西北大学学报(自然科学版)
2009年4月,第39卷第2期,Apr., 2009, Vol.39, No.2
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

关于F.Smarandache可乘数函数的一类均值

李江华

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要:目的 研究F.Smarandache可乘数函数$f(n)$的一类均值。方法 利用初等及解析方法。结果 将研究的问题转变成除数函数及素数分布问题。结论 给出一类F.Smarandache可乘数函数特殊均值的一个有趣的渐近公式。

关 键 词:F.Smarandache可乘数函数;均值;渐近公式
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2009)02-0186-03

1 引言及结论

设n为任意正整数,一个算术函数$f(n)$称为F.Smarandache可乘的,如果$f(1)=1$,当$n>1$且$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准分解式时,有$f(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{f(p_i^{\alpha_i})\}$。例如函数$S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$是F.Smarandache可乘函数。因为从$S(n)$的定义,很容易推断出,如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$是$n$的标准素因数分解式,那么

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\},$$

所以说$S(n)$是F.Smarandache可乘函数,它的前几个值是$S(1)=1$,$S(2)=2$,$S(3)=3$,$S(4)=4$,$S(5)=5$,$S(6)=3$,$S(7)=7$,$S(8)=4$,$S(9)=6$,$S(10)=5$,…。关于$S(n)$的算术性质,有不少学者进行过研究,获得了许多有重要理论价值的研究成果[1-5]。例如,Farris Mark和Michell Partick在文献[2]中研究了$S(n)$的有界性问题,得出了$S(p^\alpha)$的上下界估计,即证明了

$$(p-1)\alpha+1\leqslant S(p^\alpha)\leqslant(p-1)[\alpha+1+\log_p\alpha]+1。$$

Lu Yaming研究了一个包含$S(n)$的方程的可解性问题[3],证明了对任意正整数$k\geqslant 2$,方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$。

Jozsef Sandor[4]进一步证实对任意正整数$k\geqslant 2$存在无限多组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)。$$

同样,又存在无限多组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$,使得

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)。$$

徐哲峰[5]研究了$S(n)$的值分布问题,获得了一个更深刻的结果,即证明了下面的定理。

设$P(n)$表示n的最大素因子,则对任意实数$x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。\tag{1}$$

其中$\zeta(s)$表示Riemann Zeta函数。

此时,当$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准素因数分解式时,令

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}。$$

显然这个函数也是F.Smarandache可乘函数,它称为F.Smarandache LCM函数。关于这个函数的性质,也有不少学者进行过研究,参阅文献[6-8]。

本文研究另一个F.Smarandache可乘函数

收稿日期:2008-06-11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:李江华,女,陕西渭南人,从事数论研究。

$\bar{S}(n)$的均值问题, 根据文献[9], 定义$\bar{S}(n)$如下: $\bar{S}(1)=1$, 当$n>1$且$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准素因数分解式时, 令

$$\bar{S}(n)=\max\{\alpha_1 p_1,\ \alpha_2 p_2,\ \alpha_3 p_3,\ \cdots,\ \alpha_k p_k\}。$$

容易验证这个函数是 F. Smarandache可乘函数。关于它的初等性质, 不少学者也进行过研究, 如文献[6]中指出在式(1)中用$\bar{S}(n)$替换$S(n)$, 结论同样成立。文献[9]中还证明了下面的结论: 设k为任意正整数。那么对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\left(\bar{S}(n)-P(n)\right)^2=x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

其中$P(n)$表示n的最小素因子, $c_i(i=1, 3, \cdots, k)$为可计算的常数且$c_1=\frac{2}{3}$。

现在对任意实数$x>2$考虑求和式

$$\sum_{\substack{n\in N\\ \bar{S}(n)\leqslant x}}1。\tag{2}$$

其中N表示所有正整数之集合。

本文的主要目的是研究式(2)的渐近性质, 并给出一个有趣的渐近公式, 即证明下面的定理。

定　理　对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in N\\ \bar{S}(n)\leqslant x}}1=e^{c\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right)}。$$

其中$c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$是一个常数。

由此定理立刻得到下面的推论。

推　论　对任意实数$x>1$, 设$\pi(x)$表示所有不大于x的素数的个数, 则有极限公式

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sum_{\substack{n\in N\\ \bar{S}(n)\leqslant x}}1\right]^{\frac{1}{\pi(x)}}=e^{c}。$$

2　定理的证明

用初等方法及素数定理直接给出定理的证明。设x是实数且$x>2$, 那么对任意素数$p\leqslant x$, 显然存在惟一的正整数$\alpha=\alpha(p)$, 使得

$$\alpha(p)\cdot p\leqslant x<(\alpha(p)+1)\cdot p$$

或者

$$\alpha(p)=\left[\frac{x}{p}\right]。$$

由函数$\bar{S}(n)$的性质知如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$是$n$的标准素因子分解, 那么当$\bar{S}(n)\leqslant x$时对于任意$d|n$都有$\bar{S}(d)\leqslant x$。此外, 对任意正整数$m$和$n$, 当$(m,n)=1$且$\bar{S}(m)\leqslant x$, $\bar{S}(n)\leqslant x$时, 由函数$\bar{S}(n)$的定义不难推出$\bar{S}(mn)\leqslant x$。所以当$\alpha(p)=\left[\frac{x}{p}\right]$时, 设$m=\prod_{p\leqslant x}p^{\alpha(p)}$, 则所有满足$\bar{S}(n)\leqslant x$的正整数$n$都是$m$的因子。设$N$表示所有正整数集合, 则通过前面分析以及除数函数的性质, 有

$$\sum_{\substack{n\in N\\ \bar{S}(n)\leqslant x}}1=\sum_{d|m}1=d(m)=\prod_{p\leqslant x}\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)=e^{\sum_{p\leqslant x}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)}。\tag{3}$$

