DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2008.06.012
西北大学学报(自然科学版)
2008年12月,第38卷第6期,Dec.,2008,Vol.38,No.6
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

一个与Smarandache函数有关的函数方程及其正整数解

李梵蓓

(内蒙古财经学院 统计与数学学院,内蒙古 呼和浩特 010051)

摘要:目的 研究一个包含Smarandache函数的对偶函数及其伪Smarandache函数方程的可解性。方法 利用初等及组合方法。结果 给出了该方程的所有正整数解。结论 证明了该方程的所有奇数解必为奇素数 p 的方幂;而6是该方程惟一的偶数解。

关 键 词:伪Smarandache函数;Smarandache函数的对偶函数;函数方程;正整数解
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2008)06-0892-03

1 引言及结论

对任意正整数 n,著名的F.Smarandache函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$。即 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$。该函数是美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授在他所著的Only Problems, Not Solutions一书中引入的,并建议人们研究它的性质。从 $S(n)$ 的定义容易推出,如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式,那么 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$。由此不难计算出 $S(n)$ 的前几个值为:$S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, …。关于 $S(n)$ 的算术性质,许多学者进行了研究,获得了不少有趣的结果[1-6]。例如徐哲峰研究了 $S(n)$ 的值分布问题,证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子,$\zeta(s)$ 表示Riemann Zeta-函数。

乐茂华研究了 $S(2^{p-1}(2^{p-1}))$ 的下界估计问题[6],给出了估计式

$$S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 2p+1。$$

其中 p 为任意奇素数。

在文献[7]中,J.Sandor引入了Smarandache函数 $S(n)$ 的对偶函数 $S_*(n)$ 如下:$S_*(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $m!\mid n$,即 $S_*(n)=\max\{m: m\in N, m!\mid n\}$。而伪Smarandache函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 n 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$。即 $Z(n)=\min\{m: m\in N, n\mid\frac{m(m+1)}{2}\}$。从 $Z(n)$ 的定义容易推出 $Z(n)$ 的前几个值为:$Z(1)=1$, $Z(2)=3$, $Z(3)=2$, $Z(4)=7$, $Z(5)=4$, $Z(6)=3$, $Z(7)=6$, $Z(8)=15$, $Z(9)=8$, $Z(10)=4$, $Z(11)=10$, $Z(12)=8$, $Z(13)=12$, $Z(14)=7$, $Z(15)=5$, $Z(16)=31$, …。关于 $Z(n)$ 的算术性质,许多学者也进行了研究,获得了不少有趣的结果[8-14]。本文的主要目的是研究函数方程

$$Z(n)+S_*(n)=n \tag{1}$$

的可解性,并利用初等及组合方法获得了这一方程的所有正整数解。亦即证明了下面的定理。

定 理 方程(1)有且仅有一个偶数解 $n=6$,奇数 n 满足方程(1)当且仅当 n 为奇素数 p 的方幂。即 $n=p^k$,其中 $p\geqslant 3$ 为素数,k 为任意正整数。

收稿日期:2008-06-11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:李梵蓓(1953—),女,陕西佳县人,内蒙古财经学院副教授,从事基础数学的教学与研究。
?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　定理的证明

利用初等及组合方法直接给出定理的证明。首先证明对任意奇素数 p及正整数 α, 有

$$Z(p^\alpha) = p^\alpha - 1. \tag{2}$$

事实上设 $Z(p^\alpha) = k$,则由伪 Smarandache函数的定义,有 $p^\alpha \mid \frac{k(k+1)}{2}$,从而推出 $p^\alpha \mid k$或者 $p^\alpha \mid k+1$。当 $p^\alpha \mid k$时,有 $k = p^\alpha \cdot k_1 \geqslant p^\alpha$,当 $p^\alpha \mid k+1$时,有 $k = p^\alpha \cdot k_1 - 1 \geqslant p^\alpha - 1$,从而满足 $p^\alpha \mid \frac{k(k+1)}{2}$的最小正整数 $k = p^\alpha - 1$。即式(2)成立。

现在完成定理得证明。

为简单起见,设 $S_*(n) = m$。显然 $n = 1$不满足方程(1)。于是假定 $n > 1$且满足方程(1)。由伪 Smarandache函数 $Z(n)$的定义知

