第 27卷 第 3期 2008年 9月
延安大学学报(自然科学版)
Journal of Yanan University (Natural Science Edition)
Vol. 27 No. 3 Sep. 2008

一个包含 Smarandache原函数与一类自然数乘积之和的方程

付瑞琴

(西北大学 数学系, 陕西 西安 710069)

摘 要:设 p为素数, n为任意正整数,我们定义 Smarandache原函数 $S_p(n)$为最小的正整数 k使得 $p^n \mid k!$,即 $S_p(n)=\min\{k: k\in N, p^n \mid k!\}$。利用初等数论方法研究了方程 $S_p(1\times2)+S_p(2\times3)+\cdots S_p(n(n+1))=S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$的可解性,并给出了这个方程的所有正整数解。

关键词:Smarandache原函数;正整数解;可解性

中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1004-602X(2008)03-0003-04

1 引言及结论

设 p为素数, n为任意正整数,我们定义 Smarandache原函数 $S_p(n)$为最小的正整数 k使得 $p^n \mid k!$,即

$$S_p(n)=\min\{k: k\in N, p^n \mid k!\}。$$

例如 $S_2(1)=2$, $S_2(2)=S_2(3)=4$, $S_2(4)=6$, ……。在文献[1]中的第 47、48、49个问题中,美籍罗马尼亚数论专家 F. Smarandache建议我们研究出的 $S_p(n)$的性质。为方便期间,我们称函数 $S_p(n)$为 Smarandache原函数。Smarandache原函数 $S_p(n)$与 Smarandache函数 $S(n)$有着非常密切的联系,这里 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$。

从 $S(n)$的定义容易得到 $S(p)=p$,且当 $n\neq4$, $n\neq p$时,有 $S(n)<n$。于是可得

$$\pi(x)=-1+\sum_{n=2}^{[x]}\left[\frac{S(n)}{n}\right],$$

其中 $\pi(x)$表示小于 x的素数的个数。

Smarandache函数 $S(n)$, Smarandache原函数 $S_p(n)$以及关于 Smarandache原函数的方程的研究是数论中的一个重要且有意义的课题,因此,许多学者都对此进行了研究(参阅文献[2-4])。张文鹏和刘瑞森在文献[5]中给出了 $S_p(n)$的一个有趣的渐近公示,即对任意给定的素数 p和任意的正整数 n有

$$S_p(n)=(p-1)n+O\left(\frac{p}{\ln p}\cdot\ln n\right)。$$

李洁在文献[6]中研究了方程

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的可解性,并给出了上面方程的所有的正整数解。但是对于 Smarandache原函数与任意类型的自然数乘积之和的关系似乎并没有人研究过,至少我没有见过与之相关的研究。本文利用初等数论方法研究了 Smarandache原函数与一类型的自然数乘积之和的方程

$$S_p(1\times2)+S_p(2\times3)+\cdots+S_p(n\times(n+1))=S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$$

的可解性,并给出了这个方程的所有的正整数解。即就是证明了下面的结论:

定理 设 p为给定的素数, n为任意正整数,则方程

$$S_p(1\times2)+S_p(2\times3)+\cdots+S_p(n\times(n+1))=S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right) \quad (1)$$

有有限个解。

收稿日期:2007-12-12
作者简介:付瑞琴(1979-),女,陕西府谷人,西北大学硕士生。

(i)如果 p为 2, 3或 7时, 方程 (1)仅有一个 $n=1$解;

(ii)如果 p为 5或 11时, 方程 (1)的解为 $n=1, 2, 3$;

(iii)如果 $p\geqslant 13$时, 方程 (1)有有限个正整数解, 即 $n=1, 2, \cdots, n_p$, 其中 $n_p\geqslant 1$为一个正整数, 且

$$n_p=\left[\sqrt[3]{\frac{3p}{2}+\sqrt{\frac{9p^2}{4}-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{3p}{2}-\sqrt{\frac{9p^2}{4}-\frac{1}{27}}}-1\right],$$

