关于 Smarandache 函数与 Riemann zeta- 函数

周焕芹

(渭南师范学院数学系, 陕西 渭南 714000)

摘 要: 对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即 $S(n)=\min\{m:\ m\in \mathbf{N},\ n|m!\}$. 本文的主要目的是利用初等方法研究一类包含 $S(n)$ 的 Dirichlet 级数与 Riemann zeta- 函数之间的关系, 并得到了一个有趣的恒等式.

关 键 词: Smarandache 函数; Riemann zeta- 函数; 恒等式

中图分类号: O156.4　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1008-5513(2008)01-0041-04

1 引言及结论

对于任意正整数 n, 我们定义 Smarandache 函数 $S(n)$ 为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m:\ m\in \mathbf{N},\ n|m!\}$. 这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家 Smarandache 教授在文 [1] 中提出的, 并建议人们研究它的性质. 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么

$$S(n)=\max_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$$

例如: $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, $\cdots\cdots$. 关于 $S(n)$ 的算术性质, 有不少学者进行过研究, 获得了一些具有重要理论价值的研究成果. 例如, 王永兴在文 [2] 中研究了 $S(n)$ 的均值性质, 给出了该函数均值的一个较强的渐进公式

$$\sum_{n\le x} S(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)$$

陆亚明在文 [3] 中研究了一个包含 $S(n)$ 方程的可解性, 证明了对任意正整数 $k\ge 2$, 方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

文 [4] 中进一步证实了对任意正整数 $k\ge 2$, 存在无限多组正整数 ($m_1,m_2,\cdots,m_k$) 满足不等式: $S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$, 同时, 又存在无限多组正整数 ($m_1,m_2,\cdots,m_k$) 使得 $S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$.

收稿日期: 2006-09-24 .

基金项目: 国家自然科学基金 (60472068).

作者简介: 周焕芹 (1962-), 女, 副教授, 研究方向: 基础数学.

此外, 徐哲峰在文 [5] 中研究了 $S(n)$ 的值分布问题, 获得了一个更深刻的结果. 即就是证明下面的结论: 设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, 则对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

本文的主要目的是研究一类包含 $S(n)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题, 并获得该级数与 Riemann zeta- 函数之间的一个有趣的恒等式! 为叙述方便, 我们首先引入 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的定义如下:

对于任意正整数 $n\geq 1$, 我们定义 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)=\ln p$, 如果 $n=p^{\alpha}$, $\alpha\geq 1$, p 为素数; $\Lambda(n)=0$, 其它.

这一函数在素数分布理论研究中占有十分重要的位置, 因而引起不少数论专家的重视! 然而关于函数 $\Lambda(n)$ 与 $S(n)$ 构成的 Dirichlet 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{S^s(n)} \tag{1}$$

的性质, 至今没有人研究, 甚至也不知道这一级数对那些复数 s 收敛, 对那些复数 s 发散. 本文利用初等方法着重研究了这一问题, 并给出了该级数与著名的 Riemann zeta- 函数之间的联系, 也就是证明了下面的定理:

定理 设 $k\geq 1$ 为任意给定的正整数, 则对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>1$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n^k)}{S^s(n^k)}=-\zeta(s)\frac{\zeta'(ks)}{\zeta(ks)}$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数, 其中 $\zeta'(s)$ 表示 $\zeta(s)$ 对复数 s 的导数.

这一定理是有意义的, 它不仅解决了级数 (1) 的收敛与计算问题, 同时也建立了该级数与著名的 Riemann zeta- 函数之间的密切联系. 特别当 $k=1$ 时由我们的定理立刻得到下面的推论:

推论 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>1$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{S^s(n)}=-\zeta'(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^s}$$

2 几个简单的引理

为了完成定理的证明, 我们需要几个简单的引理, 首先有下面的:

引理 1 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>1$, 我们有恒等式

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{p}\frac{\ln p}{p^s-1}$$

其中 $\sum_p$ 表示对所有素数 p 求和, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数, $\zeta'(s)$ 表示 $\zeta(s)$ 对复数 s 的导数.

证明 由 Riemann zeta- 函数的定义及著名的 Euler 求和公式 (参阅文 [10] 中定理 11.7) 知对任意复数 s, 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时有恒等式

$$\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{2}$$

其中 $\prod_p$ 表示对所有素数 p 求积. 对 (2) 式两边取对数并对复数 s 求导可得

$$(\ln(\zeta(s)))'=-\sum_{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)'$$

或者 $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_p\frac{\ln p}{p^s-1}$, 于是完成了引理 1 的证明.

