DOI :10.13338/j.issn.1006-8341.2008.02.026

第21卷第2期 纺织高校基础科学学报 Vol.21, No.2
2008年6月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES June, 2008

* 研究简报 *

文章编号: 1006-8341(2008)02-0253-02

一个包含Smarandache函数的方程

路玉麟[1, 2]

(1..西北大学 数学系, 陕西 西安 710127; 2.渭南师范学院 数学与信息科学系, 陕西 渭南 714000)

摘要: 应罗马尼亚数论专家 F.Smarandache 教授的要求, 寻求一个包含Smarandache函数的方程的整数解.利用初等方法, 获得了这个方程的所有正整数解, 发展了 F.Smarandache 教授在《Only Problems, Not Solution》中涉及的相关研究工作.

关键词: Smarandache函数; Smarandache 可乘函数; 方程; 正整数解

中图分类号: O 156.4 文献标识码: A

1 引言和结论

$\forall n\in\mathbf{N}_+$, 著名的Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n\mid m!$, 即就是$S(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}, n\mid m!\}$; Smarandache 可乘函数$SM(n)$定义为

$$SM(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{SM(p_i^{\alpha_i})\} \text{ 且 } SM(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i \quad (i=1,2,\cdots,k),$$

数论函数$Zw(n)$定义为$Zw(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}, n\mid m^n\}$.

例如, $Zw(1)=1$, $Zw(2)=2$, $Zw(3)=3$, $Zw(4)=2$, $Zw(5)=5$, $Zw(6)=6$, $\cdots$.

关于$S(n)$和$Zw(n)$的算术性质, 有不少学者进行过研究, 获得了不少有重要理论价值的研究成果[1-6]. 例如文献[4] 研究了包含Smarandache函数方程$S(n)=\varphi(n)$的可解性, 并得到完全解决, 其中$\varphi(n)$为Euler函数.

令$P(n)$表示n的最大素因子, 则易知$S(n)\geqslant P(n)$; 事实上, $S(n)$, $SM(n)$和$P(n)$之间有着非常密切的关系. 文献[5] 得出以下事实:

(1) 如果$P(n)>\sqrt{n}$, 则$S(n)=SM(n)=P(n)$;

(2) 如果$n=mp_1P(n)$且$n^{1/3}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}$, 则$S(n)=SM(n)=P(n)$;

(3) 如果$n=mP^2(n)$且$n^{1/3}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$, 则$S(n)=SM(n)=2P(n)$.

对于Smarandache函数$S(n)$和$Zw(n)$, 不难发现: 当n为素数p时, 有恒等式$S(p)=p$和$Zw(p)=p$. 于是很自然地想到, 对于哪些自然数n, 会有方程$S(n)=Zw(n)$成立?文献[7] 建议研究这一问题. 本文最初试图研究这一问题, 但是发现, 尽管方程$S(n)=Zw(n)$有无穷多个不同形式的解. 然而要想彻底解决这一问题还是比较困难的, 于是先考虑研究方程$SM(n)=Zw(n)$的所有正整数解. 并利用初等方法研究这一问题, 得到了方程$SM(n)=Zw(n)$的所有正整数解, 即就是定理1.

定理1 设任意正整数n的标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $(2\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k\leqslant n)$, 则方程$SM(n)=Zw(n)$成立当且仅当$n$取值为集合$A(n)=A_1\cap A_2$, 其中$A_1=\{p: p\text{ 为素数}\}$,

$$A_2=\{n: n=pp_1^{\alpha_1}\cdots p_{v-1}^{\alpha_{v-1}}p_v^{\alpha_v}p_{v+1}^{\alpha_{v+1}}\cdots p_k^{\alpha_k}, \text{且 } 2\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k\leqslant n, n\in\mathbf{N}\},$$

收稿日期: 2007-12-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155); 陕西省教育厅项目(07JK243)

