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!} + \ldots - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} -$$
$$- \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Ответ: $S_n = 1/2 - 1/(n+2)!$

31. Решить уравнение

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$$

Решение. $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + 6\cdot\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + 6\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 9x^2 - 14x \overset{x\geq 0}{\Longleftrightarrow} 1 + 3x - 3 + x^2 -$$
$$-3x + 2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 7. \end{array}\right.$$

Так как C_x^3 имеет смысл только для $x \geq 3$, следовательно, решением данного уравнения является $x = 7$.

Ответ: $x = 7$.

32. Решить уравнение

$$C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1).$$

Решение. $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{(x-2)!((x+1)-(x-2))!} + 2\cdot\frac{(x-1)!}{(x-1-3)!} = 7(x-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)!(x-1)x(x+1)}{(x-2)!\cdot 3!} + 2\cdot\frac{(x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)}{(x-4)!\cdot 3!} = 7(x-1) \overset{x\geq 4}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)x(x+1) + 2(x-3)(x-2)(x-1) - 42(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 =$$

$$= 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 5 \end{array}\right. \Rightarrow x = 5.$$

Ответ: $x = 5$.

33. Решить уравнение

$$(A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y})/P_{x-1} = 72. \qquad (A)$$

Решение. Так как $A_{x+1}^{y+1} = (x+1)!/(x-y)!$, $P_{x-y} = (x-y)!$, $P_{x-1} = (x-1)!$, имеем $(A) \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)!}{(x-y)!} \cdot \dfrac{(x-y)!}{(x-1)!} = 72 \overset{x\geq 1}{\underset{0\leq y\leq x}{\Leftrightarrow}} x(x+1) =$

$$= 72 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = -9 \end{array}\right. \overset{x\in \mathbb{N}*}{\Longrightarrow} x = 8.$$

Учитывая, что $y \in \mathbb{N}$ и $y \leq x$ получаем $y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Ответ: $x = 8$; $\quad y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

34. Найти значения x, которые удовлетворяют равенству

$$(x+2)! = -15(x-1)! + 5[x! + (x+1)!].$$

Решение. $(x+2)! = -15(x-1)! + 5[x! + (x+1)!] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)!x(x+1)(x+2) = -15(x-1)! + 5[(x-1)!x + (x-1)!x(x+1)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)!x(x+1)(x+2) = (x-1)![-15 + 5x + 5x(x+1)] \overset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow}$
$\Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = -15 + 5x^2 + 10x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x^2 + x - 5 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = 3$, так как уравнение $x^2 + x - 5 = 0$ имеет иррациональные корни.

Ответ: $x = 3$.

35. Решить уравнение $A_{x+1}^{n+1} \cdot (x-n)! = 90(x-1)!$

Решение. $A_{x+1}^{n+1} \cdot (x-n)! = 90(x-1)! \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)!}{(x-n)!} \cdot (x-n)! =$
$= 90(x-1)! \overset{x\geq 1}{\underset{0\leq n\leq x}{\Leftrightarrow}} (x-1)!x(x+1) = 90(x-1)! \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -10 \end{array}\right. \Rightarrow x = 9. \text{ Тогда } n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Ответ: $x = 9$, $\quad n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

36. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} A_y^x \colon P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 720. \end{array}\right. \qquad (B)$$

Решение. Исходя из условий задачи, имеем $x, y \in I\!N$, где $x \geq 1$ и $x \leq y$. В силу формул (1) – (3) получаем

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!}{(y-x)!} \cdot \dfrac{1}{(x-1)!} + \dfrac{y!}{(y-x)!x!} = 126, \\ (x+1)! = 720 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!(x+1)}{(y-x)! \cdot x!} = 126, \\ (x+1)! = 6! \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y! \cdot 6}{(y-x)! \cdot 5!} = 126, \\ x+1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)(y-3)(y-2)(y-1)y = 5! \cdot 21, \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^5 - 10y^4 + 35y^3 - 50y^2 + 24y - 2520 = 0, \\ x = 5. \end{cases} \qquad (*)$$

Делителями свободного коэффициента в $(*)$ являются числа

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 7; \pm 8; \pm 9; \pm 10; \ldots .$$

Применяем схему Горнера и теорему Безу для определения корней уравнения $(*)$. Так как $y \in I\!N$, проверим только натуральные числа. Устанавливаем, что числа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ не являются решениями уравнения $(*)$.

Проверим $y = 7$.

	1	−10	35	−50	24	−2520
7	1	−3	14	48	360	0

Следовательно,

$$(*) \qquad \Leftrightarrow (y-7)(y^4 - 3y^3 + 14y^2 + 48y + 360) = 0 \Leftrightarrow y = 7,$$

так как для $y > 7$ выражение $y^4 - 3y^3 + 14y^2 + 48y + 360 > 0$. Таким образом, решением системы (B) является пара $(5, 7)$.

Ответ: $\{(5, 7)\}$.

37. Найти x и y, если

$$C_x^{y-1} : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3:5:5. \qquad (C)$$

Решение. Упростим вначале выражение

$$C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1} = (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) + (C_{x-2}^{y-1} + C_{x-2}^{y-2}) \overset{II}{=}$$

$$= C_{x-1}^y + C_{x-1}^{y-1} \overset{II}{=} C_x^y.$$

В результате система (C) принимает вид

$$C_x^{y-1} : C_x^y : C_x^{y+1} = 3:5:5 \Leftrightarrow \begin{cases} C_x^{y-1} : C_x^y = 3:5, \\ C_x^y : C_x^{y+1} = 5:5, \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} : \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = \dfrac{3}{5}, \\[2ex] \dfrac{x!}{y!(x-y)!} : \dfrac{x!}{(x-y-1)!(y+1)!} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y\cancel{!}\ \cancel{(x-y)!}}{\cancel{(y-1)!}(x-y+1)\cancel{!}} = \dfrac{3}{5} \\[2ex] \dfrac{\cancel{(x-y-1)!}\ (y+1)\cancel{!}}{y\cancel{!}\cdot(x-y)\cancel{!}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 3x - 3y + 3, \\ y + 1 = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 6y + 3 + 3, \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 7. \end{cases}$$

Ответ: $\{(7,3)\}$.

