关于F.Smaradache LCM 函数与除数函数$\sigma_\alpha(n)$的混合均值

付　静[1,2], 刘　华[3]

(1.西北大学 数学系, 陕西 西安 710127; 2.长春师范学院 数学系, 吉林 长春 130032; 3.商丘师范学院 数学系, 河南 商丘 476000)

摘　要: 对任意正整数n, 著名的F.Smarandache LCM 函数$SL(n)$定义为最小的正整数k, 使得$n|[1,2,\cdots,k]$, 其中$[1,2,\cdots,k]$表示$1,2,\cdots,k$的最小公倍数.利用初等方法研究一类包含F.Smarandache LCM函数与除数函数$\sigma_\alpha(n)$的混合均值, 给出一个较强的渐近公式.

关键词: F.Smarandache LCM 函数; 除数函数; 混合均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4　　文献标志码: A　　文章编号: 1001-8735(2010)06-0560-03

1　引言及结论

对任意正整数n, 著名的F.Smarandache LCM 函数$SL(n)$定义为最小的正整数k, 使得$n\ |[1,2.\cdots,k]$, 其中$[1,2,\cdots,k]$表示$1,2,\cdots,k$的最小公倍数.例如, $SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $SL(4)=4$, $SL(5)=5$, $SL(6)=3$, $SL(7)=7$, $SL(8)=8$, $SL(9)=9$, $SL(10)=5$, $SL(11)=11$, $SL(12)=4$, $SL(13)=13$, $SL(14)=7$, $SL(15)=5$, $SL(16)=16$, …由$SL(n)$的定义容易推出, 如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是$n$的标准分解式, 那么

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}. \tag{1}$$

关于$SL(n)$的初等性质, 许多学者进行了研究, 并得到一系列有趣的结果[1-7].文献[1]证明了如果n是一个素数, 那么$SL(n)=S(n)$, 这里$S(n)$是F.Smrandache 函数, 即$S(n)=\min\{m:n|m!, m\in N\}$.另外, 文献[1]还提出了下面的问题:

$$SL(n)=S(n),\quad S(n)\neq n\ ? \tag{2}$$

文献[2]解决了上述问题, 并证明了下面的结论:

任何满足(2)式的整数可表示为$n=12$或$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$, 其中$p_1p_2\cdots p_rp$是不同的素数, 且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是满足$p>p_i^{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,r)$的正整数.

文献[3]研究了$SL(n)$的均值问题, 证明了对任意给定的正整数k及任意实数$x>2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x_i^2}{\ln^{k+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中$c_i(i=2,3,\cdots,k)$为可计算的常数.

文献[4]研究了$[SL(n)-S(n)]^2$的均值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-S(n))^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中$\zeta(s)$是Riemen zeta函数, $c_i(i=1,2,\cdots,k)$是可计算的常数.

文献[5]研究了$k\geqslant 2$时$d(n)SL(n)$的混合均值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)\cdot SL(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

收稿日期: 2010-06-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)

作者简介: 付　静(1982—), 女, 内蒙古通辽市人, 长春师范学院助教, 主要从事数论研究, E-mail: fu-jing-love@163.com.

其中 $c_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

本文的主要目的是研究一个包含 F.Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与除数函数 $\sigma_\alpha(n)$ 的混合均值 $\sigma_\alpha SL(n)$ 问题，即对文献[5] 进行推广.

定理　设 $k\geqslant 2$ 为给定的正整数，则对任意实数 $x\geqslant 2$，有渐近式

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(n)\cdot SL(n)=\frac{\zeta(\alpha+2)\zeta(2)}{2+\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha+2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\alpha+2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中：$\sigma_\alpha(n)$ 为除数函数，即 n 的所有正因子的 α 次方幂的和（$\alpha\geqslant 1$）；$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d\mid n}d^\alpha$；$c_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

2　定理的证明

利用初等及解析的方法可以直接给出定理的证明. 事实上，在和式 $\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(n)\cdot SL(n)$ 中，将所有 $[1,x]$ 中的整数分为两个子集合 U，V，其中 U 包含所有满足存在素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数 n；而集合 V 包含区间 $[1,x]$ 中不属于集合 U 的那些正整数. 利用性质(1)，我们有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(n)\cdot SL(n)=\sum_{n\in U}\sigma_\alpha(n)\cdot SL(n)+\sum_{n\in V}\sigma_\alpha(n)\cdot SL(n).$$

先讨论集合 U 的情况.

$$\begin{aligned}\sum_{n\in U}\sigma_\alpha(n)\cdot SL(n)&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n,\ \sqrt{n}<p}}\sigma_\alpha(n)\cdot SL(n)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}\sigma_\alpha(np)\cdot SL(np)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}(1+p^\alpha)\cdot p\cdot\sigma_\alpha(n)=\\ &\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}(p+p^{\alpha+1})=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^{\alpha+1}.\end{aligned}\tag{3}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$，由 Abel 求和公式（参阅文献[8] 中定理 4.2）及素数定理（参阅文献[9] 中定理 3.2）知，

