DOI:10.13482/j.issn1001-7011.2013.03.023

第 30 卷 第 3 期　黑龙江大学自然科学学报　Vol. 30 No. 3
2013 年 6 月　JOURNAL OF NATURAL SCIENCE OF HEILONGJIANG UNIVERSITY　June, 2013

# 关于 Smarandache LCM 函数及 Smarandache 函数 $SM(n)$ 的混合均值

杨衍婷，　任刚练

（咸阳师范学院 数学与信息科学学院，咸阳 712000）

摘　要: 设 $n$ 为正整数,F. SmarandacheLCM 函数 $SL(n)$ 和函数 $SM(n)$ 定义为: $SL(1)=1, SM(1)=1$,当 $n>1$,并且 $n$ 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,$SL(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{p_i^{\alpha_i}\}$, $SM(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i\cdot p_i\}$,利用初等方法及素数的分布性质研究函数 $(SL(n)-SM(n))^2$ 的均值性质,并给出了一个有趣的渐近公式。

关键词: Smarandache LCM 函数; Smarandache 可乘函数; 均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4　　文献标志码: A　　文章编号: 1001 - 7011(2013)03 - 0318 - 03

## 0　引言及结论

对于任意的正整数 $n$,著名的 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 $k$,使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$,其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数。例如,$SL(n)$ 的前几个值为 $SL(1)=1, SL(2)=2, SL(3)=3, SL(4)=4, SL(5)=5, SL(6)=3, SL(7)=7, SL(8)=8, SL(9)=9, SL(10)=5,\cdots$。当 $n>1$ 时,并且 $n$ 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,$SL(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{p_i^{\alpha_i}\}$。关于 $SL(n)$ 的性质,一些学者已经作了研究,获得了很多有趣的结果[1-4]。例如,杨明顺[2] 研究了 Smarandache 函数与 Smarandache LCM 函数的混合均值,得到渐近公式 $\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)}=x+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right)$。

设 $m,n$ 是正整数,并且 $(m,n)=1$,如果一个算术函数 $f(n)$ 满足 $f(mn)=\max\{f(m),f(n)\}$,称 $f(n)$ 为 Smarandache 可乘函数。显然 Smarandache 可乘函数不是可乘函数。由定义可以看出,$SL(n)$ 为 Smarandache 可乘函数。设正整数 $n$ 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,定义 Smarandache 可乘函数 $SM(n)$ 为 $SM(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i\cdot p_i\}$。当 $n$ 为素数时,$SL(n)=SM(n)$。关于 $SM(n)$ 的性质,许多学者也进行了研究,获得了有趣的结果[5]。本文的主要目的是利用初等方法及素数的分布性质研究函数 $(SL(n)-SM(n))^2$ 的均值性质,并给出了下面的渐近公式。

定理　对于任意的实数 $x$,有如下的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}[SL(n)-SM(n)]^2=\frac{2\zeta\left(\frac{5}{2}\right)x^{\frac{5}{2}}}{5\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta 函数。

## 1　定理的证明

为了证明定理,需要如下引理。

收稿日期: 2012 - 09 - 10

基金项目: 陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2009JQ1009);咸阳师范学院专项科研基金资助项目(10XSYK109)

作者简介: 杨衍婷(1985 - ),女,助教,硕士研究生,主要研究方向:数论及其应用,E-mail:yangyanting85@163.com

引文格式: 杨衍婷,任刚练. 关于 Smarandache LCM 函数及 Smarandache 函数 $SM(n)$ 的混合均值[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2013,30(3):318 - 320.

