[基础数学与应用数学研究]

一个包含Smarandache LCM函数的对偶函数的混合均值

杨衍婷
（咸阳师范学院 数学与信息科学学院，陕西 咸阳 712000）

摘　要：研究Smarandache LCM函数的对偶函数 $\overline{\mathrm{SL}}(n)$ 与最小素因子函数 $p(n)$ 的混合均值，利用初等方法及素数的分布性质，通过分区间讨论的方法研究了函数 $p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)$ 的均值性质，并给出了一个有趣的渐近公式。

关键词：Smarandache LCM函数的对偶函数；均值；渐近公式
中图分类号：O156.4　　**文献标识码**：　A　　**文章编号**：1672-2914（2014）02-0009-03

The Hybrid Mean Value Involving the Dual Function of Smarandache LCM Function

YANG Yan-ting
(School of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University,Xianyang 712000，Shaanxi, China)

Abstract: A discussion is made of a hybrid mean value problem involving the famous dual function of Smarandache LCM function and the smallest prime divisor function. By using the elementary method and the distribution property of prime numbers and dividing interval, the mean value property of $[p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)]$ is studied, and an interesting asymptotic formula is given.

Key words: the dual function of Smarandache LCM function; mean value; asymptotic formula

对于任意的正整数 n，著名的Smarandache LCM函数 $\mathrm{SL}(n)$ 定义为最小的正整数 k，使得 $n \mid [1,2,\cdots,k]$，其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数。当 $n>1$，并且 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，$\mathrm{SL}(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{p_i^{\alpha_i}\}$。关于这个函数的性质，许多学者进行了研究，取得了不少重要的结果[1-5]。杨明顺研究了Smarandache函数与Smarandache LCM函数的混合均值问题[2]，得到了渐近公式 $\sum\limits_{n\le x}\frac{S(n)}{\mathrm{SL}(n)}=x+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right)$。Lv Zhongtian研究了 $\mathrm{SL}(n)$ 的均值性质[3]，给出了渐近公式 $\sum\limits_{n\le x}\mathrm{SL}(n)=\frac{\pi^2x^2}{12\ln x}+\sum\limits_{i=2}^{k}\frac{b_ix^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$，其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数。Chen Jianbin研究了 $\mathrm{SL}(n)$ 的值分布问题[4]，证明了渐近公式 $\sum\limits_{n\le x}(\mathrm{SL}(n)-P(n))^2=\frac{2}{5}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right)$，其中，$P(n)$ 表示 n 的最大素因子。本文利用数论中的一些初等方法及素数的算术分布性质，通过分区间讨论研究了函数 $p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)$ 的均值性质，给出了一个较强的渐近公式。

1 定理

设 n 为正整数，Smarandache LCM函数的对偶函数 $\overline{\mathrm{SL}}(n)$ 定义为：$\overline{\mathrm{SL}}(1)=1$，当 $n>1$，并且 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，有 $\overline{\mathrm{SL}}(n)=\min\limits_{1\le i\le k}\{p_i^{\alpha_i}\}$。这个函数的前几项为 $\overline{\mathrm{SL}}(1)=1$，$\overline{\mathrm{SL}}(6)=2$，

收稿日期：2014-02-13
基金项目：咸阳师范学院科研基金项目（13XSYK007）。
作者简介：杨衍婷（1985-），女，陕西西安市人，咸阳师范学院数学与信息科学学院助教，硕士，研究方向为数论与代数。

$\overline{\mathrm{SL}}(12)=3$，$\overline{\mathrm{SL}}(20)=4$，…。设 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子函数，例如，$p(10)=2$，$p(15)=3$，…。本文利用初等方法及素数分布性质，通过分区间讨论的方法研究函数 $p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)$ 的均值性质，并给出了下面的均值公式。

定理1 对于任意的实数 $x>1$，有如下渐近公式

$$\sum_{n\le x}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)=\frac{1}{2}x^2+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_ix^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right),$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k-1)$ 是可计算的常数。

2 定理的证明

为了完成定理的证明，需要下面的两个引理：

引理1 对于任意的实数 $x>1$，有

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_ix}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

证明：参阅文献[6]。

引理2 对于任意的实数 $x>1$，有

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1)。$$

证明：由Abel恒等式[7-8]以及引理1得

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}=\pi(x)\frac{\ln x}{x}-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\pi(t)\cdot\frac{1-\ln t}{t^2}\mathrm{d}t=$$

$$\left(\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)\right)\frac{\ln x}{x}-$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{x}\left(\frac{t}{\ln t}+\frac{t}{\ln^2 t}+O\left(\frac{t}{\ln^3 t}\right)\right)\cdot\frac{1-\ln t}{t^2}\mathrm{d}t=$$

$$\ln x+O(1)+O\left(\int_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{1}{t\ln^2 t}\mathrm{d}t\right)=\ln x+O(1)。$$

以下完成定理1的证明。

设 $\omega(n)$ 表示 n 的所有不同素因子的个数。对于任意的正整数 $n>1$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式，将区间 $(1,x]$ 中的所有正整数 n 分成如下两个集合 A 与 B，即

A:$\omega(n)=1$，即所有 $n=p^\alpha\le x$ 的正整数，其中 p 是素数，α 是任意正整数；

B:$\omega(n)\ge 2$。

由集合 A 与 B 的定义，有

$$\sum_{n\le x}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)=\sum_{n\in A}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)+\sum_{n\in B}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)。$$

