2008年12月
第24卷 第4期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Dec. 2008
Vol.24 No.4

关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计

苏娟丽 [1], 尚松叶 [2]

(1. 杨凌职业技术学院, 陕西 杨凌 712100; 2. 西北大学数学系, 陕西 西安 710127)

摘 要：利用初等方法研究 Smarandache 函数在某些特殊值上的下界估计, 给出了 Smarandache 函数在某些特殊值上的一个较强的下界估计, 证明了估计式 $S(2^p+1)\geq 6p+1$, 其中 $p\geq 7$ 为任意素数.

关 键 词：Smarandache 函数; 下界估计; 初等方法

中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2008)04-0706-03

1 引言及结论

对于任意正整数 n, 著名的 F.Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么 $S(n)=\max\limits_{1\leq i\leq r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此我们也不难计算出 $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, $\cdots$. 关于 $S(n)$ 的算术性质, 许多学者也进行了研究, 获得了不少有趣的结果. 参阅文 [1-5]. 例如文 [5] 研究了 $S(n)$ 的值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

另一方面, 乐茂华教授在文 [6] 中研究了 $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$ 的下界估计问题, 并给出了估计式

$$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)\geq 2p+1$$

其中 p 为任意奇素数.

本文受文 [6] 的启发, 利用初等方法研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 在某些特殊值 2^p+1 上的下界估计问题, 并得到了一个较强的下界估计. 具体地说也就是证明了下面的定理：

定理 对于任意素数 $p\geq 7$, 我们有估计式

$$S\left(2^p+1\right)\geq 6p+1$$

显然我们定理中的下界估计明显地优于乐茂华教授的结果. 因此我认为本文的方法可以改进文 [6] 中的结果, 这将作为我们进一步研究的内容!

收稿日期：2007-11-10.

基金项目：国家自然科学基金 (10671155).

作者简介：苏娟丽 (1982-), 女, 助教, 研究方向: 基础数学的教学与研究.

2　定理的证明

这节我们利用初等方法直接给出定理的证明. 由 Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质知对于任意素数 $p \mid n$, 我们有 $S(n) \geq p$ 且 $p \mid S(p^\alpha)$ 对所有正整数 α 成立. 现在, 我们先证明 2^p+1 不可能为 3 的方幂. 若不然, 则有 $2^p+1=3^\alpha$. 当 α 为偶数时, 设 $\alpha=2k$, 则有

$$2^p=3^\alpha-1=\left(3^k+1\right)\left(3^k-1\right) \tag{1}$$

因为 $\left(3^k+1,\ 3^k-1\right)=2$, 所以由 (1) 式我们立刻得到 $3^k-1=2$, $k=1$. 这与 $p \geq 7$ 矛盾. 当 α 为奇数时, 设 $\alpha=2k+1$, 此时我们有

$$1 \equiv 2^p+1=3^\alpha=3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 8$$

矛盾. 所以 2^p+1 不可能为 3 的方幂. 因此 2^p+1 至少含有一个大于 3 的素因子. 于是对任意素数 $p \geq 7$, 设 q 为 2^p+1 的任一大于 3 的素因子, 显然 $q \geq 5$ 且 $q \mid 2^p+1$. 设 m 是 2 模 q 的指标, 则由

$$2^p+1 \equiv 0 \pmod q \quad \text{立刻推出} \quad 2^{2p} \equiv 1 \pmod q$$

所以由指标的性质知 [7] $m \mid 2p$. 于是 $m=1,\ 2,\ p,\ 2p$. 显然 $m \neq 1,\ 2,\ p$, 所以 $m=2p$. 再由指标的性质知 $m \mid \phi(q)=q-1$, 即就是 $q-1=h\cdot m=h\cdot 2p$, 或者

$$q=h\cdot 2p+1 \tag{2}$$

于是由 (2) 式知当 2^p+1 除 3 之外, 至少有 3 个不同的素因子时, 一定有一个素因子 q 使得

$$q=h\cdot 2p+1 \geq 3\cdot 2\cdot p+1=6p+1$$

当 2^p+1 含有两个大于 3 的素因子 q_1 及 q_2 时, 由 (2) 式我们可设 $q_1=2h_1p+1$, $q_2=2h_2p+1$. 此时 h_1 和 h_2 不可能同时为 1 和 2. 若不然, 注意到 $p \geq 7$, 则在 p, $2h_1p+1$ 和 $2h_2p+1$ 三个数中, 至少有一个能被 3 整除, 这与 p, q_1 和 q_2 同时为素数矛盾. 因此 h_1 和 h_2 中至少有一个不妨设 h_2 大于或等于 3, 此时我们有 $q_2=2h_2p+1 \geq 6p+1$.

