引用格式：Feng Lei，Zhao Xiqing，Liu Jian，*et al*. Positive Integer Solutions of an Equation Involving Smarandache Dual Function[J]. Journal of Gansu Sciences，2015，27(6)：1-4. [冯蕾，赵西卿，刘建，等. 一个包含 Smarandache 对偶函数的方程的正整数解[J]. 甘肃科学学报，2015，27(6)：1-4.]
doi：10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2015.06.001.

一个包含 Smarandache 对偶函数的方程的正整数解

冯 蕾，赵西卿，刘 建，袁秀芳
（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘 要 利用初等数论及组合方法讨论了一个包含 Smarandache 对偶函数及素因子函数方程 $\sum_{d/n}\frac{1}{\overline{S}(d)}=4\Omega(n)$ 的正整数解，证明了该方程所有偶数解的形式可表示为 $n=2^i3^j$ 或 $n=2^kp^l$，其中 $p\geqslant 5$ 为奇素数；所有奇数解为 $n=p^4q^{11}$、$n=p^5q^7$、$n=p^7q^5$、$n=p^{11}q^4$，其中 p、q 为奇素数。

关键词 Smarandache 对偶函数；Ω 函数；正整数解
中图分类号：O156.4 **文献标志码**：A **文章编号**：1004-0366(2015)06-001-04

1 预备知识

Smarandache 函数 $S(n)$ 是重要的数论函数之一，对于这一函数很多学者已经做了研究和探索，并取得了一系列重要的结果，对数论发展有重大意义。后来人们根据 Smarandache 函数定义了 Smarandache 对偶函数 $\overline{S}(n)$。以下将介绍一个包含 Smarandache 对偶函数的方程的可解性。首先我们来看以下定义。

定义 1 对于任意正整数 n，Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$，即

$$S(n)=\min\{m:m\in N,n\mid m!\}。$$

$S(n)$ 的一些值为 $S(1)=1,S(2)=2,S(3)=3,\cdots$，特别当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 时，不难证明 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i{}^{\alpha_i})\}$。

定义 2 对于任意正整数 n，Smarandache 对偶函数 $\overline{S}(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $m!\mid n$，即

$$\overline{S}(n)=\max\{m:m\in N,m!\mid n\}。$$

关于 $S(n)$ 和 $\overline{S}(n)$ 的算术性质，已有不少的研究结果[1-8]，近年来学者们将包含这两类函数与其他函数的方程进行了研究。薛西锋[9]研究了 $\overline{S}(n)$ 的函数方程 $\sum_{d/n}\overline{S}(d)=n$ 的可解性，并获得了该方程的所有正整数解，其解为 1 和 12。现设 $\Omega(n)$ 表示正整数 n 的所有素因子的个数（按重数计算），即若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为正整数 n 的标准分解式，则 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$。以下主要研究函数方程

$$\sum_{d/n}\frac{1}{\overline{S}(d)}=4\Omega(n) \tag{1}$$

的可解性，并获得了式(1)的所有正整数解的具体表示形式。

定理 1 式(1)的所有偶数解为 $n=2^{12}3^{246}$、$n=2^{14}3^{72}$、$n=2^{21}3^{30}$、$n=2^{50}3^{18}$、$n=2^{166}3^{15}$、$n=2^7p^{47}$、$n=2^8p^{27}$、$n=2^{10}p^{17}$、$n=2^{11}p^{15}$、$n=2^{14}p^{12}$、$n=2^{16}p^{11}$、$n=2^{26}p^9$、$n=2^{46}p^8$，其中 $p\geqslant 5$ 为奇素数，所有奇数解为 $n=p^4q^{11}$、$n=p^5q^7$、$n=p^7q^5$、$n=p^{11}q^4$，其中 p、q 为奇素数。

2 定理的证明

显然，由 $\overline{S}(n)$ 和 $\Omega(n)$ 的定义知，$n=1$ 不是方程(1)的解，故可设 $n>1$。

(1) 若 n 为偶数，可分以下几种情形讨论：

① 若 $n=2^\alpha(\alpha\geqslant 1)$ 满足式(1)，易得

$$4\Omega(n)=4\alpha,\sum_{d/2^\alpha}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(2^i)}=1+\frac{\alpha}{2},$$

收稿日期：2015-03-12；修回日期：2015-04-08.
基金项目：陕西省科技厅自然科学基金项目(2013JQ1019)；陕西省教育厅科研计划资助项目(2013JK0557)；延安大学自然科学专项基金项目(YDZ2013-05)；延安大学研究生教育创新计划项目.
作者简介：冯蕾(1989-)，女，陕西延安人，硕士研究生，研究方向为数论. E-mail：434682979@qq.com.

