DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2013.02.008

第 26 卷第 2 期　纺织高校基础科学学报　Vol. 26, No. 2
2013 年 6 月　BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES　Jun., 2013

文章编号:1006-8341(2013)02-0155-03

关于 Smarandache Ceil 函数的一类均值问题

吕二兵

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要: 研究了 Smarandache Ceil 函数与素因子积函数 $U(n)$ 的均方值的分布问题. 利用解析方法给出了 $(S_k(n)-U(n))^2$ 的一个有趣的渐近公式,其中 $k\geqslant 2$,n 为自然数.

关键词: Smarandache Ceil 函数;均值分布;解析方法;渐近公式

中图分类号: O 156.7　**文献标识码:** A

1　引言及其结论

$\forall k\in \mathbf{N}_+, k\geqslant 2$,著名的 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为最小的正整数 x,使得 $n\mid x^k$,即

$$S_k(n)=\min\{x\in \mathbf{N}: n\mid x^k\}.$$

定义素因子积函数 $U(n)$

$$U(1)=1, U(n)=\prod_{p\mid n} p.$$

这几个函数,都是 Smarandache 教授提出的[1],许多学者对之产生了浓厚的兴趣,并对之进行了研究[2-7],文献[3] 研究了 $S_k(n)$ 与次幂补数 $c_k(n)$ 的混合均值,获得了 2 个渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(n)c_k(n)=\frac{6}{(k+1)\pi^2}x^{k+1}\zeta(k+2)\zeta(k^2+k-1)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k-1}(p+1)}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{k^2-1}}\right)\right)+O(x^{k+1/2+\varepsilon}),$$

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(c_k(n))=\frac{3}{\pi^2}x^2\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^2-2)}\left(P^2\left(1-\frac{1}{P^{2(k-1)}}\right)+p^3-p\right)\frac{1}{p^{2k-1}}\right)+O(x^{k+1/2+\varepsilon}).$$

文献[4]研究了 $S_k(n)$ 对于数列 $a(n)$ 的均值性质,得到渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(a(n))=\frac{M}{M+1}x^{1+1/M}\zeta(2k-1)\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)+O(x^{1+1/2M+\varepsilon}).$$

本文研究均值 $\sum\limits_{n\leqslant x}(S_k(n)-U(n))^2$ 的分布问题,并给出一个有趣的渐近公式.

定理 1　设 $k\geqslant 2$ 是一个整数. 那么 $\forall x\in \mathbf{R}, x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S_k(n)-U(n))^2=\frac{2\zeta(3)\zeta(3k-2)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{5-3k}}{p^2+p^3}\right)+\frac{2\zeta(3)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^3+p^2}\right)-$$

收稿日期: 2012-12-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071194)

作者简介: 吕二兵(1987-),男,山西省晋城市人,西北大学硕士研究生. E-mail:lverbing16888@126.com

$$\frac{4\zeta(3)\zeta(3k-1)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p-p^2-p^4-p^{3k}}{p^{3k+3}+p^{3k+2}}\right)+O(x^{5/2+\varepsilon}).$$

2 定理的证明

$$\sum_{n\leqslant x}(S_k(n)-U(n))^2=\sum_{n\leqslant x}S_k^2(n)+\sum_{n\leqslant x}U^2(n)-2\sum_{n\leqslant x}S_k(n)U(n). \tag{1}$$

设 $f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^2(n)}{n^s}$，$f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U^2(n)}{n^s}$，$f_3(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k(n)U(n)}{n^s}$，易知 $S_k^2(n)$，$U^2(n)$ 及 $S_k(n)U(n)$ 均为可乘函数，于是由 Euler 乘积公式[8] 有

$$\begin{aligned}
f_1(s)=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^2(n)}{n^s}=\\
&\prod_p\left(1+\frac{S_k^2(p)}{p^s}+\frac{S_k^2(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k^2(p^k)}{p^{ks}}+\frac{S_k^2(p^{k+1})}{p^{k+1}}+\frac{S_k^2(p^{k+2})}{p^{k+2}}+\cdots\right)=\\
&\prod_p\left(1+\frac{p^2}{p^s}+\frac{p^2}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^2}{p^{ks}}+\frac{p^4}{p^{(k+1)s}}+\frac{p^4}{p^{k+2}}+\cdots\right)=\\
&\zeta(ks-2)\prod_p\left(1+\frac{p^2}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)=\\
&\zeta(s)\zeta(ks-2)\prod_p\left(1+\frac{p^2}{p^s}-\frac{1}{p^s}-\frac{p^2}{p^{ks}}\right)=\\
&\frac{\zeta(s)\zeta(ks-2)\zeta(s-2)}{\zeta(2s-4)}\prod_p\left(1-\left(1+\frac{p^2}{p^{(k-1)s}}\right)\Big/(p^s+p^2)\right),
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
f_2(s)=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U^2(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{U^2(p)}{p^s}+\frac{U^2(p^2)}{p^{2s}}+\frac{U^2(p^3)}{p^{3s}}+\cdots+\frac{U^2(p^k)}{p^{ks}}\right)=\\
&\prod_p\left(1+\frac{p^2}{p^s}+\frac{p^2}{p^{2s}}+\frac{p^2}{p^{3s}}+\cdots+\frac{p^2}{p^{ks}}\right)=\\
&\prod_p\left(\frac{1}{1-1/p^s}\right)\left(1+\frac{1}{p^{s-2}}-\frac{1}{p^s}\right)=\\
&\prod_p\left(\frac{1}{1-1/p^s}\right)\left(1+\frac{1}{p^{s-2}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s(1+1/p^{s-2})}\right)=\\
&\frac{\zeta(s)\zeta(s-2)}{\zeta(2s-4)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p^2}\right),
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}
f_3(s)=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k(n)U(n)}{n^s}=\\
&\prod_p\left(1+\frac{S_k(p)U(p)}{p^s}+\frac{S_k(p^2)U(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k(p^{(k)})U(p^k)}{p^{ks}}+\frac{S_k(p^{k+1})U(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)=\\
&\prod_p\left(1+\frac{p^2}{p^s}+\frac{p^2}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^2}{p^{ks}}+\frac{p^3}{p^{(k+1)s}}+\frac{p^3}{p^{(k+2)}}+\cdots\right)=\\
&\zeta(ks-1)\prod_p\left(1-\frac{p}{p^{ks}}+\frac{p^2}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^{ks}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)=\\
&\zeta(s)\zeta(2s-1)\prod_p\left(1+\frac{p^2}{p^s}+\frac{p}{p^{(k-1)s}}-\frac{1}{p^s}-\frac{p}{p^{ks}}-\frac{p^2}{p^{(k+1)s}}\right)=\\
&\frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)\zeta(s-2)}{\zeta(2s-4)}\prod_p\left(1+\left(\frac{p}{p^{ks}}-1-\frac{p}{p^{(k+1)s}}-\frac{p^2}{p^{ks}}\right)\Big/(p^s+p^2)\right).
\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta-函数.

