doi: 10.11920/xnmdzk.2017.02.010

关于 Smarandache 双阶乘函数与近似伪 Smarandache 函数的混合均值

黄 炜
(宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘 要: 利用初等方法和解析方法,研究了著名 Smarandache 双阶乘函数 sdf(n) 与近似伪 Smarandache 函数 U*(n) 及 U(n) 的复合函数 sdf(U*(n)) 及 sdf(U(n)) 的混合均值分布,获得了两个有趣的混合均值性质及渐近公式,发展了经典数论函数的相关研究工作.

关键词: Smarandache 双阶乘函数; 近似伪 Smarandache 函数; 复合函数; 均值

中图分类号: O56 **文献标志码**: A **文章编号**: 2095-4271(2017)02-0167-05

On thehybrid mean value of the Smarandache double factorial function and the approximate pseudo-Smarandache function

HUANG Wei

(Department of Basic Courses, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, P. R. C.)

Abstract: The elementary and the analysis methods were used to study the properties of Smarandache double factorial function and the approximate pseudo-Smarandache function. Some hybrid mean properties and some asymptotic formulas were obtained, which helped to promote the relevant research work of classical arithmetical function.

Key words: Smarandache double factorial function; approximate pseudo-Smarandache function; composite function; mean value

先叙述相关函数.

1 双阶乘

双阶乘: 于任意整数 m,它的 Smarandache 双阶乘为

$$m!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdots m, & if \quad m \quad is \quad odd \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots m, & if \quad m \quad is \quad even \end{cases}$$,例如: $3!! = 1\times 3 = 3$,$6!! = 2\times 4\times 6 = 48$.

2 双阶乘函数

$Sdf(n)$: $Sdf(n) = \min\{m: m!! = kn, m \in N. k \in N\}$,即对任意的正整数 n. 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 定义为最小的正整数 m 使 得 $m!!$ 是 n 的一个倍数. 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 的前几项值为:

$Sdf(1) = 1, Sdf(2) = 2, Sdf(3) = 3, Sdf(4) = 4, Sdf(5) = 5, Sdf(6) = 6, Sdf(7) = 7, \cdots$.

对于算术 $Sdf(n)$ 函数的均值分布性质,文献[1-3]进行研究,并得到了一些有价值的研究成果,尤其是文献[3]给出了一个较强的渐近公式.

收稿日期: 2016-07-23
作者简介: 黄炜(1961-),男,汉族,陕西岐山人,教授. 研究方向: 数论
基金项目: 国家自然科学基金项目(11201363); 陕西省自然科学基金项目(15JK1262)

$$\sum_{n\le x} Sdf(n) = \frac{5\pi^2}{48}\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i \cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right)$$，其中 c_i 为可计算的常数.

3 近似伪 Smarandache 函数 $U_*(n)$ 及 $U(n)$

$$U_*(n) = \min\left\{m \in N^+ : n \le m + \frac{1}{2}m(m-1)\cdot(r-2), r \in N^+, r \ge 3\right\};$$

$$U(n) = \max\left\{m \in N^+ : n \ge m + \frac{1}{2}m(m-1)\cdot(r-2), r \in N^+, r \ge 3\right\}.$$

即 $U_*(n)$ 表示不大于 n 的 r 角形数 $\frac{1}{2}(2m + m(m-1)\cdot(r-2))$，$r \ge 3$ 中数 m 的最大者，$U(n)$ 表示不小于 n 的 r 角形数 $\frac{1}{2}(2m + m(m-1)\cdot(r-2))$，$r \ge 3$ 中数 m 的最小者;

对于算术函数 $U_*(n)$ 及 $U(n)$ 的均值分布性质，一些文献进行了研究[4-8]，尤其是文献[5]研究了包含 Smarandache 函数 $S(u_*(n))$ 的混合均值性质，得到:

$$\sum_{n\le x} S(U_*(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i \cdot ((2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{(2(r-2)x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right).$$

$$\sum_{n\le x} S(U(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i \cdot ((2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{(2(r-2)x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right).$$

文献[6]研究了包含 SmarandacheLCM 函数 $SL(u_*(n))$ 的混合均值性质，得到:

$$\sum_{n\le x} SL(U_*(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i \cdot (2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2(r-2)x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right).$$

$$\sum_{n\le x} SL(U(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i \cdot (2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2(r-2)x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right).$$

文献[7]研究了 Smarandache 双阶乘函数与近似伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的复合函数 $Sdf(Z(n))$ 的混合均值性质，得到: $\sum_{n\le x} Sdf(Z(n)) = \frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$.

文献[8]研究了包含 Smarandache 双阶乘函数与近似伪 Smarandache 函数 $U_6(n)$ 的复合函数 $Sdf(U_6(n))$ 的混合均值性质，得到:

$$\sum_{n\le x} Sdf(U_6(n)) = \frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i \cdot (2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $b_i(i = 2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

4 主要结论

我们在前人研究的基础上，借用复分析、实分析及初等方法，对复合函数 $Sdf(U_*(n))$ 和 $Sdf(U(n))$ 的均值分布进行了研究，获得的两个渐近公式是较有趣的.