$$Z(n)\cdot(Z(n)+1) + m\cdot(Z(n)+1) = n\cdot(Z(n)+1).$$

由此式及 $Z(n)$的定义立刻推出 n整除 $m\cdot(Z(n)+1)$,注意到 $m!$整除 n,所以可设

$$m\cdot(Z(n)+1) = kn$$

或者

$$Z(n) = \frac{kn}{m} - 1.$$

将此式代入方程(1),可得

$$\frac{kn}{m} - 1 + m = n.$$

由此及 $S_*(n) = m$的定义知 $m! \mid n$,从而可设 $n = m!\cdot n_1$,于是上式成为

$$k\cdot(m-1)!\cdot n_1 + m - 1 = m!\cdot n_1. \tag{3}$$

在式(3)中有两项能被$(m-1)!$整除,即就是$(m-1)!$整除 $m!$以及$(m-1)!$整除$(m-1)!$,所以由整除的性质知式(3)中的第三项 $m-1$也能被$(m-1)!$整除。显然$(m-1)!$整除 $m-1$当且仅当 $m = 1$, 2或者 3。当 $m = 1$时,由式(3)知 $k = 1$,此时有 $Z(n) = n - 1$,由函数 $Z(n)$的性质及式(2)可知 $Z(n) = n - 1$当且仅当 n为奇素数 p的方幂,即就是 $n = p^\alpha$, p为奇素数, α为正整数。经验证知所有奇素数 p的方幂 p^α都是方程(1)的解。当 $m = 2$时,此时由于 $n > 1$且 n整除 $m(m-1)$,所以 $n = 2$,但是 $n = 2$不是方程(1)的解。当 $m = 3$时, $m(m-1) = 6$,这时结合 n整除 $m(m-1) = 6$以及 $m! = 6$整除 n,立刻推出 $n = 6$和 $m = 3$。经检验知 $n = 6$是方程(1)的一个解。综合以上分析,立刻得到方程(1)有且只有一个偶数解 $n = 6$,所有奇数 n满足方程(1)当且仅当 n为奇素数 p的方幂。

于是,完成了定理的证明。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] LU Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[3] 乐茂华. 关于 Smarandache函数的一个猜想[J]. 黑龙江大学学报:自然科学版, 2007, 24(5): 687-688.

[4] 徐哲峰. 关于 Smarandache函数的值分布[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[5] 朱伟义. 原数函数 $S_p(k)$与 Riemann Zeta函数的关系[J]. 西北大学学报:自然科学版, 2007, 37(3): 345-347.

[6] LE Mohua. A lower bound for $S(2^{p-1}(2^p-1))$[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12(1—3): 217-218.

[7] SANDOR S. On certain generalizations of the Smarandache function[J]. Notes Number Theory and Discrete Mathematics, 1999, 5(2): 41-51.

[8] GORSKI D. The pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-149.

[9] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. Erhus: Erhus University Press, 1996.

[10] LOU Yuanbing. On the pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48-50.

[11] ZHENG Yani. On the Pseudo Smarandache function and its two conjectures[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 50-53.

[12] SANDOR J. On a dual of the pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 18-23.

[13] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社, 2007.

[14] APOSTOL T M. Introduction to Analytical Number Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

(编　辑　亢小玉)

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

A function equation related to the Smarandache function and its positive integer solutions

LI Fan-bei
(School of Mathematics and Statistics, Inner Mongolia Finance and Economics College, Hohhot 010051, China)

Abstract: Aim To study the positive integer solutions of a function equation involving the pseudo Smarandache function and the dual function of the Smarandache function. Methods Using the elementary and combinational method. Results All positive integer solutions are given for the equation. Conclusion It was proxed that the equation has only one even number solution $n=6$, and all odd number n satisfying the equation if and only if $n=p^k$, where $p\geq 3$ be a prime, and k be any positive integer.

Key words: the pseudo Smarandache function; dual function of the Smarandache function; function equation; positive integer solution

·学术动态·

我校承担“陕西省主体功能区划分及规划研究”重大课题

受陕西省政府委托,我校牵头组织“陕西省主体功能区划分及规划研究”工作,我校城市与资源学系李同升教授担任课题组长,获得省上资助经费 110万元人民币。

推进形成主体功能区,按照主体功能定位、调整、完善区域政策和绩效评价,规范空间开发秩序,形成合理的空间开发结构,是在区域发展中落实科学发展观的重大战略举措,是“十一五”促进区域协调发展的一个新思路和新举措,对于缩小区域差距,实现可持续发展,具有重要意义。国家“十一五”规划纲要明确提出,各地要根据资源环境承载能力、现有开发密度和发展潜力,将国土空间划分为优化开发、重点开发、限制开发、禁止开发四类主体功能区,以促进形成经济发展与人口资源环境相协调的空间均衡战略。

划分陕西省主体功能区,是在陕西推进形成合理有序的国土开发空间、构筑一整套保障地区可持续发展的空间规划体系的关键工作。它有利于引导经济布局、人口分布与资源环境承载能力相适应,从而促进人口、经济、资源环境的空间均衡,有利于保护生态环境,从源头上扭转生态环境恶化趋势;有利于加强和改善区域调控,增强调控的有效性,进而实现省委、省政府关于建设西部经济强省、促进陕西各项事业又好又快全面发展的目标具有重要的意义。

根据“陕西省主体功能区划分及规划研究”课题成果,省政府将制定陕西省主体功能区规划方案,报请省人大正式批准后实施,从而以法律的形式规范陕西空间开发秩序,促进陕西合理空间开发结构的形成。

承担“陕西省主体功能区划分及规划研究”课题是我校服务陕西社会经济发展的一次重要的科学实践,也是“以任务带学科”、促进我校地理学科发展的一次重要契机。

(薛 鲍)

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net