作者简介: 路玉麟(1976-), 男, 陕西省澄城县人, 渭南师范学院讲师, 西北大学硕士研究生. E-mail: luyvlin@126.com

其中 $\alpha_v = \dfrac{d}{p_v}, d = \prod_{i=1}^{k} p_i, p_v^{\alpha_v} = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}, v \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

2 定理的证明

记 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(2 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_k \leqslant n)$ 表示 n 的标准素因素分解式.从 $Zw(n)$ 的定义和性质[8],很容易得到

$$Zw(n) = Zw(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = Zw(p_1^{\alpha_1}) \circ Zw(p_2^{\alpha_2}) \cdots Zw(p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}) \circ Zw(p_k^{\alpha_k}) = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

用集合 $A = A(n)$ 表示所有满足方程 $SM(n) = Zw(n)$ 的正整数 n 的集合.从函数 $SM(n)$ 和 $Zw(n)$ 的定义和性质容易看出

(1) 若 n 为素数时, 所有素数集合 $A_1 = \{p: p$ 为素数$\}$ 是满足方程 $SM(n) = Zw(n)$ 解集的子集.

(2) 若 n 为复合数, 记 $d = p_1 p_2 \cdots p_k$,

① 如果 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1$ 即 $n = p_1 p_2 \cdots p_k = d$, 则有

$$SM(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{S(p_i)\} = p_k,$$

从而 $SM(n) \neq Zw(n)$, 所以 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ $(k \geqslant 1)$ 不可能是方程 $SM(n) = Zw(n)$ 的解.

② 如果 $\alpha_m \neq 1, m \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 即 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(2 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_k \leqslant n)$, 则

$$SM(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\} = \max(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}) = \alpha_v p_v,$$

而 $Zw(n) = p_1 p_2 \cdots p_k$, 所以 $SM(n) = Zw(n)$ 当且仅当 $\alpha_v p_v = p_1 p_2 \cdots p_k$, 即 $\alpha_v = d/p_v$.

此时有 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{v-1}^{\alpha_{v-1}} p_v^{d/p_v} p_{v+1}^{\alpha_{v+1}} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是方程 $SM(n) = Zw(n)$ 的解. 于是完成了定理1的证明.

对于方程 $S(n) = Zw(n)$. 显然当 $n = p_1 p_2 \cdots p_{k-1} p_k^{\alpha_k}, \alpha_k = p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$ 且 $p_k > \alpha_k$ 时, n 是 $S(n) = Zw(n)$ 的解.但是对于一般情况, 很难获得它的全部正整数解.这一问题有待于进一步研究 .

参考文献:

[1] 吕忠田. 关于 F. Smarandache 函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纺织高校基础科学学报, 2007, 20(3): 234-236.

[2] 冀永强. 数论函数及其方程[J]. 纺织高校基础科学学报, 2006, 19(1): 5-6.

[3] ZHANG Wenpeng, LI Junzhuang, LIU Duansen. Research on smarandache problems in number theory[C]. Phoenix: Hexis, 2004.

[4] MA Jinping. An equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2005, 1(1): 89-90.

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数值的分布性质[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[6] LE Maohua. On the Pseudo-Smarandache-squarefree function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 229-236.

[7] RUSSO Felice. A set of new Smarandache function, sequences and conjectures in number theory[M]. Lupton USA: American Research Press, 2000.

[8] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

An equation involving the Smarandache multiplicative function

LU Yu-lin[1,2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China;

2. Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan, Shaanxi 714000, China)

Abstract: The positive integer solutions of an equation involving the Smarandache function were found with the requirement of Romanian number theory expert F. Smarandacher professor. To use the elementary method, all positive integer of solutions in this equation were obtained. The problem proposed by professor F. Smarandache in his book《Only problems, Not solution》are developed.

Key words: Smarandache function; Smarandachr multiplicative function; equation; positive integer solutions

编辑、校对: 黄燕萍