一个包含 Smarandache函数与伪 Smarandache函数的方程及其正整数解

李　玲[1]，　姚维利[2]

(1. 陕西工业职业技术学院 基础部，陕西 咸阳 712000; 2. 上海大学 理学院，上海 200444)

摘要：利用初等及组合方法研究了一个包含 Smarandache函数及伪 Smarandache函数方程的可解性，证明了该方程有无穷多个正整数解，并给出了该方程所有正整数解的具体形式.

关键词：Smarandache函数；伪 Smarandache函数；函数方程；正整数解

中图分类号：O156.4　　文献标志码：A　　文章编号：1001－8395(2010)02－0200－03

doi：10.3969/j.issn.1001－8395.2010.02.015

1 引言及结论

对任意正整数 n，著名的 F. Smarandache函数 $S(n)$定义为最小的正整数 m使得 $n\mid m!$，即 $S(n)=\min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m!\}$，此函数是著名数论专家 F. Smarandache在《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的，并建议人们研究它的性质. 从 $S(n)$的定义容易推出：如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示 n的标准分解式，那么 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此也不难计算出 $S(n)$的前几个值为：$S(1)=1$，$S(2)=2$，$S(3)=3$，$S(4)=4$，$S(5)=5$，$S(6)=3$，$S(7)=7$，$S(8)=4$，$S(9)=6$，$S(10)=5$，$S(11)=11$，$S(12)=4$，$S(13)=13$，$S(14)=7$，$S(15)=5$，$S(16)=6$，…. 关于 $S(n)$的各种算术性质，许多学者进行了研究，获得了不少有趣的结果，参阅文献[1－5]. 例如在文献[5]中，研究了和式

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}\tag{1}$$

为整数的问题，并证明了下面 3个结论：

(a) 当 n为无平方因子数时，(1)式不可能是正整数；

(b) 对任意奇素数 p及任意正整数 α，当 $n=p^{\alpha}$且 $\alpha\leqslant p$时，(1)式不可能是正整数；

(c) 对于任意正整数 n，当 n的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\cdot p_k$且 $S(n)=p_k$时，(1)式不可能是正整数.

此外，在文献[6]中，J. Sandor引入了伪 F. Smarandache函数 $Z(n)$如下：$Z(n)$定义为最小的正整数 m，使得 n整除 $\frac{m(m+1)}{2}$，即

$$Z(n)=\min\left\{m:m\in\mathbf{N},n\,\middle|\,\frac{m(m+1)}{2}\right\}.$$

从 $Z(n)$的定义容易推出 $Z(n)$的前几个值为：$Z(1)=1$，$Z(2)=3$，$Z(3)=2$，$Z(4)=7$，$Z(5)=4$，$Z(6)=3$，$Z(7)=6$，$Z(8)=15$，$Z(9)=8$，$Z(10)=4$，$Z(11)=10$，$Z(12)=8$，$Z(13)=12$，$Z(14)=7$，$Z(15)=5$，$Z(16)=31$，…. 关于 $Z(n)$的算术性质，许多学者也进行了研究，获得了不少有趣的结果，参阅文献[7－10]. 本文的主要目的是研究函数方程

$$Z(n)+S(n)=kn\tag{2}$$

的可解性，其中 k为任意正整数，并利用初等及组合方法获得了这一方程的所有正整数解. 具体地说也就是证明了下面的定理：

定理 1　当 $k=1$时，$n=6$、12是方程(2)仅有的两个特殊正整数解；而此时其它正整数 n满足方程(2)当且仅当 $n=p\cdot u$或者 $n=p\cdot 2^{\alpha}\cdot u$，其中 $p\geqslant 7$为素数，$2^{\alpha}\mid p-1$，u是 $\frac{p-1}{2^{\alpha}}$的任意一个大于1的奇数因子.

定理 2　当 $k=2$时，$n=1$是方程(2)的一个特殊解；其它正整数 n满足方程(2)当且仅当 $n=p\cdot u$，

收稿日期：2008－07－21

基金项目：国家自然科学基金(10671155)、陕西省教育厅专项科研基金(09JK336)和上海市优秀青年教师专项科研基金(37－0101－07－704)资助项目

作者简介：李　玲(1977－)，女，讲师，主要从事数论函数的研究

其中$p\geq 5$为素数，u是$\frac{p-1}{2}$的任意一个偶数因子.

