文章编号: 1003-2843(2011)05-0696-03

一个关于 Smarandache LCM 函数的猜想

吴莉, 杨仕椿

（阿坝师范高等专科学校数学系, 四川 汶川 623000）

摘　要: 对任意正整数n, Smarandache LCM 函数$SL(n)$定义为最小的正整数k, 使得$n\mid[1, 2, \cdots, k]$, 其中的$[1, 2, \cdots, k]$表示为$1, 2, \cdots, k$的最小公倍数. 本文利用初等的方法, 研究张文鹏教授提出的一个包含Smarandache LCM 的函数的猜想, 并给出了一些新的结论, 改进了参考文献中的结果.

关键词: Smarandache LCM 函数; 猜想; 初等方法

中图分类号: O156.1; O156.4　　　　**文献标识码**: A

doi: 10.3969/j.issn.1003-2483.2011.09.03

1　引言及主要结论

Smarandache LCM 函数$SL(n)$定义为最小的正整数k, 使得$n\mid[1, 2, \cdots, k]$, 其中$[1, 2, \cdots, k]$表示为$1, 2, \cdots, k$的最小公倍数. 例如, $SL(n)$的前几项值依次为$SL(1) = 1$, $SL(2) = 2$, $SL(3) = 3$, $SL(4) = 4$, $SL(5) = 5$, $SL(6) = 3$, $SL(7) = 7$, $SL(8) = 8$, $SL(9) = 9$, $SL(10) = 5$, $SL(11) = 11$, $SL(12) = 4$, $SL(13) = 13$, $SL(14) = 7$, $SL(1) = 5$, $SL(1) = 16$, ··· 从$SL(n)$的定义很容易推出: 如果$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$是$n$的素因子分解式, 那么

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_r^{\alpha_r}\}. \tag{1}$$

关于$SL(n)$的一些性质, 很多学者进行了深入细致的研究[1-11], 得到了许多有趣的性质. 在文献[8]中, 张文鹏教授建议研究如下问题:

问题　设$\sum_{d\mid n}$表示n的所有正因子, 和式$\sum_{d\mid n}\frac{1}{SL(d)}$在什么时候是正整数?

文献[12, 13]中研究了这一问题, 并获得了一些特殊的结论. 例如, 文献[12]中证明了当n为素数方幂或者n为无平方因子的数时, $\sum_{d\mid n}\frac{1}{SL(d)}$不可能是整数. [13]中证明了若$\sum_{d\mid n}\frac{1}{SL(d)}$为整数, 则$n$为 Square-full 数(幂数). 以上研究支持如下猜想:

猜想　和式$\sum_{d\mid n}\frac{1}{SL(d)}$为整数当且仅当$n = 1, 36$.

本文研究了以上问题, 对另外一些特殊类型的整数n, 得出了一些结果. 本文的主要结论是

定理 1　若$n = 4p^{\alpha}$, p为素数, 则当且仅当$n = 36$时, $\sum_{d\mid n}\frac{1}{SL(d)}$为整数.

定理 2　若n的标准分解式为$n = 4p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 且$p_1 < \cdots < p_r$, 则当$r \ge 2$且$p_1 \ge 5$时, $\sum_{d\mid n}\frac{1}{SL(d)}$不是

收稿日期：2011-07-24
作者简介：吴莉（1982-）, 女, 四川崇州人, 讲师, 主要从事代数及数论研究.
基金项目：四川省应用基础研究项目(2009JY0091), 阿坝师专校级科研基金资助项目(ASC10-16).

©1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

整数.

2　定理 1 的证明

若 $p=3$, 则 $n=4\cdot 3^{\alpha}$, 于是当 $\alpha\ge 3$ 时,

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=\sum_{d|3^{\alpha}}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|3^{\alpha}}\frac{1}{SL(2d)}+\sum_{d|3^{\alpha}}\frac{1}{SL(4d)}=$$

$$(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{\alpha}})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{\alpha}})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{\alpha}})=$$

$$2+\frac{2}{3}+3(\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{\alpha}})\ =\ 3+(\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{\alpha-1}}).\tag{2}$$

显然上式不为整数. 当 $\alpha=1,2$ 时, 可直接验证, 仅当 $n=36$ 时, $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=3$ 为整数.

