Smarandache p 次方阶数的计算

张　瑾

(西安文理学院信息工程学院 数学系,陕西 西安 710065)

摘　要:对于奇素数 p 和正整数 n,设 $z_n=\min\{m\mid m\in\mathbf{N},n^{pm}\equiv 1(\bmod (n+1)^p)\}$,称为 n 的 Smarandache p 次方阶数.运用初等方法给出了 z_n 的计算公式,并且纠正了现有结果中的错误.

关键词:同余;Smarandache p 次方阶数;计算公式

中图分类号:O 156.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001—8735(2015)04—0432—03

0　引言

设 N 是全体正整数的集合.对于奇素数 p 和正整数 n,设

$$z_n=\min\{m\mid m\in\mathbf{N},n^{pm}\equiv 1(\bmod (n+1)^p)\},\tag{1}$$

称为 n 的 Smarandache p 次方阶数[1].对此,文献[2]解决了 z_n 在 $p=3$ 时的计算问题.最近,文献[3]讨论了 $p=5$ 时的情况,认为对一般的奇素数 p,z_n 的计算是一个复杂的问题.应该指出的是,文献[3]给出的部分结果是错的.例如,当 $p=5$ 且 $n=5$ 时,因为 $n\equiv 5(\bmod 10)$,所以根据文献[3]定理 1 的情况(a)可知,$z_5=6^4=1\,296$.但是,由于 $5^8-1=2^5\times 12207$,所以由 $5^8-1\mid 5^{648}-1$ 和 $3^5\mid 5^{648}-1$ 可知 $6^5\mid 5^{648}-1$,可得 $z_5\leqslant 648$,与文献[3]所得结果不同.

对于给定的素数 q 和正整数 a,存在唯一的非负整数 t 可使

$$q^t\mid a,q^{t+1}\nmid a.\tag{2}$$

这样的 t 称为 q 在 a 中的次数,记作 $\mathrm{ord}_q a$.同时,(2)式中的两个整除性关系通常合并记作 $q^t\Vert a$[4].本文运用初等方法,对于一般的奇素数 p 完整地解决了 z_n 的计算问题.

定理　当 $n>1$ 时,

$$z_n=\begin{cases}(n+1)^{p-1},\ n\not\equiv 1(\bmod 4)\text{ 且 }n\not\equiv -1(\bmod P),\\ \dfrac{(n+1)^{p-1}}{p},\ n\not\equiv 1(\bmod 4)\text{ 且 }n\equiv -1(\bmod P),\\ \dfrac{(n+1)^{p-1}}{2^d},\ n\equiv 1(\bmod 4)\text{ 且 }n\not\equiv -1(\bmod P),\\ \dfrac{(n+1)^{p-1}}{2^d p},\ n\equiv 1(\bmod 4)\text{ 且 }n\equiv -1(\bmod P).\end{cases}\tag{3}$$

其中
$$d=\min\{p-2,\mathrm{ord}_2(n-1)-1\}.\tag{4}$$

1　若干引理

引理 1　设 q 是素数,i 是大于 1 的正整数.如果 $q^t\Vert i$,则

$$\begin{cases}t=i-1,\ q=2\text{ 且 }i=2,\\ t<i-1,\ \text{其他}.\end{cases}\tag{5}$$

证明　因为 $q^t\Vert i$,所以由(2)式可知 $q^t\mid i$,故有 $i\geqslant q^t$.

如果 $t>i-1$,则因 $t\geqslant i>1$,所以由 $i\geqslant q^t$ 可以得出

收稿日期:2014-11-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11371291);陕西省教育厅资助项目(2013JK0573)

作者简介:张　瑾(1980—),女,陕西省西安市人,西安文理学院讲师,主要从事数论教学与研究,E-mail:m18700931869@163.com.

$$i \geqslant q^i \geqslant 2^i = (1+1)^i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} > \binom{i}{0} + \binom{i}{1} = i+1 > i$$

这一矛盾，故必有 $t \leqslant i-1$.

如果 $t = i-1$，则当 $i \geqslant 3$ 时，由 $i \geqslant q^t$ 可以得出

$$i \geqslant q^{i-1} \geqslant 2^{i-1} = (1+1)^{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j} \geqslant \binom{i-1}{0} + \binom{i-1}{1} + \binom{i-1}{i-1} = i+1 > i$$

这一矛盾. 因此，如果 $t = i-1$，则必有 $i = 2$，并且由 $i \geqslant q^t$ 可知仅有 $q = 2$. 于是由 $t \leqslant i-1$ 可知，除了 $q = 2$ 且 $i = 2$ 这一情况外，必有 $t < i-1$. 证毕.

引理 2　设 q 是素数，a 和 k 是正整数. 如果

$$q^r \| a, q^s \| k,\ r, s \in N, \tag{6}$$

则除了 $q = 2$ 且 $r = 1$ 这一情况外，必有

$$q^s \| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \binom{k}{i} a^{i-1}, \lambda_i \in \{\pm 1\},\ i = 1, \cdots, k. \tag{7}$$

证明　由(6)式可知

$$q^s \| \lambda_1 \binom{k}{1}, \tag{8}$$

根据二项式系数的定义可知

$$\lambda_i \binom{k}{i} a^{i-1} = \lambda_i k \binom{k-1}{i-1} \frac{a^{i-1}}{i},\ i = 2, \cdots, k, \tag{9}$$

其中 $\binom{k-1}{i-1}$ 是整数. 当 $i \geqslant 2$ 时，由(6)式可知 $q \mid a$；又由引理 1 可知，除了 $q = 2$ 且 $r = 1$ 这一情况外，分数 $\frac{a^{i-1}}{i}$ 约分后的分子必为 q 的倍数. 因此，由(6)式和(9)式可知，除了 $q = 2$ 且 $r = 1$ 这一情况外，

$$\lambda_i \binom{k}{i} a^{i-1} \equiv 0 (\bmod q^{s+1}),\ i = 2, \cdots, k, \tag{10}$$

于是，由(8)式和(9)式即得(7)式. 证毕.

