2009年3月 纯粹数学与应用数学 Mar. 2009
第25卷 第1期 Pure and Applied Mathematics Vol.25 No.1

关于 Smarandache 函数的一个同余方程

赵院娥

(延安大学数学与计算机学院, 陕西, 延安 716000)

摘要：研究了一个包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 的同余方程的可解性, 并利用初等方法及原根的性质得到了该同余方程的所有正整数解, 从而解决了相关文献中提出的一个问题.

关键词：Smarandache 函数；同余方程；正整数解

中图分类号：O156.4　**文献标识码**：A　**文章编号**：1008-5513(2009)01-0080-03

1 引言及结论

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. 这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家 Smarandache 教授在他所著《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的 [1], 同时他建议人们研究这个函数的性质！从 $S(n)$ 的定义容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准素幂分解式, 那么 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此我们不难推出 $S(n)$ 的前几个值为：$S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, $S(17)=17$, $S(18)=6$, $S(19)=19$, $S(20)=5$, $\cdots\cdots$.

关于 $S(n)$ 及其有关函数的算术性质, 许多学者进行了研究, 获得了许多重要的结果！有兴趣的读者可参阅文 [2-5,9]. 例如文 [2] 证明了下面的结论：设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, 那么对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式 $\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$ 其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann ζ- 函数.

乐茂华教授在文 [4] 中研究了函数 $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$ 的下界估计问题, 并证明了对任意素数 p 有估计式: $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)\ge 2p+1$.

杜凤英在文 [5] 中研究了和式

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)} \tag{1}$$

为整数的问题, 并证明了下面三个结论：

(a) 当 n 为无平方因子数时,(1) 式不可能是正整数;

(b) 对任意奇素数 p 及任意正整数 α, 当 $n=p^\alpha$ 且 $\alpha\le p$ 时,(1) 式不可能是正整数;

(c) 对于任意正整数 n, 当 n 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\cdot p_k$ 且 $S(n)=p_k$ 时,(1) 式不可能是正整数.

收稿日期：2008-10-09.

基金项目：国家自然科学基金 (10671155).

作者简介：赵院娥 (1972-), 副教授, 研究方向：数论与代数.

此外, 文 [6] 中介绍了函数 $S(n)$ 的一系列初等性质, 同时建议人们研究同余方程

$$1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}+1\equiv 0 \mod n \tag{2}$$

的所有正整数解.

关于这一问题, 至今很少有人研究, 我们翻阅了大量的资料, 发现仅有一篇相关的论文中研究了这一问题 [7], 证明了下面的结论:

同余方程 (2) 的素数解仅有三个, 它们分别是 $n=2,\ 3$ 及 5.

本文的主要目的是研究同余方程 (2) 对一般整数的可解性, 并完全解决了这一问题! 具体地说就是证明了下面的:

定理　对任意正整数 $n>1$, 同余方程 $1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}+1\equiv 0 \mod n$ 成立当且仅当 $n=2,\ 3,\ 5$.

由定理可知同余方程 (2) 没有合数解, 所以文 [6] 实际上得到了同余方程 (2) 的所有正整数解! 因此本文彻底解决了文 [6] 提出的问题!

2　定理的证明

这节我们利用初等方法及原根的性质来完成定理的证明. 关于原根的存在性及其有关性质, 可以参阅文 [8-9]. 我们分几种情况讨论: 首先当 $n>1$ 且为素数时, 由文 [6] 可知同余方程 (2) 有且仅有三个解 $n=2,\ 3$ 及 5. 其次当 $n=p^{\alpha}$ 为素数的方幂时 $(\alpha>1)$, 容易验证 $p=2$ 不是同余方程 (2) 的解, 因为此时 $\alpha\geq 2$, 而 $1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}$ 为偶数, 所以 $1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}+1$ 为奇数, 从而 n 不可能是同余方程 (2) 的解. 于是假定 $p\geq 3$, 由 Smarandache 函数的性质可知 $S(n-1)<\frac{1}{2}n$, 所以 $\phi(n)=p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 不可能整除 $S(n-1)$. 由原根的存在定理可知 $n=p^{\alpha}$ 存在原根, 设 g 为模 $n=p^{\alpha}$ 的任一原根, 显然当 $p\mid k$ 时有 $p^{\alpha}\mid k^{S(n-1)}$, 所以由原根的性质可得

$$\begin{aligned}1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}+1 &= \sum_{\substack{i=1\\(i,\ p)=1}}^{n-1} i^{S(n-1)}+\sum_{i=1}^{p^{\alpha-1}-1}(ip)^{S(n-1)}+1\\ \equiv g^{0\cdot S(n-1)}+g^{1\cdot S(n-1)}+\cdots+g^{(\phi(n)-1)\cdot S(n-1)}+1 &\equiv \frac{1-g^{\phi(n)\cdot S(n-1)}}{1-g^{S(n-1)}}+1 \mod n\end{aligned} \tag{3}$$

