第 27卷 第 4期　　延安大学学报(自然科学版)　　Vol.27 No.4
2008年 12月　　Journal of Yanan University (Natural Science Edition)　　Dec. 2008

一个包含 Smarandache函数的方程的可解性及正整数解

朱晓艳, 高　丽

(延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘　要: 主要目的是研究函数 $\sum_{d|n}\overline{S}(d)=\phi(n)$ 的可解性, 并给出该方程的所有正整数解。其中 $\sum_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因子求和。

关键词: 欧拉函数; 函数方程; 正整数解; 可解性

中图分类号: O156.4　　文献标识码: A　　文章编号: 1004-602X(2008)04-0017-02

1 引言及结论

对于任意的正整数 n, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式, 我们定义函数 $\overline{S}(n)=\max\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\cdots\alpha_kp_k\}$, $\phi(n)$ 是欧拉函数, 关于欧拉函数的研究是初等数论中非常重要和有意义的课题, 许多学者研究了它的性质, 参考文献[1－3]。显然当 $n=1$ 时, $\phi(n)=1$; 当 $n>1$ 时, $\phi(n)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)$, 本文的主要目的是研究下面函数方程的可解性。

即就是求方程 $\sum_{d|n}\overline{S}(d)=\phi(n)$　　(1)

的所有正整数解。具体地说就是证明下面的

定理: 对任意的正整数 n, 方程(1)成立当且仅当 $n=1, 9, 20$。

2 定理的证明

这节我们将给出定理的证明。首先将所有正整数分情况来讨论:

(1)当 $n=1$ 时, $\sum_{d|n}\overline{S}(d)=\phi(n)$, 得 $n=1$ 是方程的解。

(2)当 $n=p^\alpha$ 为素数方幂时,

$$\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}(d)=1+p+2p+\cdots+\alpha p$$

$$\phi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$$

$$1+p+2p+\cdots+\alpha p=p^\alpha-p^{\alpha-1}$$

显然等式右边是 p 的倍数, 而左边不是 p 的倍数, 矛盾。所以 n 为素数方幂时不是方程的解。

(3)当 $n>1$ 且 n 的最小素因子的方幂为 1时, 若 $n=p_1p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=p_1n_1$ 且满足方程, 则由结论(2)知 $k\geqslant 2$, 于是由 $\overline{S}(n)$ 的定义可得:

$$\sum_{d|n}\overline{S}(d)=\sum_{d|n_1}\overline{S}(d)+\sum_{d|n_1}\overline{S}(p_1d)=$$

$$2\sum_{d|n_1}\overline{S}(d)+p_1-1=p_1n_1。$$

显然等式两边的奇偶性相反, 此时等式不成立。

由结论(3)立刻得到: 如果 n 为无平方因子数, 则不可能满足方程式。

现在证明一般情况, 假定整数 $n>1$ 满足方程, 由结论(2)及(3)知 n 至少有两个不同的素因子, 而且最小素因子的方幂大于 1, 于是可设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_1>1$, $k\geqslant 2$, 设 $\overline{S}(n)=\alpha p$, 下面分情况讨论。

(1) $\alpha=1$, 此时 p 必定为 n 的最大素因子, 令 $n=n_1p$, 注意到当 $d|n_1$ 时, 有 $\overline{S}(d)\leqslant p-1$, 于是由

$\sum_{d|n}\overline{S}(d)=\phi(n)$ 得

$$\phi(n_1)(p-1)=\sum_{d|n_1p}\overline{S}(d),$$

$$\sum_{d|n_1}\overline{S}(d)+\sum_{d|n_1}\overline{S}(dp)$$

$$=\sum_{d|n_1}\overline{S}(d)+\sum_{d|n_1}p\leqslant 1+(p-1)\,p\,d(n_1)$$

$$=2+(2p-1)d(n_1)-p$$

收稿日期: 2008-10-12

基金项目: 陕西省教育厅专项科研项目(07JK430)

作者简介: 朱晓艳(1983—), 女, 陕西渭南人, 延安大学硕士研究生。

或者 $\phi(n_1)<2d(n_1)$ 其中 $d(n_1)$ 为 Dirichlet除数函数,由上式可得 n_1 不可能为素数,且 $n_1\geq 6$ 又由于 n_1 的最小素因子的方幂大于 1,所以当 $n_1=8$ 时,有

$$\phi(n)=\sum_{d|n_1 p}\overline{S}(d),\quad \phi(8p)=\sum_{d|8p}\overline{S}(d),$$

$$\phi(n_1)(p-1)=\sum_{d|n_1 p}\overline{S}(d),$$

$$4(p-1)=4p-4=\sum_{d|8p}\overline{S}(d)$$

$$=\overline{S}(1)+\overline{S}(2)+\overline{S}(4)+\overline{S}(8)+\overline{S}(p)+\overline{S}(2p)+\overline{S}(4p)+\overline{S}(8p)=1+2+4+6+4p$$

可得出 $n_1=8$ 不是方程的解。

同理,当 $n_1=9$ 时, $\phi(9p)=\sum_{d|9p}\overline{S}(d)$ 可解的 $p=16$. 当 $n_1=20$ 时,由 $\phi(20p)=\sum_{d|20p}\overline{S}(d)$ 解的 $p=30$.

(2) $\overline{S}(n)=\alpha p$ 且 $\alpha>1$,此时设 $n=n_1p^{\alpha}$, $(n_1,p)=1$,若 n 满足方程式 $\sum_{d|n}\overline{S}(d)=\phi(n)$。

则 $\phi(n)=\phi(p^{\alpha})\phi(n_1)=(p^{\alpha}-p^{\alpha-1})\phi(n_1)=$

$$\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d|n_1}\overline{S}(p^i d)$$

容易看出方程左边是 p 的倍数,而右边不是 p 的倍数,得出矛盾。

综上所有情况可得 $n=1, 9, 20$.

参考文献:

[1] 柯召,孙琦. 数论讲义[M]. 北京:高等教育出版社, 2003.

[2] 闵嗣鹤,严士建. 初等数论[M]. 北京:高等教育出版社, 1988.

[3] 李文卿. 数论及其应用[M], 北京:北京大学出版社, 2001.

[4] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions. Chicago [M]. Xiquan Publishing House, 1993.

[5] Xu Zhe Feng. On the Mean Value of the Smarandache Power Function [J]. Acta Mathematica Sinica (Chinese serises), 2006, 49(1): 77-80.

[责任编辑 贺小林]

The Solution of the Equation Involving Smarandache Function and its Positive Integer Solution

ZHU Xiao-yan, GAO LI

(Department of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is to study the solution of the equation $\sum_{d|n}\overline{S}(d)=\phi(n)$, and give its all positive integer solutions.

Key words: euler function; function equation; positive integer solution; solvability