当 $n\in A$ 时，$n=p^\alpha$，$\overline{\mathrm{SL}}(n)=p^\alpha$，所以有

$$\sum_{n\in A}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)=\sum_{p^\alpha\le x}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)=$$

$$\sum_{p\le x}p\ln p+\sum_{2\le\alpha\le\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha p\ln p。$$

由Abel恒等式[7-8]以及引理1得

$$\sum_{p\le x}p\ln p=\pi(x)x\ln x-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\pi(t)(\ln t+1)\mathrm{d}t=$$

$$x\ln x\left(\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_ix}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\ln t+1)\left(\frac{t}{\ln t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_it}{\ln^i t}+O\left(\frac{t}{\ln^{k+1}t}\right)\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2}x^2+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_ix^2}{\ln^{i-1}x}-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{a_it}{\ln^{i-1}t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_it}{\ln^i t}+\frac{t}{\ln t}\right)\mathrm{d}t+$$

$$O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)=\frac{1}{2}x^2+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_ix^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k-1)$ 是可计算的常数。

由此可得，$\sum\limits_{p\le\sqrt{x}}p\ln p\ll x$，则

$$\sum_{2\le\alpha\le\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha p\ln p\ll\sum_{2\le\alpha\le\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p\le x^{\frac{1}{2}}}\alpha p\ln p\ll$$

$$\sum_{2\le\alpha\le\frac{\ln x}{\ln 2}}\alpha x\ll x\ln x。$$

从而

$$\sum_{n\in A}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)=\frac{1}{2}x^2+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_ix^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)。$$

当 $n\in B$ 时，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式，且 $p_1<p_2<\cdots<p_r$，则 $r\ge 2$。当 $\alpha_1=1$ 时，$\overline{\mathrm{SL}}(n)=p_1$，当 $\alpha_1\ge 2$ 时，$\overline{\mathrm{SL}}(n)\le p_1^{\alpha_1}$，则由引理2可得

$$\sum_{n\in B}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)\ll\sum_{\substack{p_1m\le x\\ p_1<m}}p_1\ln p_1+$$

$$\sum_{\substack{p_1^\alpha m\le x,\,2\le\alpha\\ p_1<m,\,p_1<p(m)}}\alpha p_1\ln p_1\ll\sum_{p_1\le\sqrt{x}}p_1\ln p_1+$$

$$\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p_1<m\le\frac{x}{p_1^\alpha}}\sum_{p_1\le x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\alpha p_1\ln p_1\ll$$

$$x+\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p_1\le x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\alpha p_1\cdot\frac{x}{p_1^\alpha}\ln p_1\ll$$

$$x+\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p_1\le x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\alpha x\frac{\ln p_1}{p_1}\ll$$

$$x+\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\frac{\alpha}{\alpha+1}x\ln x\ll x\ln^2 x。$$

从而

$$\sum_{n\le x}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)=\sum_{n\in A}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)+$$

$$\sum_{n\in B}p(n)\ln\overline{\mathrm{SL}}(n)=\frac{1}{2}x^2+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_ix^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right),$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k-1)$ 是可计算的常数。

（下转第14页）

的有效介电常数模型对存水构成的复合介质的有效介电常数随温度的变化进行了仿真计算，结果发现：有效介电常数的实部随温度的升高而增大，虚部随温度的升高而减小，给出了温度效应的物理机制。对沙尘暴的有效介电常数随能见度的变化进行了数值计算，结果表明：当能见度较大时，沙尘暴有效介电常数的变化在工程应用上可以忽略不计；基于电场能量守恒研究复合介质的有效介电常数，避免了基于极化强度矢量相等方法的复杂性，如何利用本文算法研究各向异性粒子悬浮构成的复合介质的有效介电常数是下一步要开展的工作。

参考文献：

[1]陈　康，王庆安.用T一矩阵法分析降水粒子在微波段下的Z_{DR}特性[J].气象科学，2000，20(4)：469-474.

[2]Akira Ishimaru. Wave propagation and scattering in random medium[M].New York:Oxford University Press，1997：27-30.

[3]Shvola A H，Kong J A.Effective permittivity of dielectric mixtures[J].IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing，1988，26(4)：420-427.

[4]ITU-R.Specific attenuation model for rain for use in prediction methods[S].ITU-R，2005：838-1.

[5]Stratton J A.Electromagnetic theory[M].New York: Mcgraw Hill Book Company Inc，1941.

[6]Bohren C F，Battan L J.Radar scattering of microwaves by spongy ice spheres[J].J Atomos Sci，1982，39：2623-2628.

[7]刘西川，高太长，秦　健，等.降雨对微波传输特性的影响分析[J].物理学报，2010，59(3)：2156-2163.

[8]王海强.尘暴中的微波衰减和交叉极化[J].电波与天线，1991(6)：18-27.

（上接第10页）

参考文献：

[1]Smarandache F.Only problems, not solutions[M].Chicago: Xiquan Publishing House，1993.

[2]杨明顺.关于Smarandache及Smarandache LCM函数的混合均值[J].西北大学学报：自然科学版，2010，40(5)：772-773.

[3]Lv Zhongtian.On the F Smarandache LCM function and its mean value [J]. Scientia Magna，2007，3(1)：22-25.

[4]Chen Jianbin. Value distribution of the F Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna，2007，3(2)：15-18.

[5]闫晓霞. Smarandache LCM函数与其对偶函数的混合均值[J].内蒙古师范大学学报：自然科学汉文版, 2010, 39(3)：229-231.

[6]潘承洞，潘承彪. 素数定理的证明[M].上海：上海科学技术出版社，1988.

[7]Tom M Apostol. Introduction to analytical number theory [M].New York：Springer-Verlag，1976.

[8]潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M].北京：科学出版社，1988.