DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2012.04.014

第 25 卷第 4 期 纺织高校基础科学学报 Vol. 25, No. 4
2012 年 12 月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Dec., 2012

文章编号:1006-8341(2012)04-0407-03

关于 F. Smarandache 因子分拆问题

刘宝利

(西安航空职业技术学院 计算机工程系,陕西 西安 710089)

摘要: 对于 F. Smarandache 因子分析,利用初等及组合方法研究一些特殊整数的所有不同分拆个数的计算问题,并给出一个确切的计算公式,从而解决了 Amarnath Murthy 及 Charles Ashbacher 提出的 2 个猜想!

关键词: F. Smarandache 因子分拆; 猜想; 初等方法;组合方法;恒等式

中图分类号: O 156.4 **文献标识码:** A

1 引言及结论

对任意正整数 $n>1$,如果将 n 表示成它的某些大于 1 的因数的乘积,则称这个乘积为 n 的一个 F. Smarandache 因子分拆. 例如,当 $n=48$ 时,有 $n=48, 12\cdot 4, 12\cdot 2\cdot 2, 8\cdot 6, 8\cdot 3\cdot 2, 6\cdot 4\cdot 2, 6\cdot 2\cdot 2\cdot 2, 4\cdot 4\cdot 3, 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2, 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$. 因此 n 的所有不同的 F. Smarandache 因子分拆的个数为 12,记为 $F(n)=12$. 现在设 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$. 显然根据 n 的一个 F. Smarandache 因子分拆的定义,不难推出 $F(n)$ 只与素因数 p_i 的指数 α_i 有关,而与具体那个素数无关. 即就是 $F(p^\alpha\cdot q^\beta)=F(p^\beta\cdot q^\alpha)$,其中 p 及 q 为 2 个不同的素数. 因此记 $F(n)=F(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_k)$,特别当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=1$ 时,记 $F(1,1,\cdots,1)=F(1\#k)$. 此外,如果 n 分解成 r 个因数的乘积,就称这个分拆的长度为 r. 例如 $n=5\cdot 3\cdot 2$, 则这个分拆的长度为 3. 一般地如果 $p_1p_2p_3\cdots p_r$ 是 n 的一个分拆, 则它的长度为 r. 用 $\text{Extent}\{F(1\#n)\}$ 表示含有 n 个不同素因子的无平方因子数的所有不同 F. Smarandache 因子分拆的长度之和. 例如 $\text{Extent}\{F(1\#2)\}=1+2=3$, $\text{Extent}\{F(1\#3)\}=1+3\cdot 2+3\cdot 1=10$.

此时,$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为无平方因子数且含有 k 个不同的素因子. 对于函数 $F(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_k)$, Amarnath Murthy 及 Charles Ashbacher 在文献[1] 中进行了研究,获得了一系列重要的结论,同时也提出了 2 个有趣的猜想:

猜想 A $F(1\#(n+1))-F(1\#n)=\text{Extent}(F(1\#n))$.

猜想 B $F(1\#(n+1))=\sum_{r=1}^{n}\text{Extent}(F(1\#r))$.

本文利用初等及组合方法研究上述 2 个问题,并给予彻底解决. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 1 对任意正整数 n,有恒等式 $F(1\#(n+1))-F(1\#n)=\text{Extent}(F(1\#n))$;

显然反复使用定理 1 不难推出下面的:

收稿日期:2012-09-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅科研专项基金资助项目(11JK0487)

作者简介:刘宝利(1979-),女,陕西省宝鸡市人,西安航空职业技术学院讲师. E-mail:liubaoliabc@163.com

推论 1 对任意正整数 n，有恒等式 $F(1\#(n+1))=\sum_{r=1}^{n}\mathrm{Extent}(F(1\#r))$.

对于正整数 $n=p_1^2p_2^2p_3^2\cdots p_n^2$，是否存在 $F(2,2,\cdots,2)=F(2\#n)$ 的一个计算公式是一个没有解决的公开问题，有待于进一步研究.

2 定理的证明

2.1 定理 1 的证明

利用初等方法、组合方法直接给出定理 1 的证明. 文中所使用的初等数论知识以及组合方法均可以在文献[2-4]中找到，其他有关 F. Smarandache 数列、问题及猜想可参见文献[5-9]，这里不再一一重复.