38. Найти значения x, которые удовлетворяют условию

$$(x(x+1)!)/(2 \cdot x!) \leq 2x + 9.$$

Решение. Из условий задачи следует $x \in I\!N$. Тогда
$\dfrac{x(x+1)!}{2 \cdot x!} \leq 2x + 9 \Leftrightarrow \dfrac{x \cdot x!(x+1)}{2 \cdot x!} \leq 2x + 9 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 4x + 18 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-6) \leq 0 \overset{x \in I\!N}{\Longleftrightarrow} x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$
и $x \in I\!N$. Следовательно, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ответ: $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

39. Найти значения x, которые удовлетворяют неравенству

$$x \cdot C_{x-1}^{x-3} - 7 \cdot C_{x-2}^{x-3} \leq 8(x-2). \qquad (*)$$

Решение. Заметим, что $(*)$ имеет смысл при $x \in I\!N$ и $x \geq 3$.
Так как
$C_{x-1}^{x-3} = C_{x-1}^2 = \dfrac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}$; $C_{x-2}^{x-3} = C_{x-2}^1 = x - 2$, то
$(*) \Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)(x-2)}{2} - 7(x-2) \leq 8(x-2) \Leftrightarrow (x-2)[x(x-1) - 30] \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-30) \le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+5)(x-6) \le 0 \overset{x\in N}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-6) \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=4, \\ x=5, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{3,4,5,6\}$.

40. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} C_{x+1}^{x-2} - C_{x+1}^{x-1} \le 100, \\ C_{x+5}^{4} - \dfrac{143 \cdot P_{x+5}}{96 \cdot P_{x+3}} < 0. \end{cases} \qquad (D)$$

Решение. $(D) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)!}{(x-2)! \cdot 3!} - \dfrac{(x+1)!}{(x-1)! \cdot 2!} \le 100, \\ \dfrac{(x+5)!}{4! \cdot (x+1)!} - \dfrac{143 \cdot (x+5)!}{96 \cdot (x+3)!} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\overset{x\ge 2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{(x-1)x(x+1)}{3!} - \dfrac{x(x+1)}{2!} \le 100, \\ \dfrac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{4!} - \dfrac{143(x+4)(x+5)}{96} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-4) \le 600, \\ (x+4)(x+5)(4(x+2)(x+3)-143) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2-4x-600 \le 0, \\ 4x^2+20x-119 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{x\in N}{\overset{x\ge 2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x^3-3x^2-4x-600 \le 0, \\ x \in \{2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3-3x^2-4x-600 \le 0, \\ x=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3-3x^2-4x-600 \le 0, \\ x=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8-12-8-600 \le 0, \\ x=2, \end{cases} \\ \begin{cases} 27-27-12-600 \le 0, \\ x=3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{2,3\}$.

3.3. Предлагаемые задачи

1. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?

2. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

3. В вазе стоят 10 красных и 4 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать три цветка из вазы?

4. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер из пяти цифр. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры. Угадать номер удалось только с последней из возможных попытки. Сколько попыток предшествовало удачной?

5. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом 1-й и 2-й тома не стояли рядом?

6. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами могут быть распределены мишени между стрелками?

7. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$, содержат цифру 3, если: а) цифры в числах не повторяются; б) цифры могут повторяться?

8. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в крукжке художественного слова – 15, в вокальном кружке – 12 и в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

9. Семь яблок и три апельсина нужно положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами можно это сделать?

10. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

11. На одной стороне треугольника взяты n точек, на другой – m, а на третьей – k точек, причем ни одна из них не является вершиной треугольника. Сколько треугольников с вершинами в этих точках существует?

12. Сколькими способами можно разместить пять девочек и пять мальчиков за столом, если рядом не должны оказаться ни две девочки, ни два мальчика?

13. 12 ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

14. Семь предметов нужно распределить между тремя лицами. Сколькими способами можно осуществить это распределение, если одному или двум лицам может не достаться ни один предмет?

15. Сколько всевозможных шестизначных чисел можно составить из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ так, чтобы цифры не повторялись, а число начиналось и заканчивалось четной цифрой?

16. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ так, чтобы в каждом из них цифра 1 встречалась только один раз, а остальные цифры могут повторяться?

17. Для премий на математической олимпиаде выделено три экземпляра одной книги, по два экземпляра другой и по одному экземпляру третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвует 20 человек и никому не дают по две книге сразу? То же, если никому не дают по два экземпляра одной и той же книги, но могут вручить по две или три различные книги.

18. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если каждая буква должна содержать не более пяти символов?

19. Для поисков затерявшегося друга группа экскурсантов разбилась на две подгруппы. Среди них только четверо знают местность. Сколькими способами могут быть составлены подгруппы так, чтобы в каждой подгруппе было по два человека, которым знокома местность, если всего 16 экскурсантов?

20. Каждый из десяти радистов пункта A старается установить связь с каждым из двадцати радистов пункта B. Сколько возможных различных вариантов такой связи?

Докажите равенства:

21. $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$;

22. $C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}$;

23. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

24. $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+1) \cdot 2^{n-1}$;

25. $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$;

26. $\frac{C_n^1}{C_n^0} + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + \ldots + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$;

27. $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n = 3^n$;

28. $2C_n^0 + \frac{2^2C_n^1}{2} + \frac{2^3C_n^2}{3} + \ldots + \frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1} = \frac{3^{n-1}-1}{n+1}$;

29. $\frac{C_n^k}{C_n^k + C_n^{k+1}} + \frac{C_n^{k+5}}{C_n^{k+2} + C_n^{k+3}} = \frac{2C_n^{k+1}}{C_n^{k+1} + C_n^{k+2}}$

(где $n, k \in \mathbb{N},\ n > k+3$);

30. $\frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{2!(n-2)!} + \ldots + \frac{2^0}{n!} = \frac{3^n}{n!}$;

31. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{n+k}^n \cdot 1/2^k = 2^n$;

32. $\sum\limits_{p=1}^{n} (pC_n^p)^2 = n \cdot C_{2n-1}^{n-1}$;

33. $\sum\limits_{k=0}^{m} C_p^k \cdot C_q^{m-k} = C_{p+q}^m$;

34. $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k = (-1)^n C_{n-1}^m$;

35. $\sum\limits_{k=m}^{n} C_k^m \cdot C_n^k = C_n^m \cdot 2^{n-m}$

(где $n, k, p, m, q \in \mathbb{N}$).

