DOI:10.13467/j.cnki.jbuns.2012.03.018

宝鸡文理学院学报(自然科学版),第32卷,第3期,第4-5,27页,2012年9月
Journal of Baoji University of Arts and Sciences (Natural Science), Vol. 32, No. 3, pp. 4-5, 27, Sept. 2012
DOI:CNKI:61－1290/N. 20120522. 1800. 001
http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1290.N.20120522.1800.001.html

# 一个包含 Smarandache 指数函数 $e_p(n)$ 的混合均值*

黄　炜

(宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013)

**摘　要**:目的　研究复合函数 $p^{e_q(A_k(n))}$ 的性质。方法　利用初等方法和解析方法。结果　得到了一个新的数论函数的均值性质。结论　获得了关于这个数论函数的一些较精确的渐近公式 $\sum\limits_{n\leqslant x}p^{e_q(A_k(n))}$。

**关键词**:Smarandache 指数函数;混合均值公式;渐近公式

**中图分类号**:O156.4　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1007-1261(2012)03-0004-02

# The hybrid mean value of involving the Smarandache exponent function $e_p(n)$

HUANG Wei

(Department of Basic Courses, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, Shaanxi, China)

**Abstract**: **Aim**　To study the properties of composite function $p^{e_q(A_k(n))}$. **Methods**　The elementary method and analytic method are adopted to investigate the aforesaid aim. **Results**　The mean value properties of this new arithmetic function are obtained. **Conclusion**　Some accurate asymptotic formula $\sum\limits_{n\leqslant x}p^{e_q(A_k(n))}$ for it was proven.

**Key words**: Smarandache exponent function; hybrid mean value; asymptotic formulae

**MSC 2010**: 11B83

## 1　引言及结论

对于任意给定的素数 $p$ 及正整数 $n$,Smarandache 指数函数 $e_p(n)$ 定义为最大的正整数 $\alpha$ 使得 $p^\alpha$ 整除 $n$,即:$e_p(n)=\max\{\alpha: p^\alpha \mid n\}$。

设 $k\geqslant 2$ 为正整数,对于任意正整数 $n$,若 $A_k(n)$ 满足 $A_k(n)\times n$ 为完全 $k$ 次方的最小正整数,我们称 $A_k(n)$ 为 $n$ 的 $k$ 次补数函数,也称 $A_k(n)$ 为 $n$ 的 $k$ 次补数,当 $k=2$ 或 3 时称 $A_k(n)$ 为 $n$ 的平方幂或者立方幂补数,记作 $A_2(n)$ 或 $A_3(n)$。著名数论学家 F. Smarandache 教授在文献[1]的第 68 个问题及第 29 个问题中要求我们研究数列 $\{e_p(n)\}$ 及 $\{A_k(n)\}$ 的性质,关于这个问题文献[2-5]已作了初步的研究,得到了如下的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}e_p^m(n)=\frac{p-1}{p}a_p(m)x+O(\log^{m+1}x),\ \sum_{n\leqslant x}p^{e_q(A_3(n))}=\frac{q^2+p^2q+p}{q^2+q+1}x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})。$$

本文用初等及解析方法研究了复合函数 $e_p(A_k(n))$ 的混合均值,推广了文[2]结论,即证明了下面的定理:

**定理**　设 $p$, $q$ 是 2 个素数,$k\geqslant 2$ 是一个给定的正整数,$n$ 为任意正整数,$A_k(n)$ 为 $n$ 的 $k$ 次补数,$\zeta(s)$ 是 Riemann-zeta-函数,对任意的实数 $x\geqslant 1$,有渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}p^{e_q(A_k(n))}=\frac{q^{k-1}+p^{k-1}q^{k-2}+p^{k-2}q^{k-3}+\cdots+p}{q^{k-1}+q^{k-2}+q^{k-3}+\cdots+1}x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

* 收稿日期:2012-01-28,修回日期:2012-02-29,网络出版时间:2012-05-22 18:00.
基金项目:国家自然科学基金项目(11071194);陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)
作者简介:黄　炜(1961-),男,陕西岐山人,教授,研究方向:数论及特殊函数. Email: wphuangwei@163.com

其中 $\varepsilon$ 是任意给定的正整数。

特别地，当 $k=2$ 或 $k=3$ 时有如下的推论：

**推论**　设 $p$，$q$ 是 2 个素数，对任意的实数 $x\geqslant 1$，有渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}p^{e_p(A_2(n))}=\frac{p+q}{q+1}x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),\sum_{n\leqslant x}p^{e_q(A_3(n))}=\frac{q^2+p^2q+p}{q^2+q++1}x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})。$$

## 2　引理及证明

为了完成定理的证明，我们需要下面的引理：

设 $s=\sigma+\mathrm{i}t$ 为复常数，$\zeta(s)$ 为 Riemann-zeta -函数，实数 $k\geqslant 1$，$p$ 为素数，若 $\varepsilon$ 是任意正整数，当 $\sigma>k(m-1)+1$ 时，定义 $B(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^{e_q(A_k(n))}}{n^s}$，则有以下引理：