则有 $1+\frac{\alpha}{2}=4\alpha$，可得 $\alpha=\frac{2}{7}<1$，矛盾，故形如 $n=2^{\alpha}(\alpha\geqslant 1)$ 不是式(1) 的解。

② 若 $n=2\times 3^{\alpha}(\alpha\geqslant 1)$ 满足式(1)，易得 $4\Omega(n)=4(1+\alpha)$，

$$\sum_{d/2\times 3^{\alpha}}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(3^{i})}+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(2\times 3^{i})}=1+\frac{1}{2}+\alpha+\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}+\frac{4\alpha}{3},$$

则有

$$\frac{3}{2}+\frac{4\alpha}{3}=4(1+\alpha),$$

可得

$$\alpha=-\frac{15}{16}<1,$$

矛盾，故形如 $n=2\times 3^{\alpha}(\alpha\geqslant 1)$ 不是式(1) 的解。

③ 若 $n=2^{\alpha}3^{\beta}(\alpha\geqslant 2,\beta\geqslant 1)$ 满足式(1)，易得 $4\Omega(n)=4(\alpha+\beta)$，

$$\sum_{d/2^{\alpha}3^{\beta}}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(2^{i})}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(3^{i})}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(2\times 3^{i})}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(2^{2}3^{i})}+\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(2^{i}3^{j})}=$$
$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\beta}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}=1+\frac{\alpha}{2}+\frac{5\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4},$$

则有

$$1+\frac{\alpha}{2}+\frac{5\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}=4(\alpha+\beta),$$

即有

$$12+\alpha\beta=42\alpha+34\beta,$$

且 $\beta=14+\frac{464}{3\alpha-34}$。$\alpha_1=12,\beta_1=246$；$\alpha_2=14,\beta_2=72$；$\alpha_3=21,\beta_3=30$；$\alpha_4=50,\beta_4=18$；$\alpha_5=166,\beta_5=15$。故此时式(1) 有解，当且仅当 $n=2^{12}3^{246}$；$n=2^{14}3^{72}$；$n=2^{21}3^{30}$；$n=2^{50}3^{18}$；$n=2^{166}3^{15}$。

④ 若 $n=2^{\alpha}3^{\beta}p^{\gamma}(\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,\gamma\geqslant 1)$，$p\geqslant 5$ 为奇素数，满足式(1)，易得 $4\Omega(n)=4(\alpha+\beta+\gamma)$，且有

$$\sum_{d/2^{\alpha}3^{\beta}p^{\gamma}}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(2^{i})}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(3^{i})}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(p^{i})}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(2^{i}3^{j})}+\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(2^{i}3^{j})}+$$
$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(2^{i}p^{j})}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(3^{i}p^{j})}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(2\times 3^{i}p^{j})}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(2^{2}3^{i}p^{j})}+$$
$$\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(2^{3}3^{i}p^{j})}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(2^{4}\times 3\times p^{i})}+\sum_{i=4}^{\alpha}\sum_{i=2}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(2^{i}3^{j}p^{k})}=$$
$$\begin{cases}1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{5}+\frac{\gamma}{5}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{6},p=5\\1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{4}+\frac{\gamma}{4}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{4},p>5\end{cases}\tag{2}$$

化简式(2) 可得：

当 $p=5$ 时，

$$[30\alpha+112\beta+10(\alpha-3)(\beta-1)-168]\gamma=210\alpha+170\beta-15\alpha\beta-60,\tag{3}$$

当 $p>5$ 时，

$$[6\alpha+23\beta+3(\alpha-3)(\beta-1)-33]\gamma=42\alpha+34\beta-3\alpha\beta-12。\tag{4}$$