注意到，$Z(n)\leq 2n-1$及$S(n)\leq n$，所以当$k>2$时，方程(2)没有正整数解. 从定理1很容易联想到Fermat素数，即形如$F_n=2^{2^n}+1$的素数，其中$n\geq 1$为整数. 例如$F_1=5$，$F_2=17$，$F_3=257$，等等. 关于Fermat数的有关内容，参阅文献[11-12]，这里不再阐述. 由定理1不难推出下面的推论：

推论 当$k=1$时，如果n含有Fermat素因子，则n不可能满足方程(2).

2 定理的证明

利用初等及组合方法来完成定理的证明. 首先证明定理1. 这时$k=1$. 注意到$Z(1)+S(1)=2\neq 1$，$Z(2)+S(2)=5\neq 3$，$Z(3)+S(3)=5\neq 3$，$Z(4)+S(4)=11\neq 4$，$Z(5)+S(5)=9\neq 5$，$Z(6)+S(6)=6$，所以$n=1,\cdots,5$不满足方程(2). $n=6$满足方程(2). 于是当其它n满足方程(2)时一定有$n\geq 7$. 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准分解式，此时由F. Smarandache函数的性质知

$$S(n)=\max_{1\leq i\leq k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\equiv S(p^{\alpha})=u\cdot p,$$

其中p为某一p_i，α为某一α_i，$u\leq\alpha$.

现在注意到$p^{\alpha}|n$及$S(n)=u\cdot p$，所以可设$n=p^{\alpha}\cdot n_1$. 当n满足方程(2)时有

$$Z(n)+u\cdot p=p^{\alpha}\cdot n_1. \qquad (3)$$

首先证明在(3)式中$\alpha=1$. 否则假定$\alpha\geq 2$，于是由(3)式立刻推出$p|Z(n)=m$. 由$Z(n)=m$的定义知$n=p^{\alpha}\cdot n_1$整除$\frac{m(m+1)}{2}$，而$(m,m+1)=1$，所以$p^{\alpha}\mid m$. 从而由(3)式推出$p^{\alpha}\mid S(n)=u\cdot p$，即$p^{\alpha-1}\mid u$，从而$p^{\alpha-1}\leq u$. 但是另一方面，注意到$S(n)=S(p^{\alpha})=u\cdot p$，由F. Smarandache函数$S(n)$的性质知$u\leq\alpha$，所以$p^{\alpha-1}\leq u\leq\alpha$. 此式对奇素数$p$显然不成立. 如果$p=2$，则当$\alpha\geq 3$时，$p^{\alpha-1}\leq u\leq\alpha$也不成立. 于是只有一种可能：$u=\alpha=2$. 注意到$n\geq 5$以及$S(n)=4$，所以此时只有一种可能：$n=12$，而$n=12$是方程(2)的一个解. 所以如果其它正整数$n$满足方程(2)，则(3)式中必有$S(n)=p$，$\alpha=u=1$. 在这种情况下，令$Z(n)=m=p\cdot v$，则(3)式成为

$$v+1=n_1,$$

或者$n_1=v+1$，即$n=p\cdot(v+1)$，$Z(n)=p\cdot v$. 再由$Z(n)$的定义知$n=p\cdot(v+1)$整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2}=\frac{pv\cdot(pv+1)}{2},$$

或者$(v+1)$整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2}=\frac{v\cdot(pv+1)}{2}.$$

注意到$(v+1,v)=1$，所以当v为偶数时由上式立刻推出$v+1\mid pv+p-p+1$，即$v+1\mid p-1$或者$v+1\mid\frac{p-1}{2}$. 显然对$\frac{p-1}{2}$的任意大于1的奇数因子r，$n=p\cdot r$是方程(2)的解. 因为此时有$Z(p\cdot r)=p\cdot(r-1)$.

