第 46 卷第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol.46, No. 1
2016 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 2016

伪 Smarandache 函数的上下界

冀永强

(西安思源学院 基础部, 陕西　西安 710038)

摘　要: 对于正整数 n, 设 $Z(n)=\min\{m|m\in\mathbb{N},\frac{1}{2}m(m+1)\equiv 0(\bmod n)\}$, 称为 n 的伪 Smarandache 函数. 设 r 是正整数. 根据广义 Ramanujan-Nagell 方程的结果, 运用初等数论方法证明了下列结果: i) $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{8n+1})\le Z(n)\le 2n-1$. ii) 当 $r\neq 1,2,3$ 或 5 时, $Z(2^r+1)\ge\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2^{r+3}\cdot 5+41})$. iii) 当 $r\neq 1,2,3,4$ 或 12 时, $Z(2^r-1)\ge\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2^{r+3}\cdot 3-23})$.

关键词: 伪 Smarandache 函数; 上下界; 广义 Ramanujan-Nagell 方程

1 引言

设 $\mathbb{N}$ 是全体正整数的集合. 对于正整数 n, 因为当 $m=2n$ 时同余关系

$$\frac{1}{2}m(m+1)\equiv(\bmod n) \tag{1.1}$$

显然成立, 所以存在正整数 m 可使 (1.1) 成立. 设 $Z(n)$ 是适合 (1.1) 的最小正整数 m. 如此的 $Z(n)$ 称为 n 的伪 Smarandache 函数. 近几年来, 关于 $Z(n)$ 的各种算数性质是数论中引人关注的问题 (参见文献 [1-6]).

设 p 是奇素数. 最近, 鲁伟阳, 高丽, 郝虹斐和王曦浛 [7] 讨论了 $Z(2^p\pm 1)$ 的下界, 根据 $2^p\pm 1$ 的素因数的性质证明了: 当 $p\ge 17$ 时, $Z(2^p\pm 1)\ge 10p$. 本文运用初等方法, 对于一般的正整数 n 给出了 $Z(n)$ 的上下界, 即证明了:

定理 1.1　当 $n>1$ 时,

$$\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{8n+1}\right)\le Z(n)\le\begin{cases}2n-1, & 当\ 2\mid n\ 时\\ n-1, & 当\ 2\nmid n\ 时\end{cases} \tag{1.2}$$

同时, 存在无穷多个正整数 n, 可使 (1.2) 中的不等号 “$\le$” 取等号 “$=$”.

从上述定理的后半部分可知: (1.2) 给出的 $Z(n)$ 的上界和下界是臻于至善的. 设 r 是正整数. 根据广义 Ramanujan-Nagell 方程的已知结果, 可得 $Z(2^r\pm 1)$ 更为精确的下界:

定理 1.2　当 $r\neq 1,2,3$ 或 5 时,

$$Z(2^r+1)\ge\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2^{r+3}\cdot 5+41}\right) \tag{1.3}$$

定理 1.3　当 $r\neq 1,2,4$ 或 12 时,

$$Z(2^r-1)\ge\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2^{r+3}\cdot 3-23}\right) \tag{1.4}$$

显然, 定理 1.2 和定理 1.3 给出的下界大大改进了文献 [7] 的结果.

收稿日期: 2015-08-14
资助项目: 国家自然科学基金 (11371291); 陕西省自然科学基金重点项目 (2013JZ001)

2 定理 1.1 的证明

首先讨论 $Z(n)$ 的下界. 设 $Z(n)=l$. 根据 $Z(n)$ 的定义可知正整数 l 满足同余关系 $\frac{1}{2}l(l+1)\equiv 0(\bmod n)$; 故有

$$\frac{1}{2}l(l+1)=nk,\ k\in\mathbb{N} \tag{2.1}$$

因为 $k\geq 1$, 所以从 (2.1) 可知 $l^2+l\geq 2n$. 因此, 通过解一元二次不等式 $l^2+l-2n\geq 0$ 即得

$$l\geq\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{8n+1}\right) \tag{2.2}$$

于是, 从 (2.2) 可知不等式 (1.2) 的左端成立.

由于当

$$n=\frac{1}{2}a(a+1),\ a\in\mathbb{N} \tag{2.3}$$

时, (2.1) 在 $l=a$ 且 $k=1$ 时成立, 所以此时 $Z(n)=a$. 因为从 (2.3) 可得 $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{8n+1}\right)=a$, 所以当 n 适合 (2.3) 时, 不等式 (1.2) 中第一个不等号 “$\leq$” 可取等号 “$=$”. 显然, 适合 (2.3) 的正整数 n 有无穷多个, 因此存在无穷多个 n 可使 (1.2) 中第一个不等号 “$\leq$” 可取等号 “$=$”.

以下讨论 $Z(n)$ 的上界. 当 n 是偶数时, 因为同余关系 (1.1) 在 $m=2n-1$ 时成立, 所以根据 $Z(n)$ 的定义可得

$$Z(n)\leq 2n-1,\ 2\mid n \tag{2.4}$$

当 n 是大于 1 的奇数时, 由于 $n-1$ 是正偶数, (1.1) 在 $m=n-1$ 时成立, 故有

$$Z(n)\leq n-1,\ 2\nmid n,\ n>1 \tag{2.5}$$

结合 (2.4) 和 (2.5) 可知不等式 (1.2) 的右端成立.