当 $\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,\gamma\geqslant 1$ 时，式(3)、式(4) 两个不定方程均无正整数解。故形如 $n=2^{\alpha}3^{\beta}p^{\gamma}$ 不是式(1) 的解。

同理可证 $n=2^{\alpha}3^{\beta}p_3{}^{\alpha_3}p_4{}^{\alpha_4}\cdots p_r{}^{\alpha_r}(\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,\alpha_i\geqslant 1,i=3,\cdots,r,r\geqslant 4)$，$p_i\geqslant 5$ 为奇素数，均不是式(1) 的解。

⑤ 若 $n=2^{\alpha}p^{\beta}(\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1)$，$p\geqslant 5$ 为奇素数，满足式(1)，易得 $4\Omega(n)=4(\alpha+\beta)$，而

$$\sum_{d/2^{\alpha}p^{\beta}}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(2^{i})}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(p^{i})}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(2^{i}p^{j})}=1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\alpha\beta}{2},\tag{5}$$

则有

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\alpha\beta}{2}=4(\alpha+\beta),\tag{6}$$

化简式(6) 得

$$\beta=7+\frac{40}{\alpha-6},\tag{7}$$

可解得这个方程有以下 8 组解：$\alpha_1=7,\beta_1=47$；$\alpha_2=8,\beta_2=27$；$\alpha_3=10,\beta_3=17$；$\alpha_4=11,\beta_4=15$；$\alpha_5=14,\beta_5=12$；$\alpha_6=16,\beta_6=11$；$\alpha_7=26,\beta_7=9$；$\alpha_8=46,\beta_8=8$。故此时式(1) 有解当且仅当 $n=$

2^7p^{47}；$n=2^8p^{27}$；$n=2^{10}\times p^{17}$；$n=2^{11}p^{15}$；$n=2^{14}p^{12}$；$n=2^{16}p^{11}$；$n=2^{26}p^9$；$n=2^{46}p^8$，其中 $p\geqslant 5$ 为奇素数。

⑥ 若 $n=2^{\alpha}p_1^{\beta}p_2^{\gamma}(\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,\gamma\geqslant 1)$，$p_i\geqslant 5(i=1,2)$ 为奇素数，满足式(1)，易得 $4\Omega(n)=4(\alpha+\beta+\gamma)$，且有

$$\sum_{d/2^{\alpha}p_1^{\beta}p_2^{\gamma}}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(p_1^{\ i})}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(p_2^{\ i})}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(2^i3^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(2^ip_1^{\ j})}+$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(2^ip_2^{\ j})}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(p_1^{\ i}p_2^{\ j})}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(2^ip_1^{\ j}p_2^{\ k})}=$$

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{\alpha\beta\gamma}{2},$$

即得

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}=4(\alpha+\beta+\gamma),$$

解得这个不定方程式(1) 无正整数解，故形如 $n=2^{\alpha}p_1^{\beta}p_2^{\gamma}$ 不是式(1) 的解。

又易计算得当 $n=2\times 5\times 7\times 11$ 时，$\sum\limits_{d/2\times5\times7\times11}\frac{1}{\overline{S}(d)}=12$，而 $4\Omega(n)=16$，此时式(1) 无解。

同理可证 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}(\alpha\geqslant 1,\alpha_i\geqslant 1,i=1,\cdots,r,r\geqslant 3)$，$p_i\geqslant 5$ 为奇素数，不是式(1) 的解。

(2) 若 n 为奇数，可分以下几种情况讨论：

① 若 $n=p^{\alpha}(\alpha\geqslant 1)$，$p$ 为奇素数，满足式(1)，即得 $4\Omega(n)=4\alpha$，且有

$$\sum_{d/p^{\alpha}}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(p^i)}=1+\alpha,$$

即得 $1+\alpha=4\alpha$，解得 $\alpha=\frac{1}{3}<1$，矛盾，故形如 $n=p^{\alpha}(\alpha\geqslant 1)$ 不是式(1) 的解。

② 若 $n=p^{\alpha}q^{\beta}(\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1)$，$p$、$q$ 为奇素数，满足式(1)，易得 $4\Omega(n)=4(\alpha+\beta)$，

$$\sum_{d/p^{\alpha}q^{\beta}}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(p^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(q^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(p^iq^j)}=1+\alpha+\beta+\alpha\beta,\tag{8}$$