Решить уравнения и системы уравнений:

36. $A_x^2 : C_x^{x-1} = 48$;

37. $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$;

38. $A_x^4 : (A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}) = 24/23$;

39. $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$;

40. $A_x^3 - 2A_x^4 = 3A_x^2$;

41. $A_x^5 : C_{x-1}^{x-5} = 336$;

42. $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$;

43. $P_{x+2} : (A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3) = 210$;

44. $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = (30/7) \cdot P_x$;

45. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \ldots + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023$;

46. $P_{x+3}:(A_x^5\cdot P_{x-5})=720;$ **47.** $C_{2x}^{x+1}:C_{2x+1}^{x-1}=2/3;$

48. $A_{x-1}^2-C_x^1=79;$ **49.** $3C_{x+1}^2-2A_x^2=x;$

50. $C_{x+1}^2:C_x^3=4/5;$ **51.** $12C_x^1+C_{x+4}^2=162;$

52. $A_{x+1}^3+C_{x+1}^{x-2}=14(x+1);$ **53.** $P_{x+6}:(A_{x+4}^{n+4}\cdot P_{x-n})=240;$

54. $C_{x+1}^{x-4}=7/15\cdot A_{x+1}^3;$ **55.** $C_{x+1}^3:C_x^4=6:5;$

56. $C_{x+1}^2\cdot A_x^2-4x^3=(A_{2x}^1)^2;$ **57.** $3C_{x+1}^2+P_2\cdot x=4A_x^2;$

58. $A_{x+3}^2=C_{x+2}^3+20;$ **59.** $C_x^3+C_x^4=11C_{x+1}^2;$

60. $11C_x^3=24C_{x+1}^2;$ **61.** $(A_{x+1}^8+A_x^7):A_{x-1}^6=99;$

62. $A_{x+1}^{n+1}\cdot(x-n)!=90(x-1)!;$ **63.** $C_x^5=C_x^3;$

64. $C_x^3=2C_x^{x-2};$ **65.** $A_x^6-24xC_x^4=11A_x^4;$

66. $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101;$ **67.** $\dfrac{1}{P_{x-1}}-\dfrac{1}{P_x}=\dfrac{(x-1)^3}{P_{x+1}};$

68. $12C_{x-3}^{x+1}=55A_{x+1}^2;$ **69.** $C_{5x-x^2+5}^x=C_{11}^8;$

70. $A_x^5=18A_{x-2}^4;$ **71.** $(A_x^{10}-A_x^8):A_x^8=109;$

72. $(n+2)!:(A_n^k\cdot(n-k)!)=132;$ **73.** $\begin{cases}A_x^y+3C_x^y=90,\\ A_x^y-2C_x^y=40;\end{cases}$

74. $C_{x+1}^y:C_x^{y+1}:C_x^{y-1}=6:5:2;$

75. $(A_{x-1}^y+yA_{x-1}^{y-1}):A_x^{y-1}:C_x^{y-1}=10:2:1;$

76. $A_x^{y-1}:A_{x-1}^y:(C_{x-2}^y+C_{x-2}^{y-1})=21:60:10;$

77. $C_x^{y-1}:C_x^y:C_x^{y+1}=2:3:4;$ **78.** $\begin{cases}xA_{x-1}^{y-1}\cdot P_{x-y}=15P_{x-1},\\ 9C_{x+1}^y=16C_x^{y+1};\end{cases}$

79. $\begin{cases}A_{2x}^{3y}-8A_{2x}^{3y-1}=0,\\ 9C_{2x}^{3y}-8C_{2x}^{3y-1}=0;\end{cases}$ **80.** $\begin{cases}A_x^y=7A_x^{y-1},\\ 6C_x^y=5C_x^{y+1};\end{cases}$

81. $\begin{cases}xC_{n-2}^{k-1}+\dfrac{n-1}{k-1}y=\dfrac{k}{n-1},\\ xC_{n-2}^{k-2}-\dfrac{n-1}{k}y=\dfrac{k-1}{n-1};\end{cases}$ **82.** $\begin{cases}7C_x^1\cdot y^{x-1}\cdot z=A_8^4,\\ C_x^2\cdot y^{x-2}\cdot z^2=A_{10}^3,\\ 11C_x^3\cdot y^{x-3}\cdot z^3=A_{13}^4.\end{cases}$

Решить неравенства и системы неравенств:

83. $\dfrac{(x-1)!}{(x-3)!} < 72$;

84. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} < 1000$;

85. $x(x-3)! < 108(x-4)!$;

86. $C_x^5 < C_x^6$;

87. $C_x^5 > C_x^7$;

88. $C_{20}^{x-1} < C_{20}^{x}$;

89. $C_{16}^{x-2} > C_{16}^{x}$;

90. $C_x^5 < C_x^3$;

91. $C_{13}^{x} < C_{13}^{x+2}$;

92. $C_{18}^{x-2} > C_{18}^{x}$;

93. $C_x^6 < C_x^4$;

94. $5C_x^3 < C_{x+2}^4$;

95. $C_{x+1}^{x-1} > 3/2$;

96. $2C_x^5 > 11C_{x-2}^3$;

97. $C_x^{x-1} \le C_x^{x-3}$;