**引理 1**　设 $\varepsilon$ 是任意正常数，当 $\sigma\geqslant k-1$ 时，则

(1) $B(s+1)$ 在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant k-1+\varepsilon$ 上有界且解析；

(2) $B(s)$ 有表达式

$$B(s)=R(s)\zeta(s),\tag{1}$$

其中

$$R(s)=\frac{q^{(k-1)s}+p^{k-1}q^{(k-2)s}+p^{k-2}q^{(k-3)s}+\cdots+p}{q^{(k-1)s}+q^{(k-2)s}+q^{(k-3)s}+\cdots+1}。$$

**证明**　(1) 设 $p$ 是一个素数，对于 $k$ 次补数 $A_k(p^n)$ 有

$$A_k(p^n)=\begin{cases}1, & n=km\\ p^{k-i}, & n=mk+i\end{cases}(1\leqslant i\leqslant m-1)$$

显然 $A_k(n)n^{k-i}$，又由级数 $B(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^{e_q(A_k(n))}}{n^s}$ 在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant k-1+\varepsilon$ 上绝对一致收敛，故 $B(s+1)$ 在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant k-1+\varepsilon$ 上有界且解析。

(2) 由 $e_p(n)$ 及 $A_k(n)$ 的定义知 $e_p(A_k(n))$ 是积性函数，当 $\sigma\geqslant k$ 时有

$$B(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{e_q(A_k(n))}}{n^s}=\prod_p\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(A_k(p^k))}}{p^{ks}}\Big)=\prod_p\Big(1+\frac{p^{e_q(A_k(p))}}{p^s}+\frac{p^{e_q(A_k(p^2))}}{p^{2s}}+\frac{p^{e_q(A_k(p^3))}}{p^{3s}}+\cdots\Big)=$$

$$\prod_p\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(A_k(p^{kt}))}}{p^{kts}}+\sum_{t=o}^{\infty}\frac{p^{e_q(A_k(p^{kt+1}))}}{p^{(kt+1)s}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(A_k(p^{kt+2}))}}{p^{(kt+2)s}}+\cdots+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(A_k(p^{kt+k-1}))}}{p^{(kt+k-1)s}}\Big)=$$

$$\Big(\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{q^{kts}}+\sum_{t=o}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{q^{(kt+1)s}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^{k-2}}{q^{(kt+2)s}}+\cdots+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p}{q^{(kt+k-1)s}}\Big)\Big)\prod_{p\neq q}\Big(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\Big)=$$

$$\Big(\frac{q^{ks}}{q^{ks}-1}+\frac{p^{k-1}q^{(k-1)s}}{q^{ks}-1}+\frac{p^{k-2}q^{(k-2)s}}{q^{ks}-1}+\cdots+\frac{pq^s}{q^{ks}-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{q^s}\Big)\zeta(s)=$$

$$\frac{(q^{ks}+p^{k-1}q^{(k-1)s}+p^{k-2}q^{(k-2)s}+\cdots+pq^s)(q^s-1)}{(q^{ks}-1)q^s}\zeta(s)=\frac{q^{(k-1)s}+p^{k-1}q^{(k-2)s}+p^{k-2}q^{(k-3)s}+\cdots+p}{q^{(k-1)s}+q^{(k-2)s}+q^{(k-3)s}+\cdots+1}\zeta(s),$$

取 $R(s)=\frac{q^{(k-1)s}+p^{k-1}q^{(k-2)s}+p^{k-2}q^{(k-3)s}+\cdots+p}{q^{(k-1)s}+q^{(k-2)s}+q^{(k-3)s}+\cdots+1}$，于是有 $B(s)=R(s)\zeta(s)$ .

## 3　定理的证明

现在我们来完成定理的证明。

**证明**　在著名的 Perron's 公式[10] 中，取 $s_0=0$，$b=2$，$T=x^{\frac{3}{2}}$，根据(1) 我们有

$$\sum_{n\leqslant x}p^{e_q(A_k(n))}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\zeta(S)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

其中 $\varepsilon$ 表示任意给定的正数。我们估计主项，将积分限积分，从 $s=2\pm iT$ 到 $s=\frac{1}{2}\pm iT$，被积函数为 $\zeta(S)R(s)\frac{x^s}{s}$ 有在一阶极点 $s=1$ 处的留数为

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{0!}\Big((s-1)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\Big)^{(0)}=R(1)x=\frac{q^{(k-1)}+p^{k-1}q^{(k-2)}+p^{k-2}q^{(k-3)}+\cdots+p}{q^{(k-1)}+q^{(k-2)}+q^{(k-3)}+\cdots+1}x,$$

即　(下转第 27 页)

doped $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ceramics [J]. Journal of Applied Physics, 2009, 105(3): 034109, 1-7.

