DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2011.02.026

第24卷第2期 纺织高校基础科学学报 Vol. 24, No. 2
2011年6月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES June, 2011

文章编号:1006-8341(2011)02-0250-03

Smarandache kn 数字数列及其一类均值性质

苟 素

(西安邮电学院 理学院,陕西 西安 710121)

摘要: $\forall k\in \mathbf{N}_+$, $1<k\leqslant 9$,数列$\{a(k,n)\}$称作Smarandache kn数字数列,如果该数列中的每一个数都可以分成两部分,那么第二部分是第一部分的k倍. 例如$3n$数字数列$\{a(3,n)\}$定义为$\{13, 26, 39, 412, 515, 618, 721, 824, \cdots\}$. 利用初等及组合方法研究Smarandache kn数字数列的一类均值性质,并给出几个有趣的渐近公式.

关键词: Smarandache kn数字数列; 初等方法; 组合方法; 均值; 渐近公式

中图分类号: O 156.4 **文献标识码:** A

1 引言及结论

$\forall k\in \mathbf{N}_+$,著名的Smarandache kn数字数列$\{a(k,n)\}$定义为这样的数集,该集合中的每一个数都可以分成两部分,使得第二部分是第一部分的k倍. 例如Smarandache $3n$数字数列$\{a(3,n)\}=\{13, 26, 39, 412, 515, 618, 721, 824, \cdots\}$,即就是该数列的每一个数都可以分为两部分,第二部分是第一部分的3倍. 这一数列是美籍罗马尼亚著名数论专家F. Smarandache教授提出的[1-2],同时他建议人们研究该数列的性质. 关于这一问题,已引起了不少学者的注意,并作出了一些研究成果[3-8]. 例如文献[4]中曾猜测Smarandache $3n$数字数列中没有完全平方数,文献[4]证明了

(a) 当n为无平方因子数时,$a(3,n)$不可能是完全平方数;

(b) 当n为完全平方数时,$a(3,n)$不可能是完全平方数;

(c) 如果$a(3,n)$是一个完全平方数,那么有

$$n=2^{2\alpha_1}\cdot 3^{2\alpha_2}\cdot 5^{2\alpha_3}\cdot 11^{2\alpha_4}\cdot n_1, (n_1, 330)=1.$$

文献[3]中的结论虽然没有完全解决文献[4]的猜想,但是为猜想的正确性提供了重要依据,揭示了一些研究该问题的简单思路和方法,也从另一方面显示出Smarandache $3n$数字数列的一些内在性质.

另一方面,文献[5]研究了$\ln a(3,n)$的均值性质,证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant N}\ln a(3,n)=2N\cdot \ln N+O(N).$$

关于这一数列的其他性质,至今似乎还没有人研究,研究这个数列的性质是有意义的,至少可以反映出这些特殊数列的特征及分布性质. 此外,确定文献[4]猜想的真伪也是一个很有意义的研究课题. 全文所涉及的初等数论知识可参见文献[9]. 本文利用初等及组合方法研究了$\frac{n}{a(k,n)}$的均值性质,并给出了

收稿日期:2010-10-26

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅专项基金资助项目(08JK433)

作者简介:苟素(1972-),女,陕西省凤翔县人,西安邮电学院副教授. E-mail: gs1013@xupt.edu.cn

几个有趣的渐近公式.

定理 1　设 $k \in \mathbf{N}_+$，$2 \leqslant k \leqslant 5$，则对任意充分大的正数 x，有渐近公式

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{n}{a(k,n)} = \frac{9}{k \cdot 10 \cdot \ln 10} \ln x + O(x).$$

定理 2　设 $k \in \mathbf{N}_+$，$6 \leqslant k \leqslant 9$，则当实数 x 充分大时，仍有渐近公式

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{n}{a(k,n)} = \frac{9}{k \cdot 10 \cdot \ln 10} \ln x + O(x).$$

特别当 $k = 3$ 及 6 时，由定理还可以推出下面推论：

推论 1　对任意充分大的正数 x，有渐近公式

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{n}{a(3,n)} = \frac{3}{10 \cdot \ln 10} \ln x + O(x).$$

推论 2　对任意充分大的正数 x，有渐近公式

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{n}{a(6,n)} = \frac{3}{20 \cdot \ln 10} \ln x + O(x).$$

显然这几个渐近公式不是十分精确，是否存在更精确的渐近公式仍然是一个公开的问题，将是继续研究的目标.