对于正整数 r, 设 $l=Z(2^r)$. 从 (1.2) 可知

$$l\leq 2^{r+1}-1 \tag{2.6}$$

又从 (1.1) 以及 $Z(n)$ 定义可知

$$l(l+1)\equiv 0(\bmod 2^{r+1}) \tag{2.7}$$

如果 l 是适合 $l<2^{r+1}-1$ 的偶数, 则因 $l+1$ 是奇数, 所以从 (2.7) 可得 $l\equiv 0(\bmod 2^{r+1})$ 以及 $2^{r+1}-1>l\geq 2^{r+1}$ 这一矛盾. 如果 l 是适合 $l<2^{r+1}-1$ 的奇数, 则从 (2.7) 可得 $l+1\equiv 0(\bmod 2^{r+1})$ 以及 $2^{r+1}>l+1\geq 2^{r+1}$ 这一矛盾. 因此, 从 (2.6) 可知 $l=2^{r+1}-1$, 此时 (1.2) 中第二个不等号 “$\leq$” 可取等号 “$=$”. 由于形如 $n=2^r$ 的正整数 n 的个数无穷, 所以存在无穷多个偶数 n 可使 (1.2) 中第二个不等号 “$\leq$” 可取等号 “$=$”.

对于奇素数 p, 设 $l=Z(p)$, 从 (1.2) 可知

$$l\leq p-1 \tag{2.8}$$

又从 (1.1) 可知

$$\frac{1}{2}l(l+1)\equiv 0(\bmod p) \tag{2.9}$$

如果 l 是适合 $l<p-1$ 的偶数, 则因 p 是奇素数, 故从 (2.9) 可得 $p>\max\{\frac{1}{2}l,l+1\}\geq p$ 这一矛盾. 如果 l 是适合 $l<p-1$ 的奇数, 则从 (2.9) 可得 $p-1>\max\{l,\frac{1}{2}(l+1)\}\geq p$ 这一矛

盾. 因此从 (2.8) 可知 $l=p-1$; 即当 $n=p$ 时, (1.2) 中第二个不等号 "$\le$" 可取等号 "$=$". 于是, 根据奇素数个数的无限性可知: 存在无穷多个奇数 n 有此性质. 定理证完.

3 定理 1.2 的证明

引理 3.1 方程

$$x^2-17=2^m,\ x,m\in\mathbb{N}$$

仅有解 $(x,m)=(5,3),(7,5),(9,6)$ 和 $(23,9)$.

证明 因为 $17=2^6-2^4\cdot 3+1$, 所以从文献 [8] 即得本引理.

定理 1.2 的证明 设 $l=Z(2^r+1)$. 从 (2.1) 可知

$$\frac{1}{2}l(l+1)=(2^r+1)k,\ k\in\mathbb{N} \tag{3.1}$$

如果 $k=1$, 则从 (3.1) 可得

$$(2l+1)^2-9=2^{r+3} \tag{3.2}$$

因为 $(2l+1)^2-9=(2l+4)(2l-2)$, $2l+4>2l-2$. 并且从 (3.2) 可知 $\gcd(2l+4,2l-2)=2$, 故有

$$2l+4=2^{r+2},\ 2l-2=2 \tag{3.3}$$

从 (3.3) 可知 $(l,r)=(2,1)$. 因此, 当 $r\ne 1$ 时, (3.1) 中的 $k>1$.

如果 $k=2$, 则从 (3.1) 可得

$$(2l+1)^2-17=2^{r+4} \tag{3.4}$$

根据引理 3.1, 从 (3.4) 可得 $(l,r)=(2,-1),(3,1),(4,2)$ 或 $(11,5)$. 因此, 结合 $k=1$ 时的情况可知: 当 $r\ne 1,2$ 或 5 时, 必有 $k>2$.

如果 $k=3$, 则从 (3.1) 可得

$$(2l+1)^2-25=2^{r+3}\cdot 3 \tag{3.5}$$

从 (3.5) 可得

$$2l+6=2^{r+2}\cdot 3\ 2l-4=2 \tag{3.6}$$

或

$$2l+6=2^{r+2},\ 2l-4=6 \tag{3.7}$$

又从 (3.6) 和 (3.7) 分别可得 $(l,r)=(3,0)$ 和 $(5,2)$.

如果 $k=4$, 则从 (3.1) 可得

$$(2l+1)^2-2^{r+5}=33 \tag{3.8}$$

当 r 是偶数时, $r+5$ 是奇数, 此时从 (3.8) 可知 2 是模 3 的二次剩余. 然而, 从文献 [9] 的定理 3.2.3 可知这是不可能的. 当 r 是奇数时, $r+5$ 是偶数, 此时从 (3.8) 可得

$$(2l+1)+2^{(r+5)/2}=33,\ (2l+1)-2^{(r+5)/2}=1 \tag{3.9}$$

或

$$(2l+1)+2^{(r+5)/2}=11,\ (2l+1)-2^{(r+5)/2}=3 \tag{3.10}$$

又从 (3.9) 和 (3.10) 可知 $(l,r)=(8,3)$ 和 $(3,-1)$. 综上所述可知: 当 $r\neq 1,2,3$ 或 5 时, 必有 $k>4$.