$[x]$表示不超过 x的最大整数。

2　几个引理

为了完成定理的证明, 我们需要引入下面的几个引理。

引理 1　设 p为一个素数, n为任意正整数, $S_p(n)$表示 Smarandache原函数, 我们有

$$S_p(k)\begin{cases}=pk, & \text{当 } k\leqslant p\\ <pk, & \text{当 } k>p.\end{cases}$$

证明　(参阅文献 [7])。

引理 2　设 p为一个素数, n为任意正整数, 如果 n和 p满足 $p^{\alpha}\| n!$, 那么 $\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$。

证明　(参阅文献 [8])。

引理 3　设 p为一个素数, n为任意正整数, 则一定存在正整数 m_k满足 $1\leqslant m_k\leqslant k(k+1)\ (k=1, 2, \cdots, n)$使得

$$S_p(1\times 2)=m_1p,\ S_p(2\times 3)=m_2p, \cdots,$$
$$S_p(n(n+1))=m_np.$$

并且　$k(k+1)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_kp}{p^i}\right]$。

证明　由 $S_p(n)$的定义以及引理 1和引理 2, 我们很容易就可以推出引理 3的结论。

3　定理的证明

本节我们来完成定理的证明。我们分以下几种情况来讨论方程 $S_p(1\times 2)+S_p(2\times 3)+\cdots+S_p(n\times(n+1))=S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$的解:

(I)如果 $p=2$时, 方程 (1)即为

$$S_2(1\times 2)+S_2(2\times 3)+\cdots+S_2(n\times(n+1))=S_2\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right).$$

(a)当 $n=1$时, 因为 $S_2(1\times 2)=4=S_2\left(\frac{1\times(1+1)\times(1+2)}{3}\right)$, 所以 $n=1$是方程 (1)的解。

(b)当 $n=2$时, 因为 $S_2(1\times 2)+S_2(2\times 3)=4+4\times 2=12$, 但是 $S_2\left(\frac{2\times(2+1)\times(2+2)}{3}\right)=S_2(8)=10$, 所以 $n=2$不是方程 (1)的解。

(c)当 $n>2$, 由引理 3我们知道一定存在正整数 m_k满足 $1\leqslant m_k\leqslant k(k+1)\ (k=1, 2, \cdots, n)$使得

$$S_2(1\times 2)=m_1p,\ S_2(2\times 3)=m_2p, \cdots,$$
$$S_2(n(n+1))=m_np.$$

于是我们有 $S_2(1\times 2)+S_2(2\times 3)+\cdots+S_2(n\times(n+1))=2(m_1+m_2+\cdots+m_n)$。

另一方面, 注意到 $m_1=2$, $m_2=4$, 根据引理 3我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1}{2^i}\right]=$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+1}{2^i}\right]=$$
$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+1}{2^i}\right]=$$
$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n-1}{2^i}\right]\geqslant$$
$$(m_1+m_2-1)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_1}{2^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_2-1}{2^i}\right]+$$
$$\left(m_3+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_3}{2^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{2^i}\right]\right)\geqslant$$
$$9+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2m_2}{2^i}\right]+\cdots+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2m_n}{2^i}\right]>$$
$$1\times 2+2\times 3+\cdots+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

再由引理 2我们就有

$$2^{\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)}\mid(2(m_1+m_2+\cdots m_n)-1)!$$

于是

$$S_2\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\leqslant$$
$$2(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1<$$
$$2(m_1+m_2+\cdots+m_n)=$$
$$S_2(1\times 2)+S_2(2\times 3)+\cdots+S_2(n\times(n+1))$$

所以这种情形下方程 (1)无解。

因此, 当 $p=2$时, 方程 (1)仅有一个解, 即 $n=1$。

当 $p=3$或 7时, 利用同样的方法我们容易推出 $n=1$是方程 (1)的唯一解。

(II)如果 $p=5$时，方程(1)即为

$$S_5(1\times2)+S_5(2\times3)+\cdots+S_5(n\times(n+1))=S_5\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)。$$