下面我们讨论 2^p+1 含有一个大于 3 的素因子 q 的情况. 此时最多有两种情况, 我们可设

$$2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta \quad \text{或者} \quad 2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta$$

若 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta$ 成立, 则当 $\beta \geq 3$ 时, 由 $S(n)$ 的性质可得

$$S(2^p+1) \geq S\left((2p+1)^\beta\right) \geq \beta\cdot(2p+1) \geq 3\cdot(2p+1)=6p+3 \geq 6p+1$$

当 $\beta=2$ 时, 若 $2 \mid \alpha$, 则 2^p+1 为奇完全平方, 设 $2^p+1=c^2$, $2^p=c^2-1=(c+1)(c-1)$, 而 $(c+1,\ c-1)=2$, 则 $c-1=2$, 即 $c=3$, 故 $p=3$, 这与 $p>3$ 矛盾, 故 $2 \nmid \alpha$, 因此可得

$$1 \equiv 2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^2=3^{2k+1}\cdot(2p+1)^2 \equiv 3 \pmod 8$$

矛盾. 因此 $2^p+1 \neq 3^{2k+1}\cdot(2p+1)^2$, 即 $\beta \neq 2$.

当 $\beta=1$ 时, 若 $2 \mid \alpha$, 则

$$2^p+1=3^{2k}\cdot(2p+1)$$

$$2^p=3^{2k}\cdot 2p+3^{2k}-1=3^{2k}\cdot 2p+(3^k+1)\cdot(3^k-1)$$

由 $4 \mid 2^p$, $4 \mid (3^k+1)\cdot(3^k-1)$, 而 $4 \nmid 3^{2k}\cdot 2p$ 得, α 不能为偶数. 即

$$2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)=3^{2k+1}\cdot(2p+1)$$

当 $k=0$, $p>5$ 时上式成为 $2^p+1=3(2p+1)$, 显然是不成立的. 当 $k\geq 1$ 时, 由上式可得 $2^p+1\equiv 0 \pmod 9$. 由此立刻推出 $2^{2p}\equiv 1 \pmod 9$.

设 n 是 2 模 9 的指标, 则由指标的性质知 $n \mid 2p$. 于是 $n=1,\ 2,\ p,\ 2p$. 显然 $n\neq 1,\ 2,\ p$, 所以 $n=2p$. 再由指标的性质知 $n \mid \phi(9)=6$, 即就是 $2p \mid 6$, $p \mid 3$, 这与 $p>3$ 矛盾, 因此 α 也不能为奇数. 综上可得 $\beta\neq 1$.

若 $2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta$ 成立, 则当 $\beta\geq 2$ 时, 由 $S(n)$ 的性质可得

$$S(2^p+1)=S\left(3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta\right)\geq S\left((4p+1)^\beta\right)\geq\beta\cdot(4p+1)\geq 2\cdot(4p+1)=8p+2\geq 6p+1$$

当 $\beta=1$ 时, 若 $2\mid\alpha$, 则 $2^p+1=3^{2k}\cdot(4p+1)=3^{2k}\cdot 4p+3^{2k}$, 或者

$$2^p=3^{2k}\cdot 4p+3^{2k}-1=3^{2k}\cdot 4p+(3^k+1)\cdot(3^k-1)$$

由 $8 \mid 2^p$, $8 \mid (3^k+1)\cdot(3^k-1)$, 而 $8\nmid 3^{2k}\cdot 4p$ 可得 α 不能为偶数. 所以 α 只能为奇数. 即就是 $2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)=3^{2k+1}\cdot(4p+1)$, 此式两边模 4 可得

$$1\equiv 2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)=3^{2k+1}\cdot(4p+1)\equiv 3 \pmod 4$$

矛盾, 故 α 也不能为奇数.

综上可得 $\beta\neq 1$. 结合以上几种情况我们立刻完成定理的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago:Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Liu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1):76-79.

[3] Jozsef Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3):78-80.

[4] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2):205-208.

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006, 49(5):1009-1012.

[6] Le Mohua. A lower bound for $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$ [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12(1/2/3):217-218.

[7] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York:Springer-Verlag, 1976.

A new lower bound estimate for the Smarandache function

SU Juan-li[1], SHANG Song-ye [2]

(1. Yangling Vocational And Technical College, Yangling, Shaanxi 712100 China;

2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: In this paper, using the elementary method, the low bound estimate problem of the Smarandache function at some special values is studied. A new lower bound estimate of the Smarandache function (at some special values) is given the estimate $S(2^p+1)\geq 6p+1$, where $p\geq 7$ is any prime.

Keywords: Smarandache function, lower bound estimate, elementary method

2000MSC: 11B83