$$|S_k^2(n)|\leqslant n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^2(n)}{n^\sigma}\leqslant\frac{1}{\sigma-3}.$$

于是应用 Perron 公式(文献 8) 并取 $s_0=0$，$b=7/2$，$T=x$ 可得

$$\sum_{n\leqslant x} S_k^2(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{7/2-it}^{7/2+it} \frac{\zeta(s)\zeta(ks-2)\zeta(s-2)}{\zeta(2s-4)} \prod_p \left(1-\left(1+\frac{p^2}{p^{(k-1)s}}\right)\Big/(p^s+p^2)\right)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O(x^{5/2+\varepsilon}). \quad (5)$$

其中 ε 是任意给定的正数.

注意到函数

$$\frac{\zeta(s)\zeta(ks-2)\zeta(s-2)}{\zeta(2s-4)} \prod_p \left(1-\left(1+\frac{p^2}{p^{(k-1)s}}\right)\Big/(p^s+p^2)\right)$$

在 $s=3$ 处有一个一阶极点，其留数为 $\frac{2\zeta(3)\zeta(3k-2)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{5-3k}}{p^2+p^3}\right)$. 于是由式(1)，(5) 以及 Riemann zeta- 函数的性质可得渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S_k^2(n) = \frac{2\zeta(3)\zeta(3k-2)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{5-3k}}{p^2+p^3}\right) + O(x^{5/2+\varepsilon}). \quad (6)$$

同理可得

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(n)U(n) = \frac{2\zeta(3)\zeta(3k-1)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p-p^2-p^4-p^{3k}}{p^{3k+3}+p^{3k+2}}\right) + O(x^{5/2+\varepsilon}), \quad (7)$$

$$\sum_{n\leqslant x} U^2(n) = \frac{2\zeta(3)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^3+p^2}\right) + O(x^{5/2+\varepsilon}). \quad (8)$$

结合式(1)，(6) ～ (8) 可得渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S_k(n)-U(n))^2 = \frac{2\zeta(3)\zeta(3k-2)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{5-3k}}{p^2+p^3}\right) + \frac{2\zeta(3)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^3+p^2}\right) - \frac{4\zeta(3)\zeta(3k-1)x^3}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p-p^2-p^4-p^{3k}}{p^{3k+3}+p^{3k+2}}\right) + O(x^{5/2+\varepsilon}).$$

定理得证.

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only problems not solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993：82.

[2] ZHANG Wenpeng. Identities on the k-power complements[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory，HEXIS，2004：61-64.

[3] 冯强，郭金保. 关于 Smarandache Ceil 函数及其对偶函数的均值[J]. 西南民族大学学报：自然科学版，2007(4)：713-717.

[4] 苟素. Smarandache Ceil 函数的均值[J]. 宁夏大学学报：自然科学版，2005(3)：219-220.

[5] 赵杏花，郭金保，穆秀梅，等. 两个关于 k 阶 Smarandache Ceil 函数的方程[J]. 陕西理工学院学报：自然科学版，2011(4)：74-76.

[6] 朱敏慧. 一个包含 Euler 函数及 k 阶 Smarandache Ceil 函数的方程及其正整数解[J]. 纯粹数学与应用数学，2009(2)：414-416.

[7] 冯强，王荣波. 关于 k 阶 Smarandache Ceil 函数与 $ak(n)$ 的渐进公式[J]. 延安大学学报：自然科学版，2005(2)：10-12.

[8] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京：科学出版社，1991.

[9] 张文鹏，李海龙. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

On the mean value problem of the Smarandache Ceil function

LYU Er-bing

(Department of Mathematics，Northwest University，Xi′an 710127，China)

Abstract：The mean value distribution problem of Smarandache Ceil function and product of prime divisor function $U(n)$ is studied. By using the analytic methods，an asymptotic formula of $(S_k(n)-U(n))^2$ is given，with $k\geqslant 2$，n is any natural number.

Key words：Smarandache Ceil function；the mean value distribution；analytic method；asymptotic formula

编辑、校对：黄燕萍