引理　设 $p$ 为素数，$k$ 为 $\leqslant x^{\frac{1}{3}}$ 的正整数，则有渐近公式

$$\sum_{k<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}(p^2-2p)^2=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5k^{\frac{5}{2}}\ln\frac{x}{k}}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}\ln^2\frac{x}{k}}\right)。$$

证明　注意到 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$，应用 Abel 恒等式[6-7]，有

$$\begin{aligned}\sum_{k<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p^4&=\pi\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)^4-\pi(k)k^4-4\int_k^{\sqrt{\frac{x}{k}}}\pi(t)t^3\mathrm{d}t\\&=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}\ln\frac{x}{k}}-\frac{k^5}{\ln k}-\frac{4}{5}\int_k^{\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{\mathrm{d}t^5}{\ln t}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}\ln^2\frac{x}{k}}\right)+O\left(\int_k^{\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{t^4\mathrm{d}t}{\ln^2 t}\right)\\&=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5k^{\frac{5}{2}}\ln\frac{x}{k}}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}\ln^2\frac{x}{k}}\right)。\end{aligned}$$

$$\sum_{k<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p^3\ll\pi\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)^3\ll\frac{x^2}{k^2\ln\frac{x}{k}},\quad \sum_{k<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p^2\ll\pi\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)^2\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}\ln\frac{x}{k}},$$

从而有 $\sum\limits_{k<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}(p^2-2p)^2=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5k^{\frac{5}{2}}\ln\frac{x}{k}}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}\ln^2\frac{x}{k}}\right)$。

下面完成定理的证明。

对于任意给定的正整数 $n$，设 $p(n)$ 表示 $n$ 的最大素因子。将所有正整数集 $N$ 分成以下 5 个子集合 $A,B,C,D,E$，其中

$A=\{n\mid n\in N,p(n)>\sqrt{n}\}$，　$B=\{n\mid n\in N,n=kp^2(n),k<n^{\frac{1}{3}}<p(n)\leqslant\sqrt{n}\}$，

$C=\{n\mid n\in N,n$ 有素因子 $p_1$ 满足 $n=kp_1p(n),k<n^{\frac{1}{3}}<p_1<p(n)\leqslant\sqrt{n}\}$，

$D=\{n\mid n\in N,n=kp(n),n^{\frac{1}{3}}<p(n)\leqslant\sqrt{n},\ p(k)\leqslant n^{\frac{1}{3}}\}$，$E=\{n\mid n\in N,\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}\}$；

从而由集合 $A,B,C,D,E$ 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}[SL(n)-SM(n)]^2&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}[SL(n)-SM(n)]^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}[SL(n)-SM(n)]^2\\&+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}}[SL(n)-SM(n)]^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}[SL(n)-SM(n)]^2\\&+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in E}}[SL(n)-SM(n)]^2。\end{aligned}$$

当 $n\in A$ 时，$SL(n)=SM(n)=p(n)$，故 $\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\leqslant x_{n\in A}[SL(n)-SM(n)]^2=0$。

当 $n\in B$ 时，$SL(n)=p^2(n)$，$SM(n)=2p(n)$，由引理，

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}[SL(n)-SM(n)]^2&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}[p^2(n)-2p(n)]^2=\sum_{\substack{kp^2\leqslant x\\ (kp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{kp^2}}}(p^2-2p)^2\\&=\sum_{\substack{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}\\ k<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}}(p^2-2p)^2=\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5k^{\frac{5}{2}}\ln\frac{x}{k}}+O\left(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}\ln^2\frac{x}{k}}\right)\\&=\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5k^{\frac{5}{2}}\ln x}+O\left(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{\ln\frac{x}{k}}-\frac{1}{\ln x}\right)\right)+O\left(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}\ln^2 x}\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}} \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5k^{\frac{5}{2}}\ln x} + O\left(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln\frac{x}{k}\ln x}\cdot\frac{\ln k}{k^{\frac{5}{2}}}\right) + O\left(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}\ln^2 x}\right)。$$

当 $k\leqslant x^{\frac{1}{3}}$ 时，$\dfrac{1}{\ln\frac{x}{k}\ln x} \ll \dfrac{1}{\ln^2 x}$，而 $\sum\limits_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\dfrac{\ln k}{k^{\frac{5}{2}}} = O(1)$，所以

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}[SL(n)-SM(n)]^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{5}{2}\right)x^{\frac{5}{2}}}{5\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

