DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2013.02.040

关于 Smarandache LCM 函数对偶函数的方程

陈 斌

(渭南师范学院 数学系,陕西 渭南 714000)

摘 要: 对于任意的正整数 n,著名的 Smarandache LCM 函数的对偶函数 $SL^*(n)=\max\{k:[1,2,\cdots,k]\mid k,k\in N\}$,$\omega(n)$ 表示 n 的不同素因子的个数. 利用初等数论和分析的方法研究函数方程 $\prod_{d\mid n}SL^*(d)+1=2^{\omega(n)}$ 的可解性,并得到了该方程的所有正整数解.

关键词: Smarandache LCM 函数;初等方法;正整数解

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:**1004-0366(2013)02-0019-03

On the Equation of the Smarandache Dual LCM Function

CHEN Bin

(*Department of Mathematics, Weinan Normal College, Weinan* 714000, *China*)

Abstract: For any positive integer n, the dual function of the well-known Smarandache LCM function is defined by $SL^*(n)=\max\{k:[1,2,\cdots,k]\mid k,k\in N\}$, where $\omega(n)$ is all the different prime factor numbers of n. By using the elementary number theory and analytic methods, the solvability of the equation $\prod_{d\mid n}SL^*(d)+1=2^{\omega(n)}$ is studied, and all its positive integer solutions of this equation are obtained.

Key words: Smarandache LCM function; elementary method; positive integer solutions

---

对于任意的正整数 n,Smarandache LCM 函数的定义为[1,2]

$$SL(n)=\min\{k:k\mid[1,2,\cdots,k],k\in N\},$$

关于它的性质及函数方程有许多学者进行过研究,得到了一些结果.

例如 Murthy[3] 证明了当 n 为素数时,$SL(n)=S(n)$. 同时还讨论了 $SL(n)=S(n)$,$S(n)\neq n(*)$ 的可解性. 这里 $S(n)=\min\{m:n\mid m!,m\in N\}$ 为 F. Smaranache 函数. 之后 Le Maohua[4] 解决了 Murthy 提出的问题($*$),得出当且仅当 $n=12$ 或者 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$,($p>p_i^{\alpha_i}$,$i=1,2,\cdots,r$) 时($*$)有解.

Zhongtian Lv[5] 讨论了 $SL(n)$ 的渐进性质,得到了一个较好的均值计算公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+o\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

这里 $x>1$ 为实数,k 为正整数,c_i 为可计算的常数.

而对于任意的正整数 n,著名的 Smarandache LCM 函数的对偶函数的定义为

$$SL^*(n)=\max\{k:[1,2,\cdots,k]\mid k,k\in N\},$$

由 $SL^*(n)$ 的定义我们可以容易推出,$SL^*(1)=1$,$SL^*(2)=2$,$SL^*(3)=1$,$SL^*(4)=2$,$SL^*(5)=1$,$SL^*(6)=3$,$SL^*(7)=1$,$SL^*(8)=2$,$SL^*(9)=1$,$SL^*(10)=2$,等等. 显然,当 n 为奇数时,$SL^*(n)=1$,当 n 为偶数时,$SL^*(n)\geqslant 2$. 关于这个函数的其他性质,许多学者也进行过研究,取得了一系列的研究

收稿日期:2012-09-07

基金项目:国家自然科学基金项目(11071194);陕西省科技厅自然科学基金项目(2012JM1021);陕西省教育厅科研专项资助项目(12JK0880)

作者简介:陈斌(1979-),男,硕士,讲师,主要从事解析数论研究. E-mail:ccbb3344@163.com

成果[5].

例如 Chengliang Tian[6] 研究了函数方程 $\sum_{d|n} SL^*(d)=n$ 和 $\sum_{d|n} SL^*(d)=\phi(n)$ 的可解性,并得出前者只有唯一的正整数解 $n=1$,而后者的正整数解为 $n=1,3,14$. 此外他还研究了 $SL^*(n)$ 的级数和及均值性[7],得到了一个很好的结果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{SL^*(n)}{n^s}=\zeta(s)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{(p^\alpha-1)(p^s-1)}{[1,2,\cdots,p^\alpha]^s} \text{ 和 } \sum_{n\leqslant x} SL^*(n)=c\cdot x+o(\ln^2 x),$$

其中:$\zeta(s)$ 为 Riemannzeta- 函数.

王妤[8] 研究了方程 $\sum_{d|n} SL^*(d)=\sum_{d|n} S^*(d)$,并得出其解为

(1) n 为奇数;

(2) 当 $3\nmid n$ 时,则 $n=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_1\geqslant 5,\alpha\geqslant 1,\alpha_i\geqslant 0,k\geqslant 1,i=1,2,\cdots,k$;

(3) 当 $3\mid n$ 时,则 $n=2\cdot 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_2\geqslant 5,\alpha\geqslant 1,\alpha_i\geqslant 0,k\geqslant 2,i=1,2,\cdots,k$.

同时得到了关于其解的集合 $A=\{n:\sum_{d|n} SL^*(d)=\sum_{d|n} S^*(d),n\in N\}$ 的一个恒等式:

$$f(s)=\zeta(S)\left(1-\frac{1}{12^s}\right),$$

这里,$\zeta(s)$ 为 Riemannzeta- 函数.

