文章编号:1007－2985(2017)03－0004－04

关于 Smarandache 双阶乘函数的一个混合均值*

鲁伟阳[1],高 丽[2]

(1.延安中学,陕西 延安 716000;2.延安大学数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:利用初等方法和解析方法,研究 Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 与最大素因子函数 $P(n)$ 的混合函数 $(Sdf(n)-P(n))^{\beta}$ 及 $\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}$ 的均值问题(其中 $\delta_{\alpha}(n)$ 为除数函数),得到 2 个较强的渐近公式.

关键词:Smarandache 双阶乘函数;除数函数;混合均值;渐近公式

中图分类号:O156.4 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.cnki.jdxb.2017.03.002

对于任意正整数 n,著名的 Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m\,!!$,其中 $m\,!!=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdots m,2\nmid n,\\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots m,2\mid n,\end{cases}$ 即 $Sdf(n)=\min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m\,!!\}$.有关这一函数,许多学者进行了研究且取得较好的结果[1-5].如沈虹[3]、樊旭辉等[4]研究了函数 $Sdf(n)$ 的均值,给出 2 个较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}Sdf(n)=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^{2}}\right),$$

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{5\pi^{2}}{48}\cdot\frac{x^{2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_{i}x^{2}}{\ln^{i}x}+O\left(\frac{x^{2}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $e_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.鲁伟阳等[5]研究了 Smarandache 双阶乘函数与伪 Smarandache 函数的复合函数 $Sdf(Z(n))$ 的均值,给出 1 个较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}Sdf(Z(n))=\frac{\pi^{2}}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_{i}(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^{i}\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.王建平[6]研究了函数 $Sdf(n)$ 与最大素因子函数 $P(n)$、函数 $Sdf(n)$ 与 Smarandache 函数 $S(n)$ 的均方差问题,给出 2 个较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^{2}=\frac{\zeta(3)}{24}\cdot\frac{x^{3}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_{i}x^{3}}{\ln^{i}x}+O\left(\frac{x^{3}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-S(n))^{2}=\frac{\zeta(3)}{24}\cdot\frac{x^{3}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_{i}x^{3}}{\ln^{i}x}+O\left(\frac{x^{3}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

笔者拟研究函数 $Sdf(n)$ 与函数 $P(n)$ 的混合函数 $(Sdf(n)-P(n))^{\beta}$ 及 $\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}$ 的

* 收稿日期:2016－10－13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11471007);陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);延安大学校级科研计划项目(YD2014－05);延安市 2016 年度微型课题(135YWX－1461)
作者简介:鲁伟阳(1989—),男,陕西兴平人,延安中学中教二级教师,理学硕士,主要从事数论研究
通信作者:高 丽(1966—),女,陕西绥德人,延安大学数学与计算机科学学院教授,硕士生导师,主要从事解析数论研究.

均值问题（其中 $\delta_\alpha(n)$ 为除数函数），得到 2 个较强的渐近公式.

引理 1[7] 设 $x\in\mathbf{R}, x\geqslant 2$，则有 $\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{e_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)$，其中 $e_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $e_1=1$.

引理 2 设 $x\in\mathbf{R}, x\geqslant 2$，则对任意素数 p 和正实数 β，有

$$\sum_{2n<p\leqslant\frac{x}{2n}}p^\beta=\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln\frac{x}{2n}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i x^{\beta+1}\ln^i(2n)}{(2n)^{\beta+1}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $e_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

证明 由引理 1 及 Abel 求和公式[8]，可得

$$\sum_{2n<p\leqslant\frac{x}{2n}}p^\beta=\left(\frac{x}{2n}\right)^\beta\pi\left(\frac{x}{2n}\right)-(2n)^\beta\pi(2n)-\beta\int_{2n}^{\frac{x}{2n}}t^{\beta-1}\pi(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{x}{2n}\right)^\beta\cdot\left(\frac{\frac{x}{2n}}{\ln\frac{x}{2n}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\frac{x}{2n}}{\ln^i\frac{x}{2n}}+\right.$$