98. $C_{2x}^{2x-8} \ge C_{2x}^{2x-12}$;

99. $xC_{x-1}^{x-2} - 7C_{x-2}^{x-3} \le 8(x-2)$;

100. $C_{x+1}^{x-2} - C_{x+1}^{x-1} \le 100$;

101. $A_{x+1}^4 : C_{x-1}^{x-3} > 14P_3$;

102. $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{x-2}^4 < 0$;

103. $C_{x+5}^4 - \dfrac{143P_{x+5}}{96P_{x+3}} < 0$;

104. $\dfrac{A_{x+2}^3}{P_{x+2}} - \dfrac{143}{4P_{x-1}} < 0$;

105. $\begin{cases} C_{2x}^7 > C_{2x}^5, \\ C_{13}^x < C_{13}^{x+2}, \end{cases}$

106. $\begin{cases} C_{x+1}^{x-1} < 21, \\ 5C_x^3 < C_{x+2}^4, \\ C_{x-1}^{x-3} : A_{x+1}^4 < 1:14P_3. \end{cases}$

107. Найти пятый член разложения бинома

$$(2x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^8.$$

108. Найти средний член разложения бинома

$$(2x + y/2)^8.$$

109. Найти значения показателя степени m в разложении бинома

$$(1+a)^m,$$

если коэффициент пятого члена равен коэффициенту девятого члена.

110. Определить A_n^2, если пятый член разложения бинома

$$(\sqrt[3]{x} + 1/x)^n$$

не зависит от x.

111. В разложении бинома

$$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$$

коэффициент третьего члена разложения равен 28. Найти средний член разложения.

112. Найти наименьшее значение показателя m в разложении бинома

$$(1+a)^m,$$

если отношение коэффициентов любых двух соседних членов разложения равно 7:15.

113. В разложении бинома

$$(\sqrt{x}+1/\sqrt[3]{x}\,)^{16}$$

найти член, содержащий x^3.

114. В разложении бинома

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a^{-1}}\,)^{15}$$

найти член, не зависящий от a.

115. В разложении бинома

$$((a\sqrt[3]{a})/6+1/\sqrt[15]{a^{28}}\,)^n$$

определить член разложения, не содержащий a, если сумма биномиальных коэффициентов трех первых членов разложения равна 79.

116. В разложении бинома

$$(1/\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[4]{a^3}\,)^{17}$$

найти член, не содержащий a.

117. В разложении бинома

$$(\sqrt{\sqrt{x}}+2/\sqrt[3]{x}\,)^{1989}$$

найти свободный член.

118. В разложении бинома

$$(z^2+1/z\cdot\sqrt[3]{z}\,)^m$$

найти третий член разложения, если сумма биномиальных коэффициентов равна 2 048.

119. В разложении бинома

$$(1/\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[4]{b}/\sqrt[8]{a^3}\,)^n$$

определить член, содержащий b^6, если отношение биномиальных коэффициентов четвертого и второго членов равна 187.

120. В разложении бинома

$$(x\sqrt[4]{x}-1/\sqrt[8]{x^5}\,)^n$$

определить член разложения, не содержащий x, если сумма биномиальных коэффициентов второго члена от начала и третьего от конца разложения равна 78.

121. Отношение коэффициента третьего члена к коэффициенту пятого члена разложения бинома $(x^{-3/2}-\sqrt[3]{x}\,)^n$

равна 2/7. Найти член бинома, который содержит $x^{-5/2}$.

122. Найти x, y и z, если известно, что второй, третий и четвертый члены разложения бинома

$$(x+y)^z$$

равны 240, 720, 1 080.

123. При каком значении n коэффициенты второго, третьего и четвертого членов разложения бинома

$$(x+y)^n$$

составляют арифметическую прогрессию?

124. Найти члены, не содержащие иррациональности в разложении бинома

$$(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\,)^{24}.$$

125. Сколько рациональных членов содержится в разложении

$$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\,)^{100}?$$

126. Найти номера трех последовательных членов разложения

$$(a+b)^{23},$$

коэффициенты которых образуют арифметическую прогрессию.

127. Найти член разложения

$$(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^{-3}}\,)^n,$$

если девятый член разложения, содержащий $x^{6.5}$, имеет наибольший коэффициент.

128. Третье слагаемое разложения

$$(2x+1/x^2)^m$$

не содержит x. При каких x это слагаемое равно второму слагаемому разложения

$$(1+x^3)^{30}?$$

129. При каких положительных значениях x наибольшим слагаемым в разложении

$$(5+3x)^{10}$$

является четвертое?

130. В разложении бинома

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$$

первые три коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Найти все рациональные члены разложения.

131. Найти значения x, при которых разность между четвертым и шестым членами разложения

$$(\sqrt{2^x}/\sqrt[16]{8}+\sqrt[16]{32}/\sqrt{2^x})^m$$

равна 56, если известно, что показаталь m бинома на 20 меньше биномиального коэффициента третьего слагаемого этого разложения.

132. Зная, что n есть наибольшее число, удовлетворяющее неравенству $\log_{1/3} n+\log_{n/3} n>0$, найти слагаемое разложения $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})^n$, которое содержит b^2.

133. Найти значения x, при которых сумма третьего и пятого слагаемых разложения $(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}})^n$ равна 135, зная, что сумма последних трех биномиальных коэффициентов равна 22.

134. Найти x, если шестое слагаемое разложения

$$(a+b)^n, \text{ где } a=\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}, \quad b=\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}},$$

равно 21, а биномиальные коэффициенты 2, 3 и 4 слагаемых являются 1, 3 и 5-ым членами некоторой арифметической прогрессии соответственно .

135. Существуют ли в разложении бинома

$$\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}+2/\sqrt[3]{x}\right)^{1988}$$

слагаемые, не зависящие от x? Написать их.

136. Сколько слагаемых разложения бинома $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7})^{36}$ являются целыми числами?