[50] CHOI S W, HONG S H, KIM Y M. Effect of Al doping on the electric and dielectric properties of $CaCu_3Ti_4O_{12}$ [J]. Journal of the American Ceramic Society, 2007, 90(12): 4009-4011.

[51] KWON S, HUANG Chien-Chih, PATTERSON E A, et al. The effect of $Cr_2O_3$, $Nb_2O_5$, and $ZrO_2$ doping on the dielectric properties of $CaCu_3Ti_4O_{12}$ [J]. Materials Letters, 2008, 62(4-5): 633-636.

[52] GRUBBS R K, VENTURINI E L, CLEM P G, et al. Dielectric and magnetic properties of Fe-and Nb-doped $CaCu_3Ti_4O_{12}$ [J]. Physical Review B, 2005, 72, 104111, 1-11.

[53] LERET P, FERNANDEZ J F, FRUTOS J D, et al. Nonlinear I—V electrical behaviour of doped $CaCu_3Ti_4O_{12}$ Ceramics [J]. Journal of the European Ceramic Society, 2007, 27(13-15): 3901-3905.

[54] CHIODELLI G, MASSAROTTI V, CAPSONI D, et al. Electric and dielectric properties of pure and doped $CaCu_3Ti_4O_{12}$ perocskite materials [J]. Solid State Communications, 2004, 132(3-4): 241-246.

[55] LUO Feng-chao, HE Jin-liang, HU Jun, et al. Electric and dielectric behaviors of Y-doped calcium copper titanate [J]. Journal of the American Ceramic Society, 2010, 93(10): 3043-3045.

[56] PARKASH O, YADAV B, SINGH P, et al. Barrier layers formation in tin substituted calcium copper titanate $CaCu_3Ti_{4-x}Sn_xO_{12}$ ( $0 \leqslant x \leqslant 1.0$ ) [J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2006, 75 (9): 094717.1-094717.7.

[57] 王家俊. 聚酞亚胺/氮化铝复合材料的制备与性能研究[D]. 杭州：浙江大学，2001.

[58] PRAKASH B S, VARMA K B R. Dielectric behavior of CCTO/epoxy and Al-CCTO/epoxy composites [J]. Composites Science and Technology, 2007, 67(11-12): 2363-2368.

[59] THOMAS P, VARUGHESE K T, DWARAKANATH K, et al. Dielectric properties of poly(vinylidene fluoride)/$CaCu_3Ti_4O_{12}$ composites [J]. Composites Science and Technology, 2010, 70(3): 539-545.

[60] YANG Wen-hu, YU Shu-hui, SUN Rong, et al. Nano-and microsize effect of CCTO fillers on the dielectric behavior of CCTO/PVDF composites [J]. Acta Materialia, 2011, 59(14): 5593-5602.

（编校　邓珠平）

（上接第 5 页）

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT}+\int_{2-iT}^{2+iT}+\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}+\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=\frac{q^{(k-1)}+p^{k-1}q^{(k-2)}+p^{k-2}q^{(k-3)}+\cdots+p}{q^{(k-1)}+q^{(k-2)}+q^{(k-3)}+\cdots+1}x。\quad(2)$$

我们可以容易地得到估计：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}+\int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|\zeta(\sigma+iT)R(s)\frac{x^2}{T}\right|\mathrm{d}\sigma\ll\frac{x^{2+\varepsilon}}{T}=x^{\frac{1}{2}+\varepsilon},\quad(3)$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right)\right|\ll\int_{0}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)R(s)\frac{x^{\frac{1}{2}}}{T}\right|\mathrm{d}t\ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon},\quad(4)$$

因此有

$$\sum_{n\leqslant x}p^{e_q(A_k(n))}=\frac{q^{k-1}+p^{k-1}q^{k-2}+p^{k-2}q^{k-3}+\cdots+p}{q^{k-1}+q^{k-2}+q^{k-3}+\cdots+1}x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})。$$

这就完成了定理的证明。

**参考文献：**

[1] SMARANDACHE F. Only problems not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] GAO Nan. A hybrid number theoretic function and its mean value[C]//ZHANG Wen-peng. Research F. Smarandache Problems in Number Theory. Ann: Hexis, 2004: 107-109.

[3] 王阳. 关于平方补数的 $k$ 次均值[J]. 宁夏大学学报：自然科学版，2003, 24(1): 26-27.

[4] 王阳. 关于三次方补数的均值[J]. 纯粹数学与应用数学，2003, 19(2): 25-27.

[5] HUANG Wei. An arithmetical function and the $k$-th power complements [C]//ZHANG Wen-peng. Research F. Smarandache Problems in Number Theory. Ann: Hexis, 2005: 123-124.

[6] 潘承洞，潘承彪. 初等数论[M]. 北京：北京大学出版社，1992.

（编校：李哲峰）