为叙述引理 2, 需引入另一个数论函数函数 $S_p(n)$: 设 p 为给定的素数, 则对任意正整数 n, 定义幂 p 的原数函数 $S_p(n)$ 为最小的正整数 m 使得 $p^n|m$. 即就是 $S_p(n)=\min\{m:\ p^n|m!\}$. 例如: $S_3(1)=3$, $S_3(2)=6$, $S_3(3)=9$, $S_3(4)=9$, $\cdots$. 这个函数与函数 $S(n)$ 密切相关, 也是 Smarandache 教授在文 [1] 中提出的, 关于它的性质, 有不少数论专家也进行了研究, 获得了许多深刻的结果, 参阅文 [6-8]. 本文需要利用到函数 $S_p(n)$ 的一个重要性质, 也就是下面的:

引理 2 设 $k\ge 1$ 为任意给定的整数. 则对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>1$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(kn)}=\frac{\zeta(s)}{p^{ks}-1}$$

证明 这一引理实际上是文 [8] 中定理 1 的推广和延伸, 我们在修改本文的过程中也发现最新的文 [9] 中给出了证明. 为了本文的完整性, 我们在这里给予简单的重复. 令 $m=S_p(kn)$, 如果 $p^\alpha\parallel m$, 则在 $\{S_p(kn)\}$ 序列中 m 重复的次数为 $\left[\frac{\alpha}{k}\right]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 次. 即就是存在 $\left[\frac{\alpha}{k}\right]$ 个 n 使得 $S(kn)=m$. 显然序列 $S_p(kn)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的每一项都是素数 p 的倍数, 所以我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(kn)} &= \sum_{\substack{m=1\\ p^\alpha\|m}}^{\infty}\frac{\left[\frac{\alpha}{k}\right]}{m^s}=\sum_{\beta=1}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{\substack{m=1\\ p^{\beta k+\gamma}\|m}}^{\infty}\frac{\beta}{m^s}=\sum_{\beta=1}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{\substack{n=1\\ (n,p)=1}}^{\infty}\frac{\beta}{n^s p^{(\beta k+\gamma)s}}\\ &= \sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta}{p^{\beta ks}}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\frac{1}{p^{\gamma s}}\sum_{\substack{n=1\\ (n,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\end{aligned} \tag{3}$$

注意到恒等式 $\sum_{n=1(n,p)=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1p|n}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^sm^s}=\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$.

$$\sum_{\gamma=0}^{k-1}\frac{1}{p^{\gamma s}}=\frac{1-\frac{1}{p^{sk}}}{1-\frac{1}{p^s}},\qquad \sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta}{p^{\beta s}}=\frac{p^s}{(p^s-1)^2}$$

由 (3) 式我们立即得到: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(kn)}=\frac{\zeta(s)}{p^{ks}-1}$, 于是证明了引理 2.

引理 3 对任意素数 p 及任意正整数 α, 我们有恒等式 $S(p^\alpha)=S_p(\alpha)$.

证明 这一恒等式可由函数 $S(n)$ 与函数 $S_p(n)$ 的定义容易获得. 事实上注意到 $S(p^\alpha)$ 表示最小的正整数 m 使得 $p^\alpha|m!$, 而 $S_p(\alpha)$ 也表示最小的正整数 m 使得 $p^\alpha|m!$. 因此有定义立刻得到 $S(p^\alpha)=S_p(\alpha)$.

3 定理的证明

有了上一节的三个简单引理, 我们容易完成定理的证明. 事实上由 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的定义及引理 3 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n^k)}{S^s(n^k)} &= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{\Lambda(p^{k\alpha})}{S^s(p^{k\alpha})}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{\ln p}{S^s(p^{k\alpha})}\\ &= \sum_{p}(\ln p)\cdot\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{S^s(p^{k\alpha})}=\sum_{p}(\ln p)\cdot\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(k\alpha)}\end{aligned} \tag{4}$$

结合引理 1, 引理 2 并注意到 (4) 式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n^k)}{S^s(n^k)}=\sum_{p}\frac{\zeta(s)\ln p}{p^{ks}-1}=\zeta(s)\sum_{p}\frac{\ln p}{p^{ks}-1}=-\zeta(s)\cdot\frac{\zeta'(ks)}{\zeta(ks)}$$

于是完成了定理的证明.

参考文献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Wang Yongxing. On the Smarandache function[J]. Research on Smarandache Problems in Number Theory (Edited by Zhang Wenpeng, Li Junzhuang and Liu Duansen). Hexis, 2005: 103-106.

[3] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[4] Jozsef Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[6] Zhang Wenpeng and Liu Duansen. On the primitive numbers of power p and its asymptotic property[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13, 171-175.

[7] 赵院娥. 一个新的数论函数及其均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(2): 163-166.

[8] Xu Zhefeng. Some arithmetical properties of primitive numbers of power p[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 9-12.

[9] 朱伟义. 原数函数 $S_p(kn)$ 与 Riemann zeta- 函数的关系 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2007, 37(3).

On the Smarandache function and the Riemann zeta-function

ZHOU Huan-qin

(Department of Mathematics, Weinan Teacher's College, Weinan 714000, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$. That is, $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbf{N},\ n|m!\}$. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the relationship between the Riemann zeta-function and one kind Dirichlet's series involving the Smarandache function, and give an interesting identity.

Keywords: Smarandache function,Riemann zeta-function,identity

2000MSC: 11M06