137. Первые три коэффициента разложения $(\sqrt{y}+1/2\sqrt[4]{y})^n$ образуют арифметическую прогрессию. Найти все слагаемые разложения, которые содержат y в натуральной степени.

138. Найти x, если третье слагаемое разложения бинома $(x+x^{\lg x})^5$ равно 10^6.

139. В разложении $(1+x-x^2)^{25}$ найти тот член, у которого показатель степени x в три раза больше суммы всех коэффициентов разложения.

140. Определить номер наибольшего члена разложения

$$(p+q)^n$$

по убывающим степеням буквы p, предполагая, что $p>0$; $q>0$; $p+q=1$. При каких условиях: а) наибольший член будет первый? б) наибольший член будет последний? в) разложение будет содержать два одинаковых последовательных члена, превышающих все остальные члены разложения?

Ответы[1]

Глава I

3. а) $A = \{5, 7\}$; $B = \{-7, 2\}$; $C = \{1/7\}$.

4. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 12\}$.

5. а) $A = \{10, 22, 24, \ldots\}$; b) $26, 28 \in A$, $33 \notin A$ (так как A состоит из четных натуральных чисел).

6. $A = \{x \in I\!N^* | x = 1 + 3n,\ n = \overline{1,3}\}$; $B = \{x \in I\!N^* | x = 3 \cdot 2^{n-1},\ n = \overline{1,3}\}$; $C = \{y \in I\!N^* | y = n^2,\ n = \overline{1,5}\}$; $D = \{z \in I\!N^* | z = n^3,\ n = \overline{1,5}\}$.

7. $n(A) = 50$; $n(B) = 9$; а) если $ad - bc = 0 \Rightarrow C = \{b/d\}$; б) если $ad - bc \neq 0 \Rightarrow C$ имеет p элементов.

8. $A_1 = \{-1\}$; $A_2 = \{1, 2, 3\}$; $A_3 = \{-1, -2, -3\}$.

9. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $G = (-\infty, 4) \cup (7, +\infty)$; $H = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$; и т.д.

10. а) $B \subset A$, $B \neq A$ и т.д.

11. $A_6 = C_{I\!N^*}(B)$; $A_7 = A \,\Delta\, B$.

12. а) $A = \{1, 2, 5\}$, $B = E = A \cup B$; б) $A = \{1, 6, 14\}$, $B = \{1, 5, 9, 13, 14\}$, $E = \{1, 2, 5, 6, 9, 13, 14, 18, 20\}$; в) $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 9, 10\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; г) $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$; д) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{2, 4, 5\}$; е) $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$; ж) 1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = E \setminus \{1, 2\}$; 2) $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$; 3) $A = \{2, 3, 4\}$, $B = E \setminus \{4\}$; 4) $A = E \setminus \{5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$; з) 1) $A = E$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$; 2) $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$; и) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$; к) $A = E$, $B = \{2, 4, 5\}$, $C = \{3, 5, 6\}$; л) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$; м) $E = \{1, 2, \ldots 10\}$,

---

[1]Учитывая аналогию многих задач, ответы приводятся только для некоторых из них. Для глав I и II приведены только менее "громоздкие" ответы и более сложные.

$A = \{7,8,9,10\}$, $B = \{2,3,4,8,9,10\}$; н) $A = \{a,d,f,h,i\}$, $B = \{b,c,d,e,f,g,i\}$; о) $A = \{1,4,6,8,9\}$, $B = \{2,3,4,5,6,7,9\}$.

13. а) $A = \{6,10,20\}$, $B = \{-47,-8,13,22\}$ и т.д.; б) $A \cap B = \varnothing$ и т.д.; в) $A = \{0,2,3\}$, $B = \{-5,-1,1,5\}$ и т.д.; г) $A = \{0,2\}$, $B = \{2,4\}$ и т.д.; д) $A = \{-1,0,1,2\}$, $B = \{0,2\}$ и т.д.; е) $A = \{-4,-3,-2,-1\}$, $B = \varnothing$ и т.д.; ж) $A = \{-1,1,2,4,5,7\}$, $B = \{1,2,4,5,7\}$ и т.д.; з) $A = \{-33,-18,-13,-9,-8,-6,-5,-4,-2,-1,0,2,3,7,12,27\}$, $B = \{0,2,3,7,12,27\}$ и т.д.; и) $A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, $B = \{2,4,6,8,12\}$ и т.д.; к) $A \cup B = [-7;7] \cup \{10\}$, $A \setminus B = [-7;-4) \cup (-4;7]$, $B \setminus A = \{10\}$ и т.д.; л) $A \cap B = \varnothing$ и т.д.; м) $A \cap B = \{626\}$ и т.д.; о) $A \cup B = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$ и т.д.

14. а) $A = \{x \in \mathbf{Q} | x = (7n-4)/(n+3),\ n \le 22,\ n \in I\!N\}$, $B = M$, $C = \{2,6\}$; б) $n(D) = 2497$.

15. $A = \{1,2,3,4,8\}$; $B = \{1,3,5,9,10\}$.

16. $A = \{1,6,14\}$; $B = \{1,5,9,13,14\}$; $E = \{1,2,5,6,9,13,14,18,20\}$.

17. а) $A = [5,+\infty)$, $B = (1,+\infty)$, $A \subset B$; б) $A = B = [-9;-4] \cup \cup [4;9]$; в) $A = [-2; 0.5(1+\sqrt{5}))$, $B = [0.5; 0.5(1+\sqrt{5}))$, $B \subseteq A$; г) $A = (-\infty,-1)$, $B = A$; д) $A = B = (3/2,+\infty)$; е) $A = B = \varnothing$; ж) $A = [3;\sqrt{37}/2]$, $B = (-\sqrt{37}/2;-3] \cup [3;\sqrt{37}/2)$.