之后我们讨论了函数方程 $\prod_{d|n} SL^*(d)=\prod_{d|n} S^*(d)$ 的可解性,并给出了其所有的正整数解. 我们的主要目的是利用初等数论和分析的方法研究函数方程

$$\prod_{d|n} SL^*(d)+1=2^{\omega(n)} \tag{1}$$

的可解性,给出其所有的正整数解[9].

1 方程求解

由 $SL^*(n)$ 的定义,易知 $n=1,2$ 显然不是方程(1)的解.

下面分两种情况进行讨论:

(1) 若 $n=p\geqslant 3$ 为素数,则

$$\omega(n)=\omega(p)=1,\prod_{d|n} SL^*(d)+1=SL^*(1)\cdot SL^*(p)+1=2,$$

所以,显然 $n=p$ 为素数是方程(1)的解.

(2) 若 n 为合数,那么我们作如下分析:

当 $n=2^\alpha,\alpha\geqslant 1$ 时,易知

$$\omega(n)=\omega(2^\alpha)=1,$$

而

$$\prod_{d|n} SL^*(d)+1=SL^*(1)\cdot SL^*(2)\cdots SL^*(2^\alpha)+1=2^\alpha+1,$$

则 $2^\alpha+1=2$,即 $2^\alpha=1$,可得 $\alpha=0$,这与 $\alpha\geqslant 1$ 矛盾.

所以 $n=2^\alpha,\alpha\geqslant 1$ 不是方程(1)的解.

当 $n=2^\alpha p^\beta$ 时,$\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,p\geqslant 3$ 为素数,此时

$$\omega(n)=\omega(2^\alpha p^\beta)=2,$$

而由 $SL^*(n)$ 的定义和性质易得

$$\prod_{d|2^\alpha p^\beta} SL^*(d)+1=\prod_{m=0}^{\alpha}\prod_{n=0}^{\beta} SL^*(2^m p^n)+1\geqslant 2^{\alpha+\beta}+1>4,$$

故 $n=2^\alpha p^\beta,\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,p\geqslant 3$ 时,方程(1)无解.

当 $n=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,$\alpha\geqslant 1,\alpha_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,k,k\geqslant 1,p_i\geqslant 3$ 为互异的素数. 易知

$$\omega(n)=\omega(2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})=k+1,$$

而

$$\prod_{d\mid 2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}}SL^*(d)+1=\prod_{n=0}^{\alpha}\prod_{m_1=0}^{\alpha_1}\cdots\prod_{m_k=0}^{\alpha_k}SL^*(2^n p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})+1\geqslant 2^{\alpha+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}+1\geqslant$$

$$2^{\alpha+k\cdot 1}+1\geqslant 2^{k+1}+1>2^{k+1},$$

所以 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,方程(1)也无解.

当 $n=p^{\alpha}$ 时,$\alpha>1,p\geqslant 3$ 为素数.我们立刻有

$$\omega(n)=\omega(p^{\alpha})=1,$$

而有定义知

$$\prod_{d\mid p^{\alpha}}SL^*(d)+1=\sum_{m=0}^{\alpha}SL^*(p^m)+1=1+1=2,$$

所以式(1)成立.

故 $n=p^{\alpha}$ 是方程(1)的解.

当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,$\alpha_i\geqslant 1,3\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k,i=1,2,\cdots,k,k\geqslant 2$,由于

$$\omega(n)=\omega(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})=k,$$

$$\prod_{d\mid p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}}SL^*(d)+1=\prod_{m_1=0}^{\alpha_1}\prod_{m_2=0}^{\alpha_2}\cdots\prod_{m_k=0}^{\alpha_k}SL^*(p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})+1=1+1=2,$$

此时必有 $2=2^k$,即 $k=1$,这和 $k\geqslant 2$ 矛盾.

所以 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,方程(1)也无解.

2　结论

综上讨论可知,方程(1)有解当且仅当 $n=p^{\alpha},\alpha\geqslant 1,p\geqslant 3$ 为素数,这样我们就可以给出下面的定理.

定理　对于任意的正整数 n,函数方程

$$\prod_{d\mid n}SL^*(d)+1=2^{\omega(n)}$$

有解当且仅当:$n=p^{\alpha},\alpha\geqslant 1,p\geqslant 3$ 为素数.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems,Not Solutions[M]. Chicago:Xiquan Publ. House,1993.
[2] Wengpeng Zhang. Elementary Number Theory[M]. Xi'an:Shaanxi Normal University Press,2007.
[3] Murthy A. Some Notions on Least Common Multiples[J]. Smarandache Notions Journal,2001,12:307-309.
[4] Le Maohua. An Equation Concerning the Smarandache LCM Function[J]. Smarandache Notions Journal,2004,14:186-188.
[5] Zhongtian Lv. On the F. Smarandache LCM Function and Its Meanvalue[J]. Scientia Magna,2007,3(1):22-25.
[6] Tian Chengliang. Two Equations Involving the Smarandache LCM Function[J]. Scientia Magna,2007,3(2):80-85.
[7] Tian Chengliang,NaYuan. On the Smarandache LCM Dual Function[J]. Scientia Magna,2007,3(2):25-28.
[8] 王妤.一个包含 Smarandache LCM 对偶函数的方程[J].黑龙江大学自然科学学报,2008,25(5):645-647.
[9] 陈斌.关于高斯函数的一个结论[J].甘肃科学学报,2010,22(4):26-28.