(a)当 $n=1$时，因为 $S_5(1\times2)=5\times2=10=S_5\left(\frac{1\times(1+1)\times(1+2)}{3}\right)$，所以 $n=1$是方程(1)的解。

(b)当 $n=2$时，因为 $S_5(1\times2)+S_5(2\times3)=10+5\times5=35=S_5\left(\frac{2\times(2+1)\times(2+2)}{3}\right)$，所以 $n=2$是方程(1)的解。

(c)当 $n=3$时，因为 $S_5(1\times2)+S_5(2\times3)+S_5(3\times4)=35+10\times5=85=S_5\left(\frac{3\times(3+1)\times(3+2)}{3}\right)$，所以 $n=3$是方程(1)的解。

(d)当 $n=4$时，因为 $S_5(1\times2)+S_5(2\times3)+S_5(3\times4)+S_5(4\times5)=85+17\times5=170$，但是 $S_5\left(\frac{4\times(4+1)\times(4+2)}{3}\right)=S_5(40)=160$，所以 $n=4$不是方程(1)的解。

(e)当 $n>4$时，由引理3我们知道一定存在正整数 m_k满足 $1\leqslant m_k\leqslant k(k+1)(k=1,2,\cdots,n)$使得 $S_5(1\times2)=5m_1$，$S_5(2\times3)=5m_2$，…，$S_5(n\times(n+1))=5m_n$。于是我们有 $S_5(1\times2)+S_5(2\times3)+\cdots+S_5(n\times(n-1))=5(m_1+m_2+\cdots+m_n)$。

另一方面，注意到 $m_1=2$，$m_2=5$，$m_3=10$，$m_4=17$，根据引理3我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{5(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1}{5^i}\right]=$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{5(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+4}{5^i}\right]=$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{5(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+4}{5^i}\right]=$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)}{5^i}\right]\geqslant$$

$$(m_1+m_2+m_3+m_4-1)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+m_3+m_4-1)}{5^i}\right]+$$

$$\left(m_5+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_5}{5^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{5^i}\right]\right)\geqslant$$

$$40+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{5m_5}{5^i}\right]+\cdots+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{5m_n}{5^i}\right]\geqslant$$

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}。$$

再由引理2我们就有

$$5^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}\mid5(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1)!$$

于是

$$S_5\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\leqslant$$

$$5(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1<$$

$$5(m_1+m_2+\cdots+m_n)=$$

$$S_5(1\times2)+S_5(2\times3)+\cdots+S_5(n\times(n+1))。$$

所以这种情形成方程(1)无解。

因此，当 $p=5$时，方程(1)仅有三个解，即 $n=1,2,3$。

当 $p=11$时，利用同样的方法我们容易推出 $n=1,2,3$是方程(1)的解。

(III)如果 $p\geqslant13$时，我们分以下情形讨论：

(a)当 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\leqslant p$时，解这个不等式可得 $1\leqslant n\leqslant n_p$，其中

$$n_p=\left[\sqrt[3]{\frac{3p}{2}+\sqrt{\frac{9p^2}{4}-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{3p}{2}-\sqrt{\frac{9p^2}{4}-\frac{1}{27}}}\right],$$

$[x]$表示不超过 x的最大整数，于是

$$S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}p。$$

注意到当 $1\leqslant n\leqslant n_p$时有 $n(n+1)<\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\leqslant p$，由引理1可得 $S_p(1\times2)+S_p(2\times3)+\cdots+S_p(n\times(n+1))=1\times2p+2\times3p+\cdots+n(n+1)p=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}p$。联合以上两式容易推出 $n=1,2,\cdots,n_p$是方程 $S_p(1\times2)+S_p(2\times3)+\cdots+S_p(n\times(n+1))=S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$的解。