18. а) $m \in \{-2,2\}$, $m \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$, $m \in (-2;2)$; б) $m \in \{-5/2,5/2\}$, $m \in (-5/2,5/2)$, $m \in (-\infty,-5/2) \cup (5/2,+\infty)$; в) $m \in \{-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\}$, $m \in (-\infty,-2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3},+\infty)$; г) $m \in \in \varnothing$, $m \in I\!R$, $m \in \varnothing$; д) $m = -2/3$, $m \ne -2/3$, $m \in \varnothing$; е) $m \in \{-12,12\}$, $m \in (-\infty,-12) \cup (12,+\infty)$, $m \in (-12;12)$; ж) $m \in \left\{\dfrac{1-\sqrt{33}}{6}, \dfrac{1+\sqrt{33}}{6}\right\}$, $m \in \left(\dfrac{1-\sqrt{33}}{6}, \dfrac{1+\sqrt{33}}{6}\right)$, $m \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{33}}{6}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{6}, +\infty\right)$; з) $m \in \left\{\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right\}$, $m \in \left(\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$, $m \in \left(-\infty, \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

19. а) $n(A) = 47$; б) $n(A) = 82$; в) $n(A) = 4$; г) $n(A) = 16$; д) $n(A) = 4$; е) $n(A) = 2$.

20. а) $A \cap B \cap C = \{60t - 17 | t \in I\!N^*\}$; б) $A \cap B \cap C = \{200\}$.

21. а) $A \cap B = \{37,79\}$; б) $A \cap B = \{37,79\}$; в) $A \cap B = \{6k+1 | k \in \in \mathbf{Z},\ k \in [0;166]\}$.

24. а) $\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$; б) $\{(3,3)\}$; в) $\{(1,3)\}$; г) $\{(2,4),(3,4),(2,5),(3,5)\}$; д) $\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$; е) $\{(1,2),(1,3),(1,4),(4,4)\}$; ж) $\{(1,4)\}$ и т.д.

26. а) $A=(-\infty,-2)\cup[3;4)$, $B=[3;4]$ и т.д.; б) $A=B$ и т.д.; в) $A=[2;3]$, $B=[-3;-2]$ и т.д.; г) $A=(-2;-1)\cup(2,+\infty)$, $B= =(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ и т.д.; д) $A=\{0,-11\}$, $B=\{-4/5,0,6/5\}$ и т.д.; е) $A=(-\infty,-1)\cup(0;4)$, $B=(-1;3)$ и т.д.; ж) $A=\varnothing$, $B=\varnothing$ и т.д.; з) $A=\{7,35/3\}$; $B=\{-219/8,7\}$ и т.д.; и) $A=\{7/4\}=B$ и т.д.; к) $A=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, $B=(-\infty,-2/5)\cup[4,+\infty)$ и т.д.; л) $A=(-\infty,1]\cup[3/2,+\infty)$, $B=\mathbb{R}$ и т.д.; м) $A=[0,1/3]$, $B=[-1;1]$ и т.д.; н) $A= =(-2;3)$, $B=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$ и т.д.; о) $A=(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$, $B=(-\infty,2)$ и т.д.

Глава II

2. 1) $G_\alpha=\{(2,5),(2,7)\}$; 2) $G_\alpha=\{(4,1),(4,3),(6,1),(6,3),(8,1),(8,3)\}$; 3) $G_\alpha=\{(8,1),(8,3),(8,5),(8,7)\}$; 4) $G_\alpha=\{(2,1),(2,3)\}$; 5) $G_\alpha=\{(2,1),(2,3),(2,5),(2,7),(4,1),(6,1),(8,1)\}$; 6) $G_\alpha=\{(8,7)\}$; 7) $G_\alpha=\{(4,1),(4,3),(6,1),(6,3),(8,1),(8,3)\}$; 8) $G_\alpha=\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5),(8,1),(8,3),(8,5),(8,7)\}$.

3. 1) $G_\alpha=\{(1,8),(2,7),(4,5)\}$; 2) $G_\alpha=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$; 3) $G_\alpha=\{(3,1)\}$; 4) $G_\alpha=\{(4,1)\}$; 5) $G_\alpha=\{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(1,8),(2,8),(3,3),(4,8)\}$; 6) $G_\alpha=\{(1,7),(2,3)\}$; 7) $G_\alpha= =\{(1,5),(1,8),(2,1),(2,7),(3,3),(4,5),(4,8)\}$; 8) $G_\alpha=\{(1,1),(2,1),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$. .

4. 1) $x+y=6$; 2) $y=x+1$; 3) $x<y$; 4) $\max(x,y)>4$; 5) $\min(x,y)=2$; 6) НОД$(x,y)=2$; 7) x четное, либо $y=6$; 8) $x=y^2$.

5. 1) и 10) транзитивное; 2) симметричное; 3) симметричное и транзитивное; 4) и 9) рефлексивное, транзитивное; 5) рефлексивное: 6) рефлексивное, симметричное; 7) и 8) рефлексивное, симметричное, транзитивное и т.д.

6. 1) $\delta_\alpha=\rho_\alpha=\mathbb{N}$, симметричное; 2) $\delta_\alpha=\rho_\alpha=\mathbb{N}$, рефлексивное; 3) $\delta_\alpha=\rho_\alpha=\mathbb{N}$, симметричное, антирефлексивное; 4) $\delta_\alpha=\{1,4,9,\ldots,n^2,\ldots\}$, $\rho_\alpha=\mathbb{N}$, антисимметричное; 5) $\delta_\alpha=\rho_\alpha=\mathbb{N}$, рефлексивное, симметричное, транзитивное; 6) $\delta_\alpha=\rho_\alpha=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, антирефлексивное, симметричное; 7) $\delta_\alpha=\mathbb{N}$, $\rho_\alpha=\{3,4,5,\ldots\}$, антирефлексивное, симметричное; 8) $\delta_\alpha=\rho_\alpha=\mathbb{N}$, рефлексивное, антисимметричное, транзитивное; 9) $\delta_\alpha = I\!N$, $\rho_\alpha = \{3,4,5,\ldots\}$, антирефлексивное, антисимметричное, транзитивное; 10) $\delta_\alpha = I\!N$, $\rho_\alpha = \{0,2,4,\ldots\}$, антисимметричное; 11) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = I\!N$, рефлексивное, симметричное, транзитивное; 12) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = I\!N$, симметричное.

