一个包含伪Smarandache函数及其对偶函数的方程

张瑾

(西安文理学院初等教育学院, 陕西 西安 710001)

摘要：研究一个包含伪Smarandache函数及其对偶函数方程的可解性, 利用初等及组合方法给出了该方程的一系列正整数解, 并证明了该方程的所有奇数解必为奇素数p (≥ 5)的方幂.

关键词：伪Smarandache函数; 对偶函数; 方程; 正整数解; 初等方法

中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2009)04-0786-03

1 引言及结论

对于任意正整数n, 著名的伪Smarandache 函数$Z(n)$定义为最小的正整数m使得n整除$\frac{m(m+1)}{2}$. 即就是$Z(n) = \min\{m: \ m \in \mathbb{N}, \ n \mid \frac{m(m+1)}{2}\}$. 从$Z(n)$的定义容易推出$Z(n)$的前几个值为: $Z(1) = 1$, $Z(2) = 3$, $Z(3) = 2$, $Z(4) = 7$, $Z(5) = 4$, $Z(6) = 3$, $Z(7) = 6$, $Z(8) = 15$, $Z(9) = 8$, $Z(10) = 4$, $Z(11) = 10$, $Z(12) = 8$, $Z(13) = 12$, $Z(14) = 7$, $Z(15) = 5$, $Z(16) = 31$, $\cdots\cdots$. 关于$Z(n)$的算术性质, 许多学者也进行了研究,获得了不少有趣的结果[1-5]. 此外, 文[6]中引入了函数$Z(n)$的对偶函数$Z_*(n)$如下: $Z_*(n)$表示最大的正整数m使得$\frac{m(m+1)}{2}$整除n. 即就是$Z_*(n) = \max\{m: \ m \in \mathbb{N}, \ \frac{m(m+1)}{2} \mid n\}$, 其中$\mathbb{N}$表示所有正整数之集合. 显然由函数$Z(n)$及$Z_*(n)$的定义不难推出

$$Z_*(n) \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \leq Z(n) \tag{1}$$

同时文[6]中, Sandor 还证明了对任意素数$p \geq 5$及正整数n有

$$Z_*\left(p^n\right) = 1, \ Z_*\left(3^n\right) = 2$$

在第四届国际数论与Smarandache问题研讨会期间, 我与张文鹏教授进行了交流, 他建议我研究方程

$$Z(n) + Z_*(n) = n \tag{2}$$

的可解性, 同时他提出了下面的:

猜测 (A) 方程(2)只有有限个偶数解, 也许只有一个偶数解$n = 6$;

收稿日期：2008-05-09.

基金项目：国家自然科学基金(10671155), 陕西省教育厅科研专项基金(08JK433).

作者简介：张瑾(1980-), 讲师, 研究方向：基础数学.

(B) 方程(2)的所有奇数解必为奇素数p (≥ 5)的方幂.

本文利用初等及组合方法研究了这一问题, 并部分的解决了张文鹏教授的猜测. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 设n为任意正奇数, 则n满足方程(2)当且仅当n为素数p (≥ 5)的方幂. 即就是 $n = p^k$, 其中$p \geq 5$为素数, k为任意正整数.

显然我们的定理彻底解决了上面的猜测(B). 猜测(A)是否成立仍然是一个公开的问题, 有待于我们进一步研究!

2 定理的证明

这节利用初等及组合方法直接给出定理的证明. 事实上由伪Smarandache函数$Z(n)$的性质知对于任意奇素数p及正整数k, 我们有$Z(p^k) = p^k - 1$. 而当素数$p \geq 5$时, $Z_*(p^k) = 1$, 所以$Z(p^k) + Z_*(p^k) = p^k$. 从而$n = p^k$是方程(2)的正整数解, 其中$p \geq 5$为素数, k为任意正整数. 但是$Z(3^k) = 3^k - 1$, $Z_*(3^k) = 2$, 所以$Z(3^k) + Z_*(3^k) = 3^k + 1 \neq 3^k$. 所以$n = 3^k$不是方程(2)的解. 现在我们证明方程(2)除了以上正整数解之外, 再没有其它正奇数解. 显然$n = 1$不满足方程(2). 于是如果方程(2)有其它大于1的奇数解n, 则n至少含有两个不同的奇素因子.