$$\left.O\left(\frac{\frac{x}{2n}}{\ln^{k+1}\frac{x}{2n}}\right)\right)-\beta\int_{2n}^{\frac{x}{2n}}\left(\frac{t^\beta}{\ln t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i t^\beta}{\ln^i t}+O\left(\frac{t^\beta}{\ln^{k+1}t}\right)\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2n}\right)^{\beta+1}}{\ln\frac{x}{2n}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\left(\frac{x}{2n}\right)^{\beta+1}}{\ln^i\frac{x}{2n}}+O\left(\frac{\left(\frac{x}{2n}\right)^{\beta+1}}{\ln^{k+1}\frac{x}{2n}}\right)-\left(\frac{\beta}{\beta+1}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2n}\right)^{\beta+1}}{\ln\frac{x}{2n}}+\right.$$

$$\left.\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\left(\frac{x}{2n}\right)^{\beta+1}}{\ln^i\frac{x}{2n}}+O\left(\frac{\left(\frac{x}{2n}\right)^{\beta+1}}{\ln^{k+1}\frac{x}{2n}}\right)\right)=\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln\frac{x}{2n}}+$$

$$\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i x^{\beta+1}\ln^i(2n)}{(2n)^{\beta+1}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $d_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

引理 3[8] 设 $x\geqslant 1$ 且 $\alpha>0, \alpha\neq 1$，则有 $\sum\limits_{n\leqslant x}\delta_\alpha(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}+O(x^\gamma)$，其中 $\gamma=\max\{1,\alpha\}$.

定理 1 设 k 为给定的整数且 $k\geqslant 2$，则对任意的实数 $x\geqslant 2$，当 $\beta>1$ 时，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^\beta=\frac{\zeta(\beta+1)}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^{\beta+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta－函数，$a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

证明 在和式 $\sum\limits_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^\beta$ 中，将区间 $[1,x]$ 中所有正整数 n 分为 2 个子集合：$A=\{n:1\leqslant n\leqslant x, P(n)>\sqrt{n}\}$，$B=\{n:1\leqslant n\leqslant x, n\notin A\}$.

若 $n\in A$，则 $n=mP(n)$，且 $P(m)<P(n)$.

对 $\forall n>2$ 且 $n\in A$，若 $2\nmid n$，则 $Sdf(n)=P(n)$；若 $2\mid n$，则 $Sdf(n)=2P(n)$.因此有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in A}}(Sdf(n)-P(n))^\beta=\sum_{\substack{2n\leqslant x,\\ 2n\in A}}(Sdf(2n)-P(2n))^\beta+\sum_{\substack{2n-1\leqslant x,\\ 2n-1\in A}}(Sdf(2n-1)-P(2n-1))^\beta=$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant\frac{x}{2},\\ 2n\in A}}(Sdf(2n)-P(2n))^\beta=\sum_{\substack{1<n\leqslant\frac{x}{2},\\ 2n\in A}}(2P(2n)-P(2n))^\beta=$$

$$\sum_{\substack{1<n\leqslant\frac{x}{2},\\ 2n\in A}}P^\beta(2n)=\sum_{\substack{np\leqslant\frac{x}{2},\\ p>2n}}p^\beta=\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\sum_{2n<p<\frac{x}{2n}}p^\beta.$$

由引理 2 可得

$$\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\sum_{2n<p<\frac{x}{2n}}p^{\beta}=\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\left[\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln\frac{x}{2n}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i x^{\beta+1}\ln^i(2n)}{(2n)^{\beta+1}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln^{k+1}x}\right)\right]=\frac{1}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\cdot$$

$$\frac{x^{\beta+1}}{\ln x}\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\frac{1}{n^{\beta+1}}+\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i x^{\beta+1}\ln^i(2n)}{(2n)^{\beta+1}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{2^{\beta+1}\ln^{k+1}x}\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)=$$

$$\frac{\zeta(\beta+1)}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^{\beta+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{1}$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

对于集合 B,显然 $Sdf(n)\leqslant\sqrt{n}\ln n$,且 $P(n)\leqslant\sqrt{n}$,因此有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in B}}(Sdf(n)-P(n))^{\beta}\ll\sum_{n\leqslant x}n^{\frac{\beta}{2}}\ln^{\beta}n\ll x^{\frac{\beta}{2}+1}\ln^{\beta}x.\tag{2}$$

结合(1),(2)式,可得

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^{\beta}=\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in A}}(Sdf(n)-P(n))^{\beta}+\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in B}}(Sdf(n)-P(n))^{\beta}=$$

$$\frac{\zeta(\beta+1)}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^{\beta+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

定理 2 设 k 为给定的整数且 $k\geqslant 2$,则对任意的实数或复数 α 和实数 $x\geqslant 2$,当 $\beta>1$ 时,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}=\frac{(1+2^{\alpha})\zeta(\beta+1)\zeta(\beta+1-\alpha)}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\beta+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta－函数,$b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

证明 将区间 $[1,x]$ 中的所有正整数 n 按照定理 1 证明中的分类,分为集合 A 和 B.