9. 1) $\hat{a} = \{a, e/a\}$, $a \in I\!R$, $a \neq e/a$; 2) $a = \sqrt{e}$, имеем $\hat{a} = \{\sqrt{e}\,\}$.

10. $\hat{a} = \{x \in I\!R | x = a + 2k\pi$ либо $x = \pi - a + 2m\pi,\ k, m \in \mathbf{Z}\}$.

11. а) да; б) $\hat{a} = \{a, 2-a\}$, $\hat{1} = \{1\}$, $\hat{8} = \{8\}$.

12. 1) и 2) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = I\!N$, $\alpha \circ \alpha = \alpha$, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = I\!N^2$; 3) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = I\!R$, $\alpha^{-1} = \alpha$, $\alpha \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} = I\!R^2$; 4) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = I\!R$, $\alpha \circ \alpha = \{(x,y) \in I\!R^2 | 4x \geq 9y\}$, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = I\!R^2$; 5) $\delta_\alpha = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\rho_\alpha = \left[-1; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \circ \alpha = \{(x,y) \in I\!R^2 | \sin(\sin x) \leq y\}$, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]^2$, $\alpha^{-1} \circ \alpha = \{(x,y) \in I\!R^2 | x, y \in [-1; \pi/2]\}$.

15. $\varphi(R) = [-1;1]$; $\varphi((0;\pi)) = (0;1]$; $\varphi^{-1}([-1;0]) = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]$; $\left\{(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi | n \in \mathbf{Z}\right\}$; $\{\pi/2 + 2k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$; $\varnothing$.

16. B; $\{b,d\}$; $\{b,c,d\}$; $\{a,b,e\}$; $\{3,5,7,4,6\}$; $\{6,9\}$; $\{2,8\}$.

18. $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$; $\{1,2,3\}$.

23. 1), 3), 5) и 7) биективные; 2), 4), 6), 8) не являются биективными; 9) и 11) – инъективными; 10) не является инъективным; 12), 14) и 15) сюръективными; 13) не является сюръективным.

29. 1) $u(x) = 4x - 9$, $v(x) = 7x^5 + 4$, $f(x) = (v \circ u)(x)$; 2) $u(x) = x^2 + 3x$, $v(x) = x^{2/3} + x^{1/3} - 7$, $f(x) = (v \circ u)(x)$; 3) $u(x) = x^2 - 3$, $v(x) = 1/\sqrt{x}$, $f(x) = (v \circ u)(x)$ и т.д.

30. 1) $(f \circ g)(x) = x + 1 = (g \circ f)(x)$; 4; 4; 2) $(f \circ g)(x) = (x-3)^2 + 8$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 5$; 8; 14; 3) $(f \circ g)(x) = f(x) = g(x)$; 3; 3; 4) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x$, $(g \circ f)(x) = x^2$; 12; 9; 5) $(f \circ g)(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$, $(g \circ f)(x) = 2x^4 + 4x^2$; 129; 360; 6) $(f \circ g)(x) = x^6 = (g \circ f)(x)$; 729; 729; 7) $(f \circ g)(x) = 4x^4$, $(g \circ f)(x) = -2x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 8x - 3$; 4; -1; 8) $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 18x + 29$, $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 1$; 50; 2 etc.

31. 1) 9; 2) 3; 3) 8; 4) 4; 5) 12; 6) 16; 7) -9; 8) -7; 9) 2.25; 10) 0,75; 11) $6 + 4\sqrt{2}$; 12) $27 + 18\sqrt{2}$; 13) $9c^2$; 14) $3c - 3$; 15) $9c^2 - 18c + 9$; 16) $9c^2 - 18c + 9$.

32. 1), 3), 4), 5) да; 2), 6), 7), 8) нет.

33. 1) $f^{-1}(4) = 3$; 2) $f^{-1}(6) = 0.5$; 3) $f^{-1}(b) = a$; 4) $f^{-1}(2) = a + 1$; 5) $f^{-1}(p) = m + n$.

34. 1) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x-1}$; 2) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-2}$; 3) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$; 4) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 5) $f^{-1}(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 6) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; 7) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$; 8) $f^{-1}(x) = (x^2+2)^2 - 2$; 9) $f^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 10) $f^{-1}(x) = \dfrac{4(\sqrt{x}+2)^2}{1-(\sqrt{x}+2)^2}$.

36. 1) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x \geq 2, \\ 4-x, & x < 2, \end{cases}$ $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ 2-x, & x < 1. \end{cases}$

2) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} (4x-2)^2 - 1, & x \leq 0, \\ (3x^2-2)^2 - 1, & x \in (0; \sqrt{2/3}], \\ -5(3x-2)^2 - 1, & x > \sqrt{2/3}; \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 3(x^2-1) - 2, & x < -1, \\ 4(x^2-1) - 2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 4(-5x-1) - 2, & x > 0. \end{cases}$