因为 g 为模 n 的原根, 所以 $g^{\phi(n)}\equiv 1 \mod n$, 从而推出 $g^{\phi(n)\cdot S(n-1)}\equiv 1 \mod n$, 而 $(g^{S(n-1)}-1,\ n)=1$, 因此有

$$\frac{g^{\phi(n)\cdot S(n-1)}-1}{g^{S(n-1)}-1}\equiv 0 \mod n \tag{4}$$

结合同余式 (3) 及 (4) 立刻得到 $1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+3^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}+1\equiv 1 \mod n$. 所以 $n=p^{\alpha}$ 不可能是同余方程 (2) 的解.

最后, 当 n 至少含有两个不同的素因子时, 设 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式. 由于 $(n-1,\ n)=1$, $S(n-1)=\beta\cdot p$, 这里 p 为 $n-1$ 的一个素因子,β 小于或等于 p 在 $n-1$ 的标准分解式中的方幂. 所以所有 $\phi\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ 不可能都整除 $S(n-1)$, 其中 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$. 不失一般性假定 $\phi\left(p_k^{\alpha_k}\right)$ 不整除 $S(n-1)$. 注意到当 $p_k\mid i$ 时有 $p_k^{\alpha_k}\mid i^{S(n-1)}$, 设 g 为模 $p_k^{\alpha_k}$ 的任一原

根, 于是由原根的定义及性质可得

$$1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}+1=\frac{n}{p_k^{\alpha_k}}\left[\sum_{\substack{i=1\\(i,\ p_k)=1}}^{n-1} i^{S(n-1)}+\sum_{i=1}^{\frac{n}{p_k^{\alpha_k}}-1}(ip)^{S(n-1)}\right]+1$$

$$\equiv\frac{n}{p_k^{\alpha_k}}\left(g^{0\cdot S(n-1)}+\cdots+g^{(\phi(p_k^{\alpha_k})-1)\cdot S(n-1)}\right)+1\equiv\frac{n}{p_k^{\alpha_k}}\cdot\frac{g^{\phi(p_k^{\alpha_k})\cdot S(n-1)}-1}{g^{S(n-1)}-1}+1 \mod p_k^{\alpha_k} \quad (5)$$

由于 g 为模 $p_k^{\alpha_k}$ 的原根且 $\phi\left(p_k^{\alpha_k}\right)$ 不整除 $S(n-1)$, 所以有同余式

$$\frac{g^{\phi(p_k^{\alpha_k})\cdot S(n-1)}-1}{g^{S(n-1)}-1}\equiv 0 \mod p_k^{\alpha_k} \quad (6)$$

结合 (5) 及 (6) 式可得 $1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+3^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}+1\equiv 1 \mod p_k^{\alpha_k}$. 因此 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 不可能为同余方程 (2) 的解.

于是完成里了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House,1993.

[2] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报,2006,49(5):1009-1012.

[3] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna,2006,2(1): 76-79.

[4] 乐茂华. 关于 Smarandache 函数的一个猜想 [J]. 黑龙江大学学报: 自然科学版,2007,24(5):687-688.

[5] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学.2007,23(2):205-208.

[6] Dumitrescu C, Seleacu V. The Smarandache Function [M]. USA:Erhus University Press,1996.

[7] Qin Wei. On a problem related to the Smarandache function [J]. Scientia Magna,2008,4(3):106-108.

[8] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag,1976.

[9] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社,2007.

[10] Kenichiro Kashihara. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems[M]. USA:Erhus University Press,1996.

On a congruent equation of the Smarandache function

ZHAO Yuan-e

(College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary method and the properties of the primitive roots to study the solvability of a congruent equation involving the Smarandache function, and obtain its all positive integer solutions. This solved a problem proposed in related reference.

Keywords: the smarandache function, congruent equation, positive integer solution

2000MSC: 11B83