故可得

$$1+\alpha+\beta+\alpha\beta=4(\alpha+\beta),\tag{9}$$

有

$$1+\alpha\beta=3(\alpha+\beta),\tag{10}$$

即有

$$\beta=3+\frac{8}{\alpha-3},\tag{11}$$

解得式(11) 不定方程有 4 组解，即 $\alpha_1=4,\beta_1=11$；$\alpha_2=5,\beta_2=7$；$\alpha_3=7,\beta_3=5$；$\alpha_4=11,\beta_4=4$。此时式(1) 有解当且仅当 $n=p^4q^{11}$，$n=p^5q^7$，$n=p^7q^5$，$n=p^{11}q^4$（p、q 为奇素数）。

③ 若 $n=p^{\alpha}q^{\beta}h^{\gamma}(\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,\gamma\geqslant 1)$，$p$、$q$、$h$ 为奇素数，满足式(1)，易得 $4\Omega(n)=4(\alpha+\beta+\gamma)$，且有

$$\sum_{d/p^{\alpha}q^{\beta}h^{\gamma}}\frac{1}{\overline{S}(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{\overline{S}(p^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(q^i)}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(h^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\overline{S}(p^iq^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(p^ih^j)}+$$

$$\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(q^ih^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{\overline{S}(p^iq^jh^k)}=1+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma,\tag{12}$$

故可得

$$1+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma=4(\alpha+\beta+\gamma),\tag{13}$$

即有

$$(\alpha+\beta+\alpha\beta-3)\gamma=3\alpha+3\beta-\alpha\beta-1,\tag{14}$$

当 $\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,\gamma\geqslant 1$ 时，式(14) 不定方程没有正整数解。故此时形如 $n=p^{\alpha}q^{\beta}h^{\gamma}(\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,\gamma\geqslant 1)$，$p$、$q$、$h$ 为奇素数，不是式(1) 的解。

同理可得 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}(\alpha_i\geqslant 1,i=1,\cdots,r,r\geqslant 4)$，$p_i$ 为奇素数，不是式(1) 的解。

综合上述情形(1)和情形(2)的讨论，定理得证。

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Problems，Not Solutions[M]. Chicageo：Xiquan Publishing House，1993.

[2] 潘承洞，潘承彪. 初等数论[M]. 北京：北京大学出版社，1992.

[3] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报：自然科学版，2008，96(2)：173-176.

[4] Sandor J. On a Dual of the Pseudo Smarandache Function[J]. Smarandache Notion Journal，2002，13：18-23.

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报，2006，71(5)：1 009-1 012.

[6] 陈斌. 一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程[J]. 西南大学学报：自然科学版，2012，56(2)：70-73.

[7] 李超，杨存典，刘端森. Smarandache 函数的均值分布性质[J]. 甘肃科学学报，2010，22(3)：24-27.
[8] 柴晶霞，高丽. 关于 Smarandache 函数的混合均值[J]. 甘肃科学学报，2010，22(4)：40-42.
[9] 薛西锋. 一类包含 Smarandache 对偶函数方程的求解[J]. 陕西师范大学学报：自然科学版，2007，48(4)：9-11.

Positive Integer Solutions of an Equation Involving Smarandache Dual Function

Feng Lei，Zhao Xiqing，Liu Jian，Yuan Xiufang
(*College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，China*)

Abstract By using the elementary number theory and combinational methods，the positive integer solutions of a function equation involving both of the Smarandache dual function and the $\sum_{d/n}\frac{1}{\bar{S}(d)}=4\Omega(n)$ function is studied. All the exact positive integer solutions are given for the equation，and it is proved that the every n satisfy the equation only if $n=2^i3^j$ or $n=2^kp^l$，where $p\geqslant5$ is add prime，and the odd n satisfy the equation only if $n=p^4q^{11}$、$n=p^5q^7$、$n=p^7q^5$、$n=p^{11}q^4$，where p,q are both odd primes.

Key words Smarandache dual function；Ω function；Positive integer solutions