也就是证明了如下定理:

定理: 对于任意实数 $x > 1$，设 $k \ge 2$，$r \ge 3$ 是两个给定的正整数，则有如下的渐近公式

$$\sum_{n\le x} Sdf(U_*(n)) = \frac{5\pi^2}{72(r-2)^{\frac{1}{2}}}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{d_i \cdot (2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right). \qquad (\mathrm{I})$$

$$\sum_{n\le x} Sdf(U_*(n)) = \frac{5\pi^2}{72(r-2)^{\frac{1}{2}}}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{e_i \cdot (2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right). \qquad (\mathrm{II})$$

其中 d_i 、$e_i(i=2,3,\cdots,k)$ ，是可计算常数.

特别的当 $r=3$ 时、即伪 Smarandache 函数 $U_*(n)$ 及 $U(n)$ 就是罗马尼亚著名数论专家 Jozsef Sandor 教授定义的近似伪 Smarandache 函数 $Z_*(n)$ 及 $Z(n)$ [3] 时: 我们有

推论 1: 对于任意整数 $x>1$ ，有下面的渐进公式

$$\sum_{n\le x} Sdf(Z_*(n)) = \frac{5\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

$$\sum_{n\le x} Sdf(Z(n)) = \frac{5\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

特别的当 $r=6$ 时，即近似伪 Smarandache 函数推广到六边形数集上时，我们有

推论 2: 对于任意整数 $x>1$ ，我们有

$$\sum_{n\le x} Sdf(U_*(n)) = \frac{5\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{f_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

$$\sum_{n\le x} Sdf(U(n)) = \frac{5\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{h_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 f_i 、$h_i(i=2,3,\cdots,k)$ ，是可计算常数.

4.1　引理及其证明

为了证明定理，先给出下面几个引理:

1) 引理 1: 对于任意正实数 $x\ge 1$ ，设 $\pi(x)=\sum_{p\le n} 1$ ，由 Abel 求和公式及素数定理 [8] 有

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i=(i-1)!,(i=1,2,3,\cdots,k)$ [10].

引理 2: 设 $a(n)$ 为一个数论函数，记 $A(n)=\sum_{n\le x} a(n)$ ，并且 $x<1$ 时，令 $A(x)=0$ [10].

设 f 是 $[y,x]$ 上有连续导函数，$0<y<x$ ，则我们有

$$\sum_{n\le x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt$$

引理 3: 设 $P(n)$ 是 n 的最大素因子 [1] ，$P(n)=\max_{1\le i\le k}\{p_i\}$ ，如果 $P>\sqrt{n}$ ，则我们有

(1) 如果 $P>\sqrt{n}$ ，$n\equiv 1(\bmod 2)$ ，$Sdf(n)=P(n)$;

(2) 如果 $P>\sqrt{n}$ ，$n\equiv 0(\bmod 2)$ ，$Sdf(n)=2P(n)$;

(3) 如果 $P>\sqrt{n}$ ，$Sdf(n)\le 4\sqrt{n}\ln n$.

引理 4　设正整数 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ ，

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是奇素数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是正整数，则

(1) 如果 $n\equiv 1(\bmod 2)$ ，$Sdf(2n)=2\max_{1\le i\le k}\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}$;

(2) 如果 $n\equiv 0(\bmod 2)$ ，则 $2n=2^{\alpha}n_1$ ，其中 α ，n_1 是正整数，且 $n_1\equiv 1(\bmod 2)$ ，则有: $Sdf(n)\le \max\{Sdf(2^{\alpha}),2Sdf(n_1)\}$.

引理 5: 对于任何实数 $n>1$ ，设 $u_r(n)=\frac{1}{2}(2(m+1)+m(m+1)\cdot(r-2))$ ，则有渐近公式: $m=\frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2}+O(1)$ [5-6].

4.2 **定理的证明**

我们来完成定理的证明

在 $\sum_{n\le x} Sdf(U_*(n))$ 中,对于任意正整数 $n>1$,当

$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))\le n\le\frac{1}{2}(2(m+1)+m(m+1)\cdot(r-2))$ 时,方程 $U_*(n)=m$ 有 $(r-2)m+1$ 个解,

$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))$,$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))+1$,

$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))+2$,…,$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))+(r-2)m$.

即

$u_r(\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))+j)=\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))$, $j=0,1,2,\cdots,(r-2)m$.

由于 $n\le x$,所以由引理 1 知当 $U_*(n)=m$ 时,m 满足

$1\le m\le\frac{(r-4)+\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)}$,亦即 $m=\frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2}+O(1)$,

对于任意实数 $x\ge 1$,M 是一个确定的正整数,满足

$\frac{1}{2}(2M+M(M-1)\cdot(r-2))\le n<\frac{1}{2}(2(M+1)+M(M+1)\cdot(r-2))$.