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数且 $c_1=1$. 于是有

$$\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p=\frac{x}{n}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n\cdot\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}\pi(y)\,\mathrm{d}y=\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right).\tag{4}$$

用同样的方法可以求出

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^{\alpha+1}&=\left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha+1}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n^{\alpha+1}\cdot\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}(\alpha+1)y^\alpha\pi(y)\,\mathrm{d}y=\\ &\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)n^{\alpha+2}\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\alpha+2}\ln^i n}{n^{\alpha+2}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{n^{\alpha+2}\ln^{k+1}x}\right).\end{aligned}\tag{5}$$

那么

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^{\alpha+1}=\\ &\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{\sigma_\alpha(n)\cdot x^2}{2n^2\cdot\ln x}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^2\cdot\ln^i n\cdot\sigma_\alpha(n)}{n^2\cdot\ln^i x}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}O\left(\frac{x^2\cdot\sigma_\alpha(n)}{n^2\cdot\ln^{k+1}x}\right)+\\ &\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{\sigma_\alpha(n)\cdot x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)\,n^{\alpha+2}\cdot\ln x}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{\alpha+2}\cdot\ln^i n\cdot\sigma_\alpha(n)}{n^{\alpha+2}\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}\cdot\sigma_\alpha(n)}{n^{\alpha+2}\cdot\ln^{k+1}x}\right).\end{aligned}\tag{6}$$

注意到（参阅文献[10]）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^2}=\zeta(2)\cdot\zeta(2-\alpha),\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^{\alpha+2}}=\zeta(2)\cdot\zeta(\alpha+2),$$

结合(3)～(6)式可得

$$\sum_{n\in U}\sigma_\alpha(n)SL(n)=\frac{x^2}{2\ln x}\cdot\zeta(2)\zeta(2-\alpha)+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^2\ln^i n}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)+\frac{\zeta(\alpha+2)\zeta(2)}{\alpha+2}\frac{x^{\alpha+2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\alpha+2}\ln^i n}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\ln^{k+1}x}\right)=\frac{\zeta(\alpha+2)\zeta(2)}{\alpha+2}\frac{x^{\alpha+2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\alpha+2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{7}$$

其中 $\alpha\geqslant 1$, c_i 为可计算的常数.

下面讨论集合 V 中的情况. 由(1)式及集合 V 的定义知, 对任意 $n\in V$, 当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 时, 有 $SL(n)=p_r\leqslant\sqrt{n}$ 或 $SL(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant x}\{p_i^{\alpha_i}\}=p^s(s\geqslant 2)$ 两种情况. 这样得到

$$\sum_{n\in V}\sigma_\alpha(n)SL(n)\leqslant\sum_{np\leqslant x}\sigma_\alpha(np)\sqrt{np}+\sum_{np^s\leqslant x,s\geqslant 2}p^s\sigma_\alpha(np^s)\leqslant\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(np^s)\sqrt{n}\ln n\leqslant x^{\alpha+\frac{3}{2}}\ln x.\tag{8}$$

其中用到渐近公式 $\sum\limits_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O(x^\beta)$, 这里 $\beta=\max\{1,\alpha\}$. 于是, 由集合 U 和 V 的定义并结合(3), (7)及(8)式可以得到

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(n)SL(n)=\sum_{n\in U}\sigma_\alpha(n)SL(n)+\sum_{n\in V}\sigma_\alpha(n)SL(n)=\frac{\zeta(\alpha+2)\zeta(2)}{2+\alpha}\frac{x^{\alpha+2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\alpha+2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\alpha\geqslant 1$, c_i 为可计算的常数. 于是完成了定理的证明.

参考文献:

[1] Murthy A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal, 2001(12): 307-309.

[2] Le M H. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004(14): 186-188.

[3] Lv zhongtian. On the F.Smarandanche LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[4] Jian Ge. Mean value of F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Mgana, 2007, 3(2): 109-112.

[5] 吕国亮. 关于F. Smarandache LCM 函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 315-318.

[6] 闫晓霞. Smarandache LCM 函数与其对偶函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2010, 39(3): 229-231.

[7] 朱敏慧. 关于F. Smarandache 简单函数与 Dirichlet 除数和函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2010, 39(5): 441-443.

[8] Tom M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory[J]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[9] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[10] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

On a Hybird Mean Value of the F.Smarandache LCM Function and the Divisor Function

FU Jing[1,2], LIU Hua[3]

(1. *Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an* 710127, *China*;
2. *Department of Mathematics, Changchun Normal University, Changchun* 130032, *China*;
3. *Department of Mathematics, Shangqiu Normal University, Shangqiu* 476000, *Henan, China*)

Abstract: For any positive integer n, the famous F.Smarandache LCM function $SL(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n\mid[1,2,\cdots,k]$, where $[1,2,\cdots,k]$ denotes the least common multiple of 1, 2, ⋯, k. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study a hybird mean value problem involving the F.Smarandache LCM function and the divisor function, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words: F. Smarandache LCM function; divisor function; hybrid mean value; asymptotic formula

【责任编辑 陈汉忠】