当 $n\in C$ 时，$SL(n)=SM(n)=p(n)$，故 $\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}}[SL(n)-SM(n)]^2 = 0$。

当 $n\in D$ 时，注意到对于任意的正整数 $\alpha$ 和素数 $p$，有 $\alpha\cdot p\leqslant p^{\alpha}$ 恒成立。因此，

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}[SL(n)-SM(n)]^2 \ll \sum_{\substack{q^{\alpha}k\leqslant x,\ q<(q^{\alpha}k)^{\frac{1}{3}}\\ (q^{\alpha}k)^{\frac{1}{3}}<k,\ 2\leqslant\alpha}} q^{2\alpha} \ll \sum_{\substack{q\leqslant x^{\frac{2}{3\alpha}},\ 2\leqslant\alpha\\ q^{3-\alpha}<k\leqslant\frac{x}{q^{\alpha}}}} q^{2\alpha} \ll \sum_{\substack{q\leqslant x^{\frac{2}{3\alpha}}\\ 2\leqslant\alpha}} q^{2\alpha}\left(\frac{x}{q^{\alpha}}-q^{3-\alpha}\right)$$

$$\ll \sum_{\substack{q\leqslant x^{\frac{2}{3\alpha}}\\ 2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}}(q^{\alpha}x-q^{3+\alpha}) \ll x^2。$$

当 $n\in E$ 时，由于 $p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}$，若 $SL(n)=p(n)$，则 $SM(n)=p(n)$。设 $SL(n)=p^{\alpha}$，$\alpha\geqslant 2$，注意到对于任意的正整数 $\alpha$ 和素数 $p$，有 $\alpha\cdot p\leqslant p^{\alpha}$ 恒成立。所以，

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in E}}[SL(n)-SM(n)]^2 \ll \sum_{\substack{p^{\alpha}k\leqslant x\\ p\leqslant x^{\frac{1}{3}},\ 2\leqslant\alpha}} p^{2\alpha} \ll \sum_{\substack{p^{\alpha}\leqslant x\\ p\leqslant x^{\frac{1}{3}},\ 2\leqslant\alpha}}\sum_{k\leqslant\frac{x}{p^{\alpha}}} p^{2\alpha} \ll x\sum_{\substack{p^{\alpha}k\leqslant x\\ p\leqslant x^{\frac{1}{3}},\ 2\leqslant\alpha}} p^{\alpha} \ll x^2\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{3}}} 1 \ll \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\ln x}。$$

因此

$$\sum_{n\leqslant x}[SL(n)-SM(n)]^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{5}{2}\right)x^{\frac{5}{2}}}{5\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

## 参考文献


[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 杨明顺. 关于 Smarandache 及 Smarandache LCM 函数的混合均值 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2010, 40(5): 772 - 773.

[3] 闫晓霞. Smarandache LCM 的对偶函数与最小素因子函数的均方值 [J]. 纺织高校基础科学学报 [J], 2010, 23(3): 323 - 325.

[4] 闫晓霞. Smarandache LCM 函数与其对偶函数的混合均值 [J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2010, 39(3): 229 - 231.

[5] MA Jin-ping. The Smarandache multiplicative function [J]. Scientia Magna, 2006, 1(1): 125 - 128.

[6] APOSTOL T M. Introduction to analytical number theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[7] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京：科学出版社，1988.


# On the hybrid mean value of Smarandache LCM function and Smarandache function $SM(n)$


YANG Yan-ting, REN Gang-lian

(College of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China)



**Abstract**: Let $n$ be a positive integer, Smarandache LCM function and Smarandache function $SM(n)$ are defined as follows: $SL(1)=1$, $SM(1)=1$, $SL(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{p_i^{\alpha_i}\}$ and $SM(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i\cdot p_i\}$ when $n>1$ and $n$ can be factorized as $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. A hybrid mean value problem of the function $(SL(n)-SM(n))^2$ is studied and an interesting asymptotic formula is given by using the elementary method and the distribution property of prime numbers.



**Key words**: Smarandache LCM function; Smarandache multiplicative function; mean value; asymptotic formula