于是注意到 $Sdf(p)\le n$,$M=\frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}+O(1)$,$\ln M=\frac{1}{2}\ln x+O(1)$.

有

$$\sum_{n\le x} Sdf(U_*(n))=\sum_{t=0}^{M-1}\sum_{\frac{1}{2}(2M+M(M-1)\cdot(r-2))\le n<\frac{1}{2}(2(M+1)+M(M+1)\cdot(r-2))} Sdf(U_*(n))+\sum_{\frac{1}{2}(2M+M(M-1)\cdot(r-2))<n\le x} Sdf(U_*(n))=$$

$$\sum_{t=0}^{M-1}\left(\left(\frac{1}{2}(2(t+1)+t(t+1)\cdot(r-2))\right)-\left(\frac{1}{2}(2t+t(t-1)\cdot(r-2))\right)\right)Sdf(t)+$$

$$\sum_{\frac{1}{2}(2M+M(M-1)\cdot(r-2))<n\le x} Sdf(M)=\sum_{t=0}^{M-1}(r-2)tSdf(t)+O(M\cdot Sdf(M))=(r-2)\sum_{t=0}^{M-1}tSdf(t)+O\left(\frac{M^3}{\ln^2 M}\right)$$

令 $A(x)=\sum_{n\le x} Sdf(n)$,用 able 求和公式[6-7]易得:

$$\sum_{t=1}^{M} tSdf(t)=MSdf(M)-\int_1^M A(t)\,dt=$$

$$M\left(\frac{5\pi^2}{48}\frac{M^2}{\ln M}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot M^2}{\ln^i M}+O\left(\frac{M^2}{\ln^{k+1}M}\right)\right)-\int_1^M\left(\frac{5\pi^2}{48}\frac{t^2}{\ln t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot t^2}{\ln^i t}+O\left(\frac{t^2}{\ln^{k+1}t}\right)\right)dt=$$

$$\frac{5\pi^2}{48}\frac{M^3}{\ln M}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot M^3}{\ln^i M}+O\left(\frac{M^3}{\ln^{k+1}M}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{5\pi^2}{48}\frac{M^3}{\ln M}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot M^3}{\ln^i M}+O\left(\frac{M^3}{\ln^{k+1}M}\right)\right)=$$

$$\frac{5\pi^2}{72}\frac{M^3}{\ln M}+\frac{2}{3}\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot M^3}{\ln^i M}+O\left(\frac{M^3}{\ln^{k+1}M}\right)=$$

$$\frac{5\pi^2}{72(r-2)^{\frac{3}{2}}}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\frac{2}{3}\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

$$\sum_{n\le x} Sdf(U_*(n)) = \frac{5\pi^2}{72(r-2)^{\frac{1}{2}}}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $d_i(i=2,3,\cdots,k)$，是可计算常数.

定理中(Ⅰ)式证明完毕.

用同样方法可类似完成定理中(Ⅱ)式的证明.

参考文献

[1] LE M H. A conjecture concerning the smarandache dual function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14(3): 153-155.
[2] 樊旭辉,闫欣荣. 关于 Smarandache 双阶乘 sdf(n) 函数的均值估计 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2013, 14(4): 88-90.
[3] JOZSEF SANDOR. On Additive Analogues of Certain Arithmetic functions [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14(3): 128-129.
[4] 黄炜. 关于伪 Smarandache 函数 z(n) 的两个问题 [J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2014, 35(5): 10-12.
[5] 黄炜. 一个包含 Smarandache 函数的复合函数的均值估计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(6): 890-894.
[6] 黄炜. 2 个 SmarandacheLCM 函数的混合均值估计 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2011, 24(3): 390-393.
[7] 鲁伟阳,高丽等. 关于 Smarandache 双阶乘函数与伪 Smarandache 函数的混合均值 [J]. 江西科学, 2014, 32(2): 189-191.
[8] 王龙. 关于 Smarandache 双阶乘函数的混合均值 [J]. 延安职业技术学院学报, 2014, 28(4): 95-111.
[9] JOZSEF SANDOR. On certain inequalities involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.
[10] TOM M, APOSTOL. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1976.
[11] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
[12] 黄炜. 一类可加函数的均值估计 [J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2014, 40(4): 578-581.
[13] 黄炜. 关于 Smarandache 函数 S(n) 的两个问题 [J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2012, 38(1): 1-4.
[14] 黄炜. 关于 Smarandach K 次方部分数列 [J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2010, 36(5): 695-699.
[15] 张重远; 朱伟义. 第六个费马素数存在性的一个等价命题 [J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2013, 39(1): 43-46.
[16] 朱民. 一个包含有 F. Smarandache LCM 函数 SL(n) 的混合均值 [J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2013, 39(4): 564-566.

(责任编辑: 付强,张阳,李建忠,罗敏; 英文编辑: 周序林)