若 $p\ge 5$, 则 $SL(2p^{\alpha})=p^{\alpha}$, $SL(4p^{\alpha})=p^{\alpha}$, 由于 $\alpha\ge 1$, 则

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=\sum_{d|p^{\alpha}}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|p^{\alpha}}\frac{1}{SL(2d)}+\sum_{d|p^{\alpha}}\frac{1}{SL(4d)}=$$

$$(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha}})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha}})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha}})=$$

$$1+\frac{3}{4}+3(\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha}})\ =\ 1+\frac{3}{4}+\frac{3(1-1/p^{\alpha})}{p-1}$$

不为整数, 因此定理 1 得证.

3　定理 2 的证明

令 $n=4n'$, $n'=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 由于 $p_1<\ldots<p_r$, 且 $p_1\ge 5$, 则当 $\alpha\ge 1$ 时, 有 $SL(p^{\alpha})=p^{\alpha}$, $SL(2p^{\alpha})=p^{\alpha}$, $SL(4p^{\alpha})=p^{\alpha}$, 于是

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(2d)}+\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(4d)}=3\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(d)}+\frac{5}{4}.\tag{3}$$

如果 $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 为整数, 则由(3)可得,

$$\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(d)}=\frac{A}{4}.\tag{4}$$

其中 $A\equiv 1(\bmod 4)$. 但

$$\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(d)}=1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}+\cdots+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_j^{\alpha_j}}+\cdots+\frac{1}{p_r^{\alpha_r}}=\frac{B}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}}.\tag{5}$$

于是由(4), (5)可得,

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}A=4B,\tag{6}$$

这显然是不可能的, 因此, $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 不是整数, 定理 2 得证.

94-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

参考文献

[1] SMARADACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House, 1993,41-42.
[2] DUMITRESCU C V. Seleace. Some solutions and questions in number theory [M], Glendale: Erthus Univ Press,1994.
[3] MONTGOMERY L, Vaughan H R C. The distribution of squarefree numbers, recent progress in analytic number theory[J]. Halberstam H, Hooley C. London Mathematical society, 1981(1): 247-256.
[4] MURTHY A, Some notions on least common multiples[M]. Smarandache Notions Journal, 2001,12: 307-309.
[5] LE M H. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.
[6] LV Z T. On the F.Smarandache LCM function and its mean value[M]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.
[7] JIAN G. Mean value of Smarandache LCM function[M]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 109-122.
[8] ZHANG W P. Elementary number theory[M]. Xi'an: Shanxi Normal University Publishers, 2007.
[9] APOSTOL TOM M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.
[10] PAN C D, Pan C B. The elementary proof the print theory[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1988.
[11] XU Z F. On the mean value of the Smarandache power function[J]. 数学学报, 2006, 49(1): 77-80.
[12] WU Q B. A conjecture involving the Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 26-28.
[13] 朱伟义, 一个包含 F.Smarandache LCM 的函数的猜想[J]. 数学学报, 2008, 51(5): 956-958.

A conjecture involving the Smarandache LCM function

WU Li, YANG Shi-chun

(Department of Mathematics, ABa Teacher's College, Pixian County 611741, P.R.C.)

Abctract: For any positive integer n, the Smarandache LCM function $SL(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n \mid [1, 2, \cdots, k]$, where $[1, 2, \cdots, k]$ denotes the least common multiple of $1, 2, \cdots, k$. The main purpose of this paper is to use the elementary methods to study a conjecture involving the Smarandache LCM function, which is proposed by Zhang Wengpeng in his book *Elementary Number Theory*, and this paper gives some results for this conjecture.

Key words: Smarandache LCM function; elementary method; conjecture

(C)1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net