DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2009.01.018

第22卷第1期 纺织高校基础科学学报 Vol.22, No.1
2009年3月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES March, 2009

研究简报

文章编号：1006-8341(2009)01-0133-02

关于Smarandache函数的一个下界估计

苏娟丽

(杨凌职业技术学院 公共课教学部，陕西 杨凌 712100)

摘要：利用初等方法研究了Smarandache函数在某些特殊值上的下界估计问题，给出了Smarandache函数的一个较强的下界估计，即就是证明了 $S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 6p+1$，其中 p 为任意大于3的素数，从而改进了乐茂华教授的一个结果.

关键词：Smarandache函数；下界估计；初等方法

中图分类号：O156.4 文献标识码：A

1 引言及结论

$\forall n\in N_+$，著名的F.Smarandache函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m: m\in N_+, n\mid m!\}$. 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式，那么 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此也不难计算出 $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, …，关于 $S(n)$ 的算术性质以及有关问题已获得了不少有重要理论价值的研究成果[1-6]. 如文献[4]研究了 $S(n)$ 的值分布问题，证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(3/2)x^{3/2}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子，$\zeta(s)$ 表示Riemann zeta-函数.

文献[7]研究了Smarandache函数与除数函数的一个混合均值问题，给出了一个较强的渐近公式.

另一方面，文献[5]研究了 $S(2^{p-1}(2^p-1))$ 的下界估计问题，并给出了估计式 $S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 2p+1$，其中 p 为任意奇素数.

本文作为文献[5]的一个注释，利用初等方法改进了乐茂华教授的结果. 具体地说也就是证明了下面的：

定理1 对于任意素数 $p\geqslant 5$，有估计式 $S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 6p+1$.

显然定理优于乐茂华教授的下界估计，而且本文的证明过程更具有技巧性！当然本文的下界还有改进的余地. 此外，应用本文的方法似乎可以处理函数 $S(a^p+b^p)$ 的下界估计问题. 其中 a 及 b 为不同的正整数，p 为奇素数. 对于这种更一般问题的探讨是进一步研究的目标.

2 定理1的证明

利用初等方法直接给出定理1的证明. 由Smarandache函数的性质知对于任意素数 $p\mid n$，有 $S(n)\geqslant p$

收稿日期：2008-09-20

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10671155)

作者简介：苏娟丽(1982-)，女，陕西省扶风县人，西北大学在职硕士研究生. E-mail: alice0229@163.com

且 $p \mid S(p^{\alpha})$ 对所有正整数 α 成立. 现在, 对于任意素数 $p \geqslant 5$, 设 q 为 $(2^p - 1)$ 的任一素因子, 显然 $q \geqslant 5$. 于是由 $S(n)$ 的性质知

$$S(2^{p-1}(2^p - 1)) \geqslant q. \tag{1}$$

又由于 $q \mid 2^p - 1$, 所以 $2^p \equiv 1 \bmod q$. 因此 p 是 2 模 q 的指标. 所以由文献[6]中指标的性质知 $p \mid \varphi(q) = q - 1$, 或者 $q = mp + 1$. 由于 q 为奇素数, 所以 m 一定为偶数, 因此可设

$$q = 2kp + 1, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

显然 $2^p - 1$ 不可能是一个完全平方数. 否则有 $2^p - 1 = u^2$, 或者 $2^p = u^2 + 1$, 由此推出 $0 \equiv 2^p \equiv u^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$, 矛盾. 于是 $2^p - 1$ 有 4 种可能:

(1) $2^p - 1$ 为素数, 此时 $S(2^{p-1}(2^p - 1)) \geqslant 2^p - 1 \geqslant 6p + 1$. 显然成立.

(2) $2^p - 1$ 至少含有一个素数 q 的 m 次幂, $m \geqslant 3$. 此时给合式(1)及(2)有

$$S(2^{p-1}(2^p - 1)) \geqslant S(q^m) \geqslant mq > 6p + 1.$$

(3) $2^p - 1$ 至少含有 3 个不同的素因子, 此时结合式(1)及(2)知 $2^p - 1$ 至少有一个素因子 $q \geqslant 6p + 1$, 所以有 $S(2^{p-1}(2^p - 1)) \geqslant q \geqslant 6p + 1$.

(4) $2^p - 1$ 恰好含有 2 个不同的素因子. 此时注意到式(2)可以断定这 2 个不同的素因子不可能同时为 $2p + 1$ 和 $4p + 1$. 因为素数 $p > 3$, 而 2 个数 $2p + 1$ 及 $4p + 1$ 中至少有一个被 3 整除, 因此它们不可能同时为素数. 所以由式(2)知当 $2^p - 1$ 恰好含有 2 个不同的素因子时, 其中至少有一个素因子 $q \geqslant 6p + 1$. 从而 $S(2^{p-1}(2^p - 1)) \geqslant q \geqslant 6p + 1$.

结合 4 种情况立刻完成定理 1 的证明.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] LIU Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[3] JOZSEF Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[4] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[5] LE Mohua. A lower bound for $S(2^{p-1}(2^p - 1))$[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12(1): 217-218.

[6] 路玉麟. 一个包含 Smarandache 函数的方程[J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(2): 253-254.

[7] 吕忠田. 关于 F. Smarandache 函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纺织高校基础科学学报, 2007, 20(3): 234-236.

A lower bound estimate for the Smarandache function

SU Juan-li

(Yangling Vocational and Technical College, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: The elementary methods are used to study the low bound estimate of the Smarandache function at some special sequences, and a sharper lower bound estimate $S(2^{p-1}(2^p - 1)) \geqslant 6p + 1$ has been obtained, where $p \geqslant 5$ be any prime. This improved professor Le Maohua's a result.

Key words: Smarandache function; lower bound estimate; elementary method

编辑、校对: 黄燕萍