2　定理的证明

只证明定理 1 中 $k = 2$ 及 3 的情况，类似地可以推出定理 1 中 $k = 4$，5 及定理 2. 首先证明定理 1 中 $k = 2$. 考虑到 $a(2,n)$ 的结构，设 n 的十进制表示为 k 位数，即就是 $n = b_k b_{k-1} \cdots b_2 b_1$，其中 $1 \leqslant b_k \leqslant 9$，$0 \leqslant b_i \leqslant 9$，$i = 1,2,\cdots,k-1$. 于是由乘法的进位法则可知，当 $10^{k-1} \leqslant n \leqslant 5 \cdot 10^{k-1} - 1$ 时，$2n$ 为 k 位数；当 $5 \cdot 10^{k-1} \leqslant n \leqslant 10^k - 1$ 时，$2n$ 为 $k+1$ 位数. 由 $a(2,n)$ 的定义立刻得到 $a(2,n) = n \cdot (10^k + 2)$，或者 $a(2,n) = n \cdot (10^{k+1} + 2)$. 对任意充分大的正数 x，显然 $\exists M \in \mathbf{N}_+$ 使得

$$5 \cdot 10^M \leqslant x < 5 \cdot 10^{M+1}, \tag{1}$$

于是有恒等式

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{n}{a(2,n)} = {} & \sum_{n=1}^{4} \frac{n}{a(2,n)} + \sum_{n=5}^{49} \frac{n}{a(2,n)} + \sum_{n=50}^{499} \frac{n}{a(2,n)} + \sum_{n=500}^{4999} \frac{n}{a(2,n)} + \\
& \cdots + \sum_{n=5 \cdot 10^{M-1}}^{5 \cdot 10^M - 1} \frac{n}{a(2,n)} + \sum_{5 \cdot 10^M \leqslant n \leqslant x} \frac{n}{a(2,n)} = \\
& \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{10+2} + \sum_{n=5}^{49} \frac{1}{10^2+2} + \sum_{n=50}^{499} \frac{1}{10^3+2} + \sum_{n=500}^{4999} \frac{1}{10^4+2} + \\
& \cdots + \sum_{n=5 \cdot 10^{M-1}}^{5 \cdot 10^M - 1} \frac{1}{10^{M+1}+2} + \sum_{5 \cdot 10^M \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{10^{M+2}+2} = \\
& \frac{5-1}{10+2} + \frac{50-5}{10^2+2} + \frac{500-50}{10^3+2} + \frac{5000-500}{10^4+2} + \\
& \cdots + \frac{5 \cdot 10^M - 5 \cdot 10^{M-1}}{10^{M+1}+2} + O\left(\frac{x - 5 \cdot 10^M}{10^{M+2}+2}\right) = \\
& \frac{9 \cdot 10}{2 \cdot (10^2+2)} + \frac{9 \cdot 10^2}{2 \cdot (10^3+2)} + \frac{9 \cdot 10^3}{2 \cdot (10^4+2)} + \cdots + \frac{9 \cdot 10^M}{2 \cdot (10^{M+1}+2)} + O(1) = \\
& \frac{9 \cdot (10^2+2-2)}{20 \cdot (10^2+2)} + \frac{9 \cdot (10^3+2-2)}{20 \cdot (10^3+2)} + \frac{9 \cdot (10^4+2-2)}{20 \cdot (10^4+2)} + \\
& \cdots + \frac{9 \cdot (10^{M+1}+2-2)}{20 \cdot (10^{M+1}+2)} + O(1) = \\
& \frac{9}{20} M + O\left(\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{10^m}\right) + O(1) = \frac{9}{20} M + O(1).
\end{aligned} \tag{2}$$

注意到式(1),取对数后有估计式 $M\ln 10+\ln 5\leqslant x<\ln 5+(M+1)\ln 10$ 或者 $M=\frac{1}{\ln 10}\ln x+O(1)$. 所以由式(2)得到渐近公式 $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a(k,n)}=\frac{9}{20\cdot\ln 10}\ln x+O(x)$. 于是证明了定理1中 $k=2$ 的情况.

现在证明定理1中 $k=3$ 的情况. 考虑到数列 $a(3,n)$ 的结构,设 n 的十进制表示为 k 位数,即就是 $n=b_kb_{k-1}\cdots b_2b_1$,其中 $1\leqslant b_k\leqslant 9$, $0\leqslant b_i\leqslant 9$, $i=1,2,\cdots,k-1$. 于是由乘法的进位法则可知,当 $\underbrace{333\cdots 3}_{k-1}4\leqslant n\leqslant\underbrace{333\cdots 3}_{k}$ 时,$3n$ 为 k 位数;当 $\underbrace{333\cdots 3}_{k}4\leqslant n\leqslant\underbrace{333\cdots 33}_{k+1}$ 时,$3n$ 为 $k+1$ 位数. 于是当 n 为 k 位数时,由 $a(3,n)$ 的定义得到 $a(3,n)=n\cdot(10^k+3)$,或者 $a(3,n)=n\cdot(10^{k+1}+3)$. 对任意充分大的正数 x,显然 $\exists M\in\mathbf{N}_+$,使得

$$\underbrace{333\cdots 33}_{M}\leqslant x<\underbrace{333\cdots 33}_{M+1},\tag{3}$$