引理 3[2]　当 $n > 1$ 时，z_n 必为偶数.

2　定理的证明

当 $n > 1$ 时，设 m 适合

$$n^{pm} \equiv 1 (\bmod (n+1)^p). \tag{11}$$

因为由引理 3 可知 m 是偶数，故由(11)式可得

$$\frac{n^{pm}-1}{n+1} \equiv \frac{((n+1)-1)^{pm}-1}{n+1} \equiv -\binom{pm}{1} + \binom{pm}{2}(n+1) - \cdots +$$

$$\binom{pm}{pm}(n+1)^{pm-1} \equiv 0 (\bmod (n+1)^{p-1}). \tag{12}$$

由于 $p-1 > 1$，所以由(12)式可知

$$pm \equiv 0 (\bmod (n+1)). \tag{13}$$

设 q 是 $n+1$ 的素因数，由(13)式可知 q 也是 pm 的素因数，故有

$$q^r \| n+1, q^s \| pm,\ r, s \in N. \tag{14}$$

根据引理 2，由(14)式可知，除了 $q = 2$ 且 $r = 1$ 这一情况外，必有

$$q^s \| \frac{n^{pm}-1}{n+1} = \sum_{i=1}^{pm} (-1)^i \binom{pm}{i} (n+1)^{i-1}. \tag{15}$$

由(14)式可知，$q = 2$ 且 $r = 1$ 这一情况只可能在 $n \equiv 1 (\bmod 4)$ 时出现，所以由(12)式和(14)式可知，当 $n \not\equiv 1 (\bmod 4)$ 时，必有 $s \geqslant r(p-1)$. 此时，取 q 是 $n+1$ 的所有素因数，由(13)式和 $s \geqslant r(p-1)$ 可知，当

$n \not\equiv 1 \pmod 4$ 时，必有

$$pm \equiv 0 \pmod{(n+1)^{p-1}}. \tag{16}$$

因此，根据 z_n 的定义((1) 式)，由(16) 式可得

$$z_n = \begin{cases} (n+1)^{p-1}, & n \not\equiv 1 \pmod 4 \text{ 且 } n \not\equiv -1 \pmod p, \\ \dfrac{(n+1)^{p-1}}{p}, & n \not\equiv 1 \pmod 4 \text{ 且 } n \equiv -1 \pmod p. \end{cases} \tag{17}$$

当 $n \equiv 1 \pmod 4$ 时，从前面的分析可知，对于 $n+1$ 的任何奇素因数 q，(14) 式中的正整数 r, s 仍满足 $s \geqslant r(p-1)$，由此可知

$$z_n = \begin{cases} 2^f \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{p-1}, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ 且 } n \not\equiv -1 \pmod p, \\ \dfrac{2^f}{p}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{p-1}, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ 且 } n \equiv -1 \pmod p, \end{cases} \tag{18}$$

其中 f 是可使

$$n^{2^{\xi}} \equiv 1 \pmod{2^p} \tag{19}$$

成立的最小正整数 ξ. 由于

$$n^{2^{\xi}} - 1 = (n-1)\prod_{j=0}^{\xi-1}(n^{2^j} + 1), \tag{20}$$

其中 $n^{2^j} + 1 \equiv 2 \pmod 4$ $(j = 0, 1, \cdots, \xi - 1)$，故由(20) 式可知

$$2^{\xi + \mathrm{ord}_2(n-1)} \parallel n^{2^{\xi}} - 1. \tag{21}$$

由(21) 式可知，满足(19) 式的正整数 ξ 必定适合

$$\xi \geqslant \max\{1, p - \mathrm{ord}_2(n-1)\}. \tag{22}$$

根据 f 的最小性，由(22) 式可得

$$f = \max\{1, p - \mathrm{ord}_2(n-1)\}. \tag{23}$$

因此，由(4) 式、(18) 式和(23) 式可知

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{(n+1)^{p-1}}{2^d}, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ 且 } n \not\equiv -1 \pmod p, \\ \dfrac{(n+1)^{p-1}}{2^d p}, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ 且 } n \equiv -1 \pmod p. \end{cases} \tag{24}$$

于是，结合(17) 式和(24) 式即得(3) 式. 证毕.

参考文献：

[1] Kashihara K. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. Erhus: Erhus University Press, 1996.

[2] 丁争尚. 关于立方阶数列及其两个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(3): 430-432.

[3] 王晓梅. 关于 Smarandache 五次方阶数列及其性质 [J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(20): 213-215.

[4] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.

The Computation of Smarandache Orders of p-th Powers

ZHANG Jin

(*Department of Mathematics, School of Information Engineering, Xi'an University, Xi'an* 710065, *China*)

Abstract: For any odd prime p and any positive integer n, let $z_n = \min\{m \mid m \in \mathbf{N}, n^{pm} \equiv 1 \pmod{(n+1)^p}\}$, which is called the Smarandache Orders of p-th Power of n. In this paper, using some elementary methods, a formula of z_n is given and certain wrong conclusions in previous results are corrected.

Key words: congruence; Smarandache orders of p-th power; computation formula

【责任编辑 陈汉忠】