不妨设$Z(n) = m$, 于是由$Z(n)$的定义知 $n \mid \frac{m(m+1)}{2}$. 设

$$(n,\ m) = u,\ n = u \cdot v,\ m = u \cdot m_1$$

则 $(u,\ v) = 1$ 且$v \mid (m+1)$. 不失一般性我们假定$u > v$. 于是由$v \mid (m+1)$ 可得

$$u \cdot m_1 + 1 \equiv 0 (\bmod v)$$

由此推出$m_1 \equiv -\overline{u} (\bmod v)$ 或者恒等式$m_1 = v - \overline{u}$, 其中$1 \leq \overline{u} \leq v-1$且$u \cdot \overline{u} \equiv 1 (\bmod v)$. 所以$m = u \cdot (v - \overline{u})$. 当$2 \leq \overline{u} \leq v - 1$时, 显然有

$$m = u \cdot (v - \overline{u}) \leq u \cdot (v - 2) \tag{3}$$

而由(1)式并注意到$u > v$可得

$$Z_*(n) = Z_*(u \cdot v) \leq \frac{\sqrt{8uv+1} - 1}{2} \leq \sqrt{2} \cdot u \tag{4}$$

于是结合(3)及(4)式可得

$$Z(n) + Z_*(n) \leq u \cdot (v-2) + \sqrt{2} \cdot u < u \cdot v = n$$

当$\overline{u} = 1$时, 此时$u \equiv 1 (\bmod v)$, 所以 $u = kv + 1$. 若$k = 1$, 则

$$m = (v+1)(v_1) = v^2 - 1,\ n = u \cdot v = (v+1) \cdot v,\ Z_*(n) = v$$

所以

$$Z(n) + Z_*(n) = v^2 - 1 + v < v^2 + v = (v+1) \cdot v = u \cdot v = n$$

若$k \geq 2$, 则此时

$$n = (kv+1)\cdot v,\ m = (kv+1)\cdot(v-1)$$

显然有

$$Z_*(n) \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{n} < \sqrt{kv+1}$$

于是有不等式

$$\begin{aligned} Z(n)+Z_*(n) &= m+Z_*(n) \leq (kv+1)\cdot(v-1)+\sqrt{kv+1} \\ &= (kv+1)\cdot v-(kv+1)+\sqrt{kv+1} \\ &< (kv+1)\cdot v = n \end{aligned}$$

结合以上几种情况我们立刻推出奇数n为方程(2)的解当且仅当$n = p^k$, 其中$p \geq 5$为素数, k为任意正整数. 于是完成了定理的证明.

显然$n = 6$是方程(2)的一个偶数解, 但是要彻底解决猜测(A)我们目前还没有想到有效的办法,建议有兴趣的读者与我们一起研究.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] David Gorski. The pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002,13:140-149.

[3] Kenichiro Kashihara. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems[M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[4] Lou Yuanbing. On the pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna., 2007,3(4):48-50.

[5] Zheng Yanni. On the Pseudo Smarandache function and its two conjectures[J]. Scientia Magna., 2007,3(4):50-53.

[6] Sandor J. On a dual of the pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002,13:18-23.

[7] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[8] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.

An equation involving the pseudo Smarandache function and its dual function

ZHANG Jin

(Department of Elemengtary Education Xi'an University of Arts and Science, Xi'an 710001, China)

Abstract: To study the positive integer solutions of an equation involving the pseudo Smarandache function and its dual function by using the elementary and combinational method. A series positive integer solutions are given for the equation. Finally, we proved that the odd number n satisfying the equation if and only if $n = p^k$, where $p \geq 5$ be a prime, and k be any positive integer.

Keywords: the pseudo Smarandache function, dual function, equation, positive integer solution, elementary method

2000MSC: 11B83