于是有恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a(3,n)}&=\sum_{n=1}^{3}\frac{n}{a(3,n)}+\sum_{n=4}^{33}\frac{n}{a(3,n)}+\sum_{n=34}^{333}\frac{n}{a(3,n)}+\sum_{n=334}^{3333}\frac{n}{a(3,n)}+\\&\cdots+\sum_{n=\frac{1}{3}\cdot(10^{M-1}-1)+1}^{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)}\frac{n}{a(3,n)}+\sum_{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)+1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a(3,n)}=\\&\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{10+3}+\sum_{n=4}^{33}\frac{1}{10^2+3}+\sum_{n=34}^{333}\frac{1}{10^3+3}+\sum_{n=334}^{3333}\frac{1}{10^4+3}+\\&\cdots+\sum_{n=\frac{1}{3}\cdot(10^{M-1}-1)+1}^{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)}\frac{1}{10^M+3}+\sum_{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)+1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{10^{M+1}+3}=\\&\frac{3}{10+3}+\frac{33-3}{10^2+3}+\frac{333-33}{10^3+3}+\frac{3333-333}{10^4+3}+\\&\cdots+\frac{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)-\frac{1}{3}(10^{M-1}-1)}{10^M+3}+O\left(\frac{x-\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)}{10^{M+1}+3}\right)=\\&\frac{3\cdot 1}{10+3}+\frac{3\cdot 10}{10^2+3}+\frac{3\cdot 10^2}{10^3+3}+\frac{3\cdot 10^3}{10^4+3}+\cdots+\frac{3\cdot 10^{M-1}}{10^M+3}+O(1)=\\&\frac{3\cdot(10+3-3)}{10\cdot(10+3)}+\frac{3\cdot(10^2+3-3)}{10\cdot(10^2+3)}+\frac{3\cdot(10^3+3-3)}{10\cdot(10^3+3)}+\frac{3\cdot(10^4+3-3)}{10\cdot(10^4+3)}+\\&\cdots+\frac{3\cdot(10^{M+1}+3-3)}{10\cdot(10^M+3)}+O(1)=\\&\frac{3}{10}M+O\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{10^m}\right)+O(1)=\frac{3}{10}M+O(1).\end{aligned}\tag{4}$$

注意到式(3)即是 $\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)\leqslant x<\frac{1}{3}\cdot(10^{M+1}-1)$,于是有估计式 $M=\frac{1}{\ln 10}\ln x+O(1)$. 所以由式(4)得到渐近公式 $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a(3,n)}=\frac{3}{10\cdot\ln 10}\ln x+O(x)$. 于是完成了定理1中 $k=3$ 的证明.

利用同样的方法也可以推出定理1中 $k=4,5$ 的结论. 至于定理2的证明,和定理1的证明类似,只是在求和中对 n 的分法不同,这里就不一一举例.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] SMARANDACHE F. Sequences of numbers involved in unsolved problems [M]. Phoenix: Hexis, 2006.
[3] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

(下转第269页)

DU Qing-li, *REN Fang-guo*

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: In order to solve an inverse problem on the matrix, the inverse proposition of Poincaré separation theorem with equality is investigated by using the technique of contracting matrice and the ideas of classification and transformation. The necessary conditions which equalities hold are obtained. Using this result, some nature of the matrix can be obtained by the characteristics of its eigenvalues.

Key words: Hermite matrix; unitary matrix; Poincaré separation theorem

编辑、校对: 黄燕萍

(上接第 252 页)

[4] WU Nan. On the Smarandache 3n-digital sequence and the Zhang Wenpeng's conjecture [J]. Scientia Magna, 2008, 4(4): 120-122.

[5] 苟素. Smarandache 3n 数字数列及其它的渐进性质 [J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学版, 2010, 39(6): 121-122.

[6] 吕忠田. 关于 F. Smarandache 函数与除数函数的一个混合均值 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2007, 20(3): 234-236.

[7] 郭艳春, 路玉麟. 关于 Sarandache 素数可加补数列 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(1): 128-130.

[8] 武楠. 关于 Sarandache 伪偶数序 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(3): 378-390.

[9] TOM M Apostol. Introduction to analytical number theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

The Smarandache *kn*-digital sequence and its mean value properties

GOU Su

(School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121, China)

Abstract: For any positive integer $1 < k \leqslant 9$, the sequences $\{a(k,n)\}$ is called the Smarandache kn-digital sequence, if the digital of $a(k,n)$ can be partitioned into two groups such that the second is k times bigger than the first. For example, $\{a(3,n)\} = \{13, 26, 39, 412, 515, \cdots\}$ is called the Smarandache $3n$-digital sequence. One kind mean value of the Smarandache kn-digital sequence is studied by the elementary and combinational method, and severel interesting asymptotic formulas are given.

Key words: the Smarandache kn-digital sequence; elementary method; combinational method; mean value; asymptotic formula

编辑、校对: 黄燕萍