对于 2 个正整数 $N=p_1p_2p_3\cdots p_n$ 及 $N_1=p_1p_2p_3\cdots p_np_{n+1}$. 考虑它们所有 F. Smarandache 因子分拆. 将 N 的所有 F. Smarandache 因子分拆集合按照它们的长度进行分类：I_i 表示 N 的所有 F. Smarandache 因子分拆集合中长度为 i 的所有元素的集合，$1\leqslant i\leqslant n$. 设 $|I_i|$ 表示集合 I_i 中所包含元素的个数，则显然有恒等式

$$F(1\#n)=|I_1|+|I_2|+\cdots+|I_n|=\sum_{i=1}^{n}|I_i|. \tag{1}$$

例如当 $N=30$ 时，有 $I_1=\{30\}$，$I_2=\{15\cdot2,10\cdot3,6\cdot5\}$，$I_3=\{5\cdot3\cdot2\}$. 所以有 $F(1\#3)=1+3+1=5$，$\mathrm{Extent}(F(1\#3))=1+2+2+2+3=10$. 现在对 N 的任意一个长度为 i 的 F. Smarandache 因子分拆子集 I_i，用 p_{n+1} 及 I_i 通过下列方式构造 N_1 的 2 个 F. Smarandache 因子分拆子集：$\forall N=d_1d_2\cdots d_i\in I_i$，用 p_{n+1} 分别乘以 $d_1,d_2,\cdots,d_i$ 得到 N_1 的 F. Smarandache 因子分拆集合中的 i 个元素

$$N_1=(p_{n+1}d_1)\cdot d_2\cdots d_i,N_1=d_1\cdot(p_{n+1}d_2)d_3\cdots d_i,N_1=d_1\cdot d_2\cdots d_{i-1}\cdot(p_{n+1}d_i).$$

同样还可以构造 N_1 因子分拆集合中另一个元素 $N_1=d_1d_2\cdots d_ip_{n+1}$. 这样以来，由 $I_1I_2,\cdots,I_n$ 及 p_{n+1} 可以构造出 N_1 的所有 F. Smarandache 因子分拆元素. 例如 $N=6$，$N_1=30$，则 N 的因子分拆中 $I_1=\{6\}$，$I_2=\{3\cdot2\}$. 现在利用这个 I_1，I_2 及素数 5 构造 $N_1=30$ 的 F. Smarandache 因子分拆：用 5 乘以 I_1 中的每一个元素获得一个集合 $I'_1=\{30\}$；然后利用 5 和 I_1 中的每一个元素对接起来形成另一个集合 $I''_1=\{6\cdot5\}$. 再利用 5 乘以 I_2 中的每一个元素获得一个集合 $I'_2=\{10\cdot3,15\cdot2\}$；然后利用 5 和 I_2 中的每一个元素对接起来形成另一个集合 $I''_2=\{5\cdot3\cdot2\}$. 于是由这几个集合中包含的元素的个数以及构造方法立刻推出

$$F(1\#3)=|I_1|+1\times|I_1|+|I_2|+2\times|I_2|=F(1\#2)+\mathrm{Extent}(F(1\#2)). \tag{2}$$

或者

$$F(1\#3)-F(1\#2)=\mathrm{Extent}(F(1\#2)), \tag{3}$$

如果 $N=30$，$N_1=210$. 则 $I_1=\{30\}$，$I_2=\{15\cdot2,10\cdot3,6\cdot5\}$，$I_3=\{5\cdot3\cdot2\}$. 现在利用 I_1，I_2，I_3 及素数 7 构造 $N_1=210$ 的 F. Smarandache 因子分拆：用 7 乘以 I_1 中的每一个元素获得一个集合 $I'_1=\{210\}$；然后利用 7 和 I_1 中的每一个元素对接起来形成另一个集合 $I''_1=\{30\cdot7\}$. 再利用 7 乘以 I_2 中的每一个元素获得一个集合 $I'_2=\{105\cdot2,15\cdot14,21\cdot10,35\cdot6,42\cdot5,70\cdot3\}$；然后利用 7 和 I_2 中的每一个元素对接起来形成另一个集合 $I''_2=\{15\cdot7\cdot2,10\cdot7\cdot3,7\cdot6\cdot5\}$. 用 7 乘以 I_3 中的每一个元素，得 $I'_3=\{35\cdot3\cdot2,21\cdot5\cdot2,14\cdot5\cdot3\}$，然后利用 7 和 I_3 中的每一个元素对接起来形成另一个集合 $I''_3=\{7\cdot5\cdot3\cdot2\}$. 于是