Глава III

1. 42. **2.** 1140. **3.** 364. **4.** 124. **5.** $30! - 2 \cdot 29!$ **6.** 2520. **7.** 204. **8.** 2027025. **9.** 105. **10.** $30^2 \cdot 10^4$. **11.** $n \cdot m \cdot k$. **12.** $2(P_5)^2 = 2 \cdot (120)^2$. **13.** $2(P_6)^2 = 2 \cdot (720)^2$. **14.** $\overline{A_3^7} = 3^7 \cdot 15$. **15.** $A_3^2 \cdot A_5^4 = 120$. **16.** $4 \cdot 7^3 = 1372$. **18.** $C_{20}^6 \cdot \overline{P}_6$; $C_{20}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{20}^1$. **19.** 62. **20.** $0.5C_4^2 \cdot C_{12}^6 = 2772$. **36.** 4. **37.** 5. **38.** 5. **39.** 5. **40.** 3. **41.** 14. **42.** 7. **43.** 5. **44.** 7. **45.** 10. **46.** 7. **47.** 4. **48.** 11. **49.** 5. **50.** 7. **51.** 8. **52.** 4. **53.** 10. **54.** 10. **55.** 8. **56.** 9. **57.** 3. **58.** 3. **59.** 13. **60.** 10. **61.** 9. **62.** 9. **63.** 8. **64.** 8. **65.** 9. **66.** 10. **67.** 1; 3. **68.** $\varnothing$. **69.** 3. **70.** 9; 10. **71.** 19. **72.** 10. **73.** (5,3). **74.** (8,3). **75.** (7,3). **76.** (7,3). **77.** (34,14). **78.** (15,7). **79.** (8,3). **80.** (10,4). **81.** $\left(\dfrac{2}{C_n^k}, \dfrac{k(k-1)(2k-n)}{n(n-1)^2}\right)$. **82.** $\varnothing$. **83.** $\{3,4,5,6,7,8,9\}$. **84.** $\{1,2,3,4,5,6\}$. **85.** $\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$. **86.** $\{x > 11 | x \in \mathbb{N}\}$. **87.** $\{7 \leq x < 11 | x \in \mathbb{N}\}$. **88.** $\{1 \leq x \leq 10 | x \in \mathbb{N}\}$. **89.** $\{9 < x < 18, x \in \mathbb{N}\}$. **90.** $\{5,6,7\}$. **91.** $\{0,1,2,3,4,5\}$. **92.** $\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$. **93.** $\{6,7,8,9\}$. **94.** $\{x > 14 | x \in \mathbb{N}\}$. **95.** $\{x \geq 2 | x \in \mathbb{N}\}$. **96.** $\{x \geq 12 | x \in \mathbb{N}\}$. **97.** $\{5, 6, \ldots\}$. **98.** $\{10\}$. **99.** $\{3, 4, \ldots, 13\}$. **100.** $\{2, 3, 4, \ldots, 9\}$. **101.** $\{n \geq 8 | n \in \mathbb{N}\}$. **102.** $\{5,6,7,8,9,10\}$. **103.** $\{1,2,3,\}$. **104.** $\{2 \leq x \leq 36 | x \in \mathbb{N}\}$. **105.** $\varnothing$. **106.** $\varnothing$. **107.** $1120x^7 \cdot \sqrt[3]{x}$. **108.** $70x^4y^4$. **109.** 12.

110. 240. **111.** $70(1-x^2)^2$. **112.** $m = \dfrac{22k+15}{7}$, наименьшее значение $k = 6$, тогда $m = 21$. **113.** $C_{16}^6 \cdot x^3$. **114.** $T_6 = C_{15}^6$. **115.** $T_5 = C_{12}^5 \cdot 6^{-7}$. **116.** $T_9 = C_{17}^8$. **117.** $T_{1378} = C_{1989}^{1377} \cdot 2^{1377}$. **118.** $T_3 = 55z^{50/3}$. **119.** $C_{35}^{32} b^6 a^{-12}$. **120.** $C_{12}^4 = T_4$. **121.** $84x^{-5/2}$. **122.** $(2,3,5)$. **123.** 7. **124.** $T_{14+1} = 36C_{24}^{10}$. **125.** 26. **126.** $\{T_9, T_{10}, T_{11}\}$ и $\{T_{14}, T_{15}, T_{16}\}$. **127.** $T_2 = C_{18}^2 \cdot x^{6.5} = 153x^{6.5}$. **128.** 2. **129.** $5/8 < x < 20/21$. **130.** $\{T_0, T_4, T_8\}$. **131.** 1. **132.** $T_7 = 28ab^2$. **133.** $\{-1, 2\}$. **134.** $\{0, 2\}$. **135.** $T_{1421} = C_{1988}^{1420} \cdot 2^{1420}$. **136.** $\{T_1, T_{16}, T_{31}\}$. **137.** $n = 8$, имеем $T_1 = y^4$, $T_5 = \dfrac{35}{8}y$; $n = 4$, имеем $T_1 = y^2$. **138.** 10.

Список литературы

1. *Goian I., Grigor R., Marin V.* Bacalaureat "Matematică" 1993 – 1995. Republica Moldova. – Chişinău: "Amato" S.R.L., 1996.
2. *Goian I., Grigor R., Marin V.* Bacalaureat "Matematică" 1996. Republica Moldova. – Chişinău: Evrica, 1997.
3. *Ionescu-Ţău C., Muşat Şt.* Exerciţii şi probleme de matematică pentru clasele IX – X. – Bucureşti: Editura didactică şi pedagogică, 1978.
4. *Militaru C.* "Algebra", Exerciţii şi probleme pentru liceu şi admitere în facultate. – Bucureşti: Editura "Alux" S.R.L, 1992.
5. *Năstăsescu C., Niţă C., Popa S.* Matematică "Algebra", manual pentru clasa X-a. – Bucureşti: Editura didactică şi pedagogică, 1994.
6. *Petrică I., Lazăr I.* Teste de matematică pentru treapta I-a şi a II-a de liceu. – Bucureşti: Albatros, 1981.
7. *Sacter O.* Culegere de probleme de matematică propuse la examenele scrise de maturitate şi de admitere în institute şi facultăţi. – Bucureşti: Editura tehnică, 1963.
8. *Stamate I., Stoian I.* Culegere de probleme de algebră pentru licee. – Bucureşti: Editura didactică şi pedagogică, 1971.
9. *Şahno C.I.* Culegere de probleme de matematică elementară / Traducere din limba rusă de I. Cibotaru. – Chişinău: Lumina, 1968.
10. *Цыпкин А.Г., Пински А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983.
11. *Ляпин С.Е. Баранова И.В., Борчугова З.Г.* Сборник задач по элементарной алгебре – М.: Просвещение, 1973.

СОДЕРЖАНИЕ

CARTIER
educațional
ISBN 9975-79-041-0
9 789975 790413