如果 $k>4$, 则 $k\geq 5$, 并且从 (3.1) 可知

$$l^2+l-2^{r+1}\cdot 5-11\geq 0 \tag{3.11}$$

于是, 从 (3.11) 可知此时 $Z(2^r+1)$ 满足 (1.3). 定理证完.

4 定理 1.3 的证明

引理 4.1 方程

$$x^2+7=2^m, x,m\in\mathbb{N}$$

仅有解 $(x,m)=(1,3)$, $(3,4)$, $(5,5)$, $(11,7)$ 和 $(181,15)$.

证明 参见文献 [10].

定理 1.3 的证明 设 $l=Z(2^r-1)$. 从 (2.1) 可知

$$\frac{1}{2}l(l+1)=(2^r-1)k,\ k\in\mathbb{N} \tag{4.1}$$

如果 $k=1$, 则从 (4.1) 可知

$$(2l+1)^2+7=2^{r+3} \tag{4.2}$$

根据引理 4.1, 从 (4.2) 可得 $(l,r)=(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(5,4)$ 和 $(90,12)$. 因此, 当 $r\neq 1,2,4$ 和 12 时, (4.1) 中的 $k>1$.

如果 $k=2$, 则从 (4.1) 可知

$$2^{r+4}-(2l+1)^2=15 \tag{4.3}$$

当 r 是奇数时, 从 (4.3) 可知 2 是模 3 的二次剩余, 故不可能. 当 r 是偶数时, 从 (4.3) 可得

$$2^{(r+4)/2}+2l+1=15,\ 2^{(r+4)/2}-2l-1=1 \tag{4.4}$$

或

$$2^{(r+4)/2}+2l+1=5,\ 2^{(r+4)/2}-2l-1=3 \tag{4.5}$$

又从 (4.4) 和 (4.5) 分别可得 $(l,r)=(3,2)$ 和 $(0,0)$. 因此, 结合 $k=1$ 时情况可知: $r\neq 1,2,4$ 或 12 时, 必有 $k>2$.

如果 $k>2$, 则因 $k\geq 3$, 故从 (4.1) 可得

$$l^2+l-2^{r+1}\cdot 3+6\geq 0 \tag{4.6}$$

于是, 从 (4.6) 可知此时 $Z(2^r-1)$ 满足 (1.4). 定理证完.

参考文献

[1] 熊海. Smarandache 函数与伪 Smarandache 函数相关性质研究 [J]. 数学理论与应用, 2010, 30(2): 123-128.

[2] 李玲, 姚维利. 一个包含 Smarandache 函数与伪 Smarandache 函数的方程及其正整数解 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2010, 33(2): 200-202.

[3] 扬长恩. 关于 Smarandache 函数的两个方程 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(3): 387-390.

[4] 李彩娟. 一个包含两个 Smarandache 函数的方程及其正整数解 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2010, 27(4): 446-448.

[5] 王锦瑞. 一个数论函数方程的可解性 [J]. 吉林化工学院学报, 2013, 30(3): 88-90.
[6] 高丽, 鲁伟阳, 郝虹斐. 包含伪 Smarandache 函数与 Euler 函数的两个方程 [J]. 陕西科技大学学报, 2013, 31(6): 163-165.
[7] 鲁伟阳, 高丽, 郝虹斐, 王曦浛. 关于伪 Smarandache 函数的一个下界估计 [J]. 陕西科技大学学报, 2014, 32(6): 180-183.
[8] Beukers F. On the generalized Ramanujan-Nagell equation I [J]. Acta Arith, 1980, 38(4): 389-410.
[9] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.
[10] Nagell T. The diophantine equation $x^2+7=2^n$ [J]. Ark Mat, 1960, 4(2): 185-187.

Upper Bounds and Lower Bounds for the Pseudo-Smarandache Function

JI Yong-qiang

(Department of Basic Courses, Xi'an Siyuan University, Xi'an 710038, China)

Abstract: For any positive integer n, let $Z(n)=\min\{m|m\in\mathbb{N},\ \frac{1}{2}m(m+1)\equiv 0(\bmod n)\}$, which is called the pseudo-Smarandache function of n. Let r be a positive integer. In this paper, by using the results of generalized Ramanujan-Nagell equations with some elementary methods, we prove the following results: (i) $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{8n+1})\leq Z(n)\leq 2n-1$. (ii) If $r\neq 1,2,3$ or 5, then $Z(2^r+1)\geq\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2^{r+3}\cdot 5+41})$. (iii)If $r\neq 1,2,3,4$ or 12, then $Z(2^r-1)\geq\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2^{r+3}\cdot 3-23})$.

Keywords: pseudo-Smarandache function; upper bound; lower bound; generalized Ramanujan-Nagell equation