设$k=[\ln^2 x]$, 那么应用素数定理[10,11]

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\leqslant x}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)=\\
&\sum_{\frac{x}{\ln^2 x}<p\leqslant x}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)+\sum_{p\leqslant\frac{x}{\ln^2 x}}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)=\\
&\sum_{\frac{x}{\ln^2 x}<p\leqslant x}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)+O\left(\sum_{p\leqslant\frac{x}{\ln^2 x}}\ln x\right)=\\
&\sum_{n=1}^{k-1}\sum_{\frac{x}{n+1}<p\leqslant\frac{x}{n}}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=\\
&\sum_{n=1}^{k-1}\sum_{\frac{x}{n+1}<p\leqslant\frac{x}{n}}\ln(1+n)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=\\
&\sum_{n=1}^{k-1}\left[\frac{x}{n\ln\frac{x}{n}}-\frac{x}{(n+1)\ln\frac{x}{n+1}}\right]\ln(n+1)+\\
&O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n}\right)=\\
&\frac{x}{\ln x}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right)=\\
&c\cdot\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right)。
\end{aligned}\tag{4}$$

其中$c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$是一个常数。

结合式(3)及式(4)立刻得到渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in N\\ \bar{S}(n)\leqslant x}}1=e^{c\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right)}。$$

于是完成了定理的证明。

由定理及素数定理并注意到$y\to 0$时$e^y=1+O(y)$立刻得到

$$\left[\sum_{\substack{n\in N\\ \bar{S}(n)\leqslant x}}1\right]^{\frac{1}{\pi(x)}}=e^{c+O\left(\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}\right)}=e^{c}+O\left(\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}\right)。$$

在上式中取 $x\to\infty$不难得到推论。

致谢:作者对导师张文鹏教授的细心指导表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] MARK F, PATRICK M. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 37-42.

[3] LIU Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[4] SANDOR J. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[5] 徐哲峰. Smarandache函数的值分布性质[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[6] LE Mao-hua. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[7] LV Zhong-tian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[8] 吕国亮. 关于 F. Smarandache LCM函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 315-318.

[9] 沈虹. 一个新的数论函数及其他的值分布[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 235-238.

[10] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003.

[11] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

(编 辑 亢小玉)

On the mean value of the F. Smarandache multiplicative function

LI Jiang-hua

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China)

Abstract: Aim To study the mean value of the F. Smarandache multiplicative function f(n). Methods Using the elementary and analytic methods. Results The research problem was changed into the Dirichlet divisor problem and the prime distribution problem. Conclusion An interesting asymptotic formula for the mean value of f(n) is given.

Key words: F. Smarandache multiplicative function; mean value; asymptotic formula

·学术动态·

我校3项科研成果荣获省部级科学技术一等奖

近日,从教育部和省政府传来喜讯,2008年度我校有3项重大科研成果获省部级科学技术奖一等奖,其中地质学系张兴亮教授等完成的“后生动物门类起源与早期演化研究”荣获教育部高等学校科学研究优秀成果奖(科学技术)一等奖,化学与材料科学学院王尧宇教授等完成的“多功能配位聚合物的构筑、性能、构效关系及应用研究”和地质学系赖绍聪教授等完成的“青藏高原北部岩浆作用及其大陆动力学意义”荣获陕西省科学技术奖一等奖。这是我校在政府科技奖励方面取得的又一次标志性成果。自2001年以来,我校共获得国家自然科学一等奖1项,获得教育部科学技术一等奖2项,获得陕西省科学技术一等奖9项。

教育部高等学校科学研究优秀成果奖(科学技术)面向全国高等院校,每年评审一次,授予高等学校在科学发现、技术发明和科技进步等方面做出突出贡献的科技工作者和单位,是国家教育部对广大科技工作者多年来从事科技工作的肯定,分设自然科学奖、技术发明奖、科技进步奖、科技进步奖(推广类)和专利奖。2008年度授奖项目已经公布,自然科学奖97项(其中一等奖43项);技术发明奖34项(其中一等奖13项);科技进步奖145项(其中一等奖58项);科技进步奖(推广类)10项(其中一等奖2项);专利奖3项(其中一等奖1项)。陕西省科学技术奖授予在本省从事科学研究、技术开发、成果转化以及产业化等科技活动,并为本省做出创造性突出贡献的科技工作者和单位。2008年度授奖项目共计203项,其中一等奖28项,二等奖68项,三等奖107项。

(薛 鲍)