$$\begin{aligned}F(1\#4)=&|I_1|+1\times|I_1|+|I_2|+2\times|I_2|+|I_3|+3\times|I_3|=\\&F(1\#3)+\mathrm{Extent}(F(1\#3)).\end{aligned} \tag{4}$$

或者

$$F(1\#4)-F(1\#3)=\mathrm{Extent}(F(1\#3)). \tag{5}$$

对于一般的无平方因子数整数 $N=p_1p_2p_3\cdots p_n$ 及 $N_1=p_1p_2p_3\cdots p_np_{n+1}$，利用上述构造方法并结合式(1)有计算公式

$$\begin{aligned}F(1\#(n+1))=&|I_1|+1\times|I_1|+|I_2|+2\times|I_2|+\cdots+|I_n|+n\times|I_n|=\\&\sum_{i=1}^{n}|I_i|+\sum_{i=1}^{n}i\times|I_i|=F(1\#n)+\mathrm{Extent}(F(1\#n)).\end{aligned} \tag{6}$$

或者恒等式

$$F(1\#(n+1))-F(1\#n)=\mathrm{Extent}(F(1\#n)). \tag{7}$$

于是完成了定理 1 的证明.

2.2　推论 1 的证明

现在假定 $F(1\#0)=0$，于是对任意正整数 $r\geqslant 1$,应用定理 1 有

$$F(1\#(r+1))-F(1\#r)=\mathrm{Extent}(F(1\#r)), \tag{8}$$

对此式 r 求和可得

$$\sum_{r=0}^{n}[F(1\#(r+1))-F(1\#r)]=\sum_{r=0}^{n}\mathrm{Extent}(F(1\#r)), \tag{9}$$

简化后可得

$$F(1\#(n+1))=\sum_{r=1}^{n}\mathrm{Extent}(F(1\#r))。$$

于是完成了推论 1 的证明.

参考文献:

[1] AMARNATH Murthy,CHARLES Ashbacher. Generalized partitions and new ideas on number theory and Smarandache sequences[M]. Phoenix:Hexis,2005:56-57.

[2] 张文鹏,李海龙. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2008.

[3] TOM M Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York:Springer-Verlag,1976.

[4] 刘燕妮,李玲,刘宝利. Smarandache 未解决问题及其新进展[M]. Michigan:High Amelican Press,2008.

[5] SMARANDACHE F. Only problems,not solutions[M]. Chicago:Xiquan Publishing House,1993.

[6] KENICHIRO Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. Gelndale:Erhus University Press,1996.

[7] 朱敏慧. Smarandache 函数的混合均值[J]. 纺织高校基础科学学报,2009,22(3):295-298.

[8] 韩彬玲. 关于三角数的 Smarandache 连续数列[J]. 纺织高校基础科学学报,2012,25(1):71-74.

[9] 苟素. Smarandache kn 数字数列及其一类均值性质[J]. 纺织高校基础科学学报,2011,24(2):250-252.

On the problem of the F. Smarandache factor

LIU Bao-li

(Department of Computer Engineering,Xi′an Aeronautical Polytechnic Institute,Xi′an 710089,China)

Abstract:For any positive integer $n>1$,if $n=d_1d_1\cdots d_k$,where $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ is the divisor of n,then $d_1d_2\cdots d_k$ are a F. Smarandache factor partitions of n. Using the elementary and combinational methods, the computational problem of $F(1\#n)$ for some special positive integers is studied,and an exact computational formula is given. Finally,two conjectures proposed by Amarnath Murthy and Charles Ashbacher in reference are solved.

Key words:F. Smarandache factor partitions;conjecture;elementary method;combinational method;identity

编辑、校对:黄燕萍