当v为奇数时，由$(v+1)$整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2}=\frac{v\cdot(pv+1)}{2},$$

得到

$$v+1\mid\frac{(pv+1)}{2}=\frac{(p-1)(v+1)+v-p+2}{2}.$$

由此可推出

$$p-1=(2k+1)\cdot(v+1).$$

于是设$p-1=2^{\beta}\cdot h$，其中h为奇数，则$\frac{v+1}{2^{\beta}}$为小于h的奇数因子. 容易验证对任意奇数$r\mid h$且$r<h$，$n=p\cdot 2^{\beta}\cdot r$为方程(2)的解. 因为此时有

$$Z(p\cdot 2^{\beta}\cdot r)=p\cdot(2^{\beta}\cdot r-1).$$

事实上，注意到$r\mid h$，首先容易推出$p\cdot 2^{\beta}\cdot r$整除$\frac{p\cdot(2^{\beta}\cdot r-1)\cdot(p\cdot(2^{\beta}\cdot r-1)+1)}{2}$. 其次当$m<p\cdot(2^{\beta}\cdot r-1)$时，不可能有$p\cdot 2^{\beta}\cdot r$整除$\frac{m(m+1)}{2}$. 于是由$Z(n)$的定义知

$$Z(p\cdot 2^{\beta}\cdot r)=p\cdot(2^{\beta}\cdot r-1).$$

于是证明了定理1.

现在证明定理2. 此时注意到$k=2$，所以当$n=1$时，有$Z(1)+S(1)=2$，即$n=1$是方程(2)的一个解. 如果方程(2)还有其它正整数解$n>2$，则由定理1的证明方法不难推出$n=p\cdot u$，其中$p\geq 5$为素数，$S(u)<p$. 代入方程(2)可得

$$Z(p\cdot u)+S(p\cdot u)=2p\cdot u.$$

由此式立刻推出p整除$Z(p\cdot u)$. 设$Z(p\cdot u)=p\cdot v$，则$v=2u-1$. 由$Z(n)$的定义知$p\cdot u$整除$\frac{p(2u-1)(p(2u-1)+1)}{2}$，从而$u$整除$\frac{p-1}{2}$. 此

外,当 u为$\frac{p-1}{2}$的任一大于1的奇数因数时,$Z(p^\alpha u)=p^\alpha(u-1)$,所以此时 $n=p^\alpha u$不是方程(2)的正整数解;当 u为$\frac{p-1}{2}$的任一偶数因数时有

$$Z(p^\alpha u)=p^\alpha(2u-1),$$

此时

$$Z(p^\alpha u)+S(p^\alpha u)=2p^\alpha u.$$

于是完成了定理2的证明.

由定理1不难推出文中的推论.事实上定理1中的素数不可能是Fermat素数,因为当 p为Fermat素数时,$p-1$没有大于1的奇数因子.

参考文献

[1] 付萍,廖群英,苏丹丹.关于正整数倒数和的上界问题[J].四川师范大学学报:自然科学版,2008,31(3):259-261.

[2] 蔡立翔.一个包含数论函数的方程及其正整数解[J].郑州大学学报:理学版,2008,40(2):33-35.

[3] 张沛.一个包含伪Smarandache无平方因子函数的方程[J].郑州大学学报:理学版,2008,40(2):36-38.

[4] 乐茂华.关于Smarandache函数的一个猜想[J].黑龙江大学学报:自然科学版,2007,24(5):687-688.

[5] 杜凤英.关于Smarandache函数 S(n)的一个猜想[J].纯粹数学与应用数学,2007,23(2):205-208.

[6] Sandor J. On certain generalizations of the Smarandache function[J]. Notes Number Theory and Discrete Mathematics, 1999, 5(2):41-51.

[7] David G. The pseudo Smarandache function[J]. J Smarandache Notions, 2002, 13:140-149.

[8] Lou Yuanbing. On the pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4):48-50.

[9] Zheng Yanni. On the Pseudo Smarandache function and its two conjectures[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4):50-53.

[10] Sandor J. On a dual of the pseudo Smarandache function[J]. J Smarandache Notions, 2002, 13:18-23.

An Equation Involving Both Smarandache and Pseudo Smarandache Functions and Its Positive Integer Solutions

LI Ling, YAO Wei-li

(1. Department of Basic Courses, Shaanxi Polytechnic Institute, Xianyang 712000, Shaanxi;
2. College of Science, Shanghai University, Shanghai 200444)

Abstract: The main purpose of this paper is to study the solvability of an equation involving both the Smarandache and the pseudo Smarandache functions by using the elementary and combinational methods, and prove that the equation has infinite positive integer solutions. Moreover, the exact form of all positive integer solutions are given for the equation.

Key words: the Smarandache function; the pseudo Smarandache function; function equation; positive integer solution

2000 MSC: 11A25; 11A99

(编辑 余 毅)