(b)当 $n(n+1)\leqslant p<\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$时，解这个不等式可得 $n'_p<n\leqslant n_p$，其中 $n'_p=\left[\frac{-1+\sqrt{1+4p}}{2}\right]$，$[x]$表示不超过 x的最大整数，由引理1我们有

$$S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)<\frac{n(n+1)(n+2)}{3}p，$$

但是

$$S_p(1\times2)+S_p(2\times3)+\cdots+S_p(n\times(n+1))=$$

$$1\times2p+2\times3p+\cdots+n(n+1)p=$$

$$\frac{n(n+1)(nn+2)}{3}p。$$

所以这种情形下方程(1)无解。

(c)当 $n \geq n'_p + 1$ 时,即有 $n(n+1) > p$ 以及 $n'_p \geq 3$. 所以由引理3我们知道一定存在正整数 m_k 满足 $1 \leq m_k \leq k(k+1)$ $k=1, 2, \cdots, n$ 使得

$$S_p(1\times 2) = m_1 p, S_p(2\times 3) = m_2 p, \cdots, S_p(n(n+1)) = m_n p.$$

于是我们有 $S_p(1\times 2) + S_p(2\times 3) + \cdots + S_p(n\times(n+1)) = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)p$.

另一方面,注意到 $\frac{n'_p(n'_p+1)(n'_p+2)}{3} - 1 \geq p$ 以及 $m_1 = 1\times 2, m_2 = 2\times 3, \cdots, m_{n'_p} = n'_p(n'_p+1)$, 根据引理3我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1}{p^i}\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{p(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+p-1}{p^i}\right] =$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{p(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+p-1}{p^i}\right] \geq$$

$$(m_1+m_2+\cdots+m_{n'_p}-1)+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{n'_p(n'_p+1)(n'_p+2)}{3}-1\right)p+p-1}{p^i}\right]+$$

$$\left(m_{n'_p}+1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_{n'_p}+1}{p^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n p}{p^i}\right]\right) \geq$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_{n'_p}+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_{n'_p}+1}{p^i}\right]^p+\cdots+$$

$$\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n p}{p^i}\right]\right) \geq$$

$$1\times 2+2\times 3+\cdots n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

再由引理2我们就有

$$p^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \mid ((m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1)!$$

于是

$$S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right) \leq (m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1 < (m_1+m_2+\cdots+m_n)p = S_p(1\times 2)+S_p(2\times 3)+\cdots+S_p(n\times(n+1)).$$

由以上分析我们可以推出当 $p \geq 13$ 且 $n \geq n'_p + 1$ 时方程(1)无解。

由(Ⅰ)、(Ⅱ)和(Ⅲ)我们就可以得到定理的证明。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems, not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993.

[2] Erdos P. problem 6674[M]. Amer. Math, 1991, 98: 965.

[3] Ashbacher C. Some properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff function[J]. Mathmaticas and Informatics Quaterly, 1997, 7: 114-116.

[4] Begay A. Smarandache ceil functions[J]. Bulletin of Pure and Appled Sciences, 1997, 16E: 227-229.

[5] Zhang W P, Liu D S. Primitive number of power p and its asymptotic property[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 173-175.

[6] 李洁. 一个包含Smarandache原函数的方程[J]. 数学学报, 2007, 50: 333-336.

[7] Mark F, Patrick M. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandacht Notions Journal, 2002, 13: 37-42.

[8] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003.

[责任编辑 贺小林]

An Equation Involving the Smarandache Primitive Function and a Kind of Sum of Natural Numbers Products

FU Rui-qin

(Department of mathematics, Northewest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: For any positive integer n, let $S_p(n)$ denote the Smarandache primitive function. Using the elementary methods, the number of the solutions of the equation $S_p(1\times 2)+S_p(2\times 3)+\cdots+S_p(n\times(n+1)) = S_p\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$ are studied, and all solutions for this equation are given.

Key words: Smarandache pimitive function; positive integer solution; solvability