对于集合 A,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in A}}\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}=\sum_{\substack{2n\leqslant x,\\ 2n\in A}}\delta_{\alpha}(2n)(Sdf(2n)-P(2n))^{\beta}+$$

$$\sum_{\substack{2n-1\leqslant x,\\ 2n-1\in A}}\delta_{\alpha}(2n-1)(Sdf(2n-1)-P(2n-1))^{\beta}=$$

$$\sum_{\substack{2n\leqslant x,\\ 2n\in A}}\delta_{\alpha}(2n)(Sdf(2n)-P(2n))^{\beta}=$$

$$\sum_{\substack{2n\leqslant x,\\ 2n\in A}}\delta_{\alpha}(2n)(2P(2n)-P(2n))^{\beta}=\sum_{\substack{2n\leqslant x,\\ 2n\in A}}\delta_{\alpha}(2n)P^{\beta}(2n)=$$

$$\sum_{\substack{2n\leqslant x,\\ 2n\in A}}\delta_{\alpha}(n)\delta_{\alpha}(2)P^{\beta}(2n)=\sum_{\substack{2n\leqslant x,\\ 2n\in A}}\delta_{\alpha}(n)(1+2^{\alpha})P^{\beta}(2n)=$$

$$(1+2^{\alpha})\sum_{\substack{1<n\leqslant\frac{x}{2},\\ 2n\in A}}\delta_{\alpha}(n)P^{\beta}(2n)=(1+2^{\alpha})\sum_{\substack{np\leqslant\frac{x}{2},\\ p>2n}}\delta_{\alpha}(n)\cdot p^{\beta}=$$

$$(1+2^{\alpha})\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\sum_{2n<p<\frac{x}{2n}}\delta_{\alpha}(n)\cdot p^{\beta}.$$

由引理 2 可得

$$\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\sum_{2n<p<\frac{x}{2n}}\delta_{\alpha}(n)\cdot p^{\beta}=\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\delta_{\alpha}(n)\sum_{2n<p<\frac{x}{2n}}p^{\beta}=\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\delta_{\alpha}(n)\left(\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln\frac{x}{2n}}+\right.$$

$$\left.\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i x^{\beta+1}\ln^i(2n)}{(2n)^{\beta+1}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{x^{\beta+1}}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\frac{\delta_{\alpha}(n)}{n^{\beta+1}\ln\frac{x}{2n}}+$$

$$\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\delta_{\alpha}(n)\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i x^{\beta+1}\ln^i(2n)}{(2n)^{\beta+1}\ln^i x}+O\left(\sum_{n\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}}\delta_{\alpha}(n)\frac{x^{\beta+1}}{(2n)^{\beta+1}\ln^{k+1}x}\right)=$$

$$\frac{\zeta(\beta+1)\zeta(\beta+1-\alpha)}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\beta+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

所以有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in A}}\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}=\frac{(1+2^{\alpha})\zeta(\beta+1)\zeta(\beta+1-\alpha)}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\beta+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{\ln^{k+1}x}\right).\quad(3)$$

对于集合 B，显然 $Sdf(n)\leqslant\sqrt{n}\ln n$，且 $P(n)\leqslant\sqrt{n}$. 由引理 3 可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}\ll\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in B}}\delta_{\alpha}(n)\cdot n^{\frac{\beta}{2}}\ln^{\beta}n\ll x^{\alpha+1+\frac{\beta}{2}}\ln^{\beta}x.\quad(4)$$

结合(3)，(4) 式可得

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}=\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in A}}\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}+\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in B}}\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}=$$

$$\frac{(1+2^{\alpha})\zeta(\beta+1)\zeta(\beta+1-\alpha)}{(\beta+1)2^{\beta+1}}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\beta+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\beta+1}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

参考文献：

[1] SMARANDACHE F.Only Problems，not Solutions[M].Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[2] LE Maohua.Aconjecture Concerning the Smarandache Dual Function[J].Smarandache Notions Journal，2004，14(3)：153－155.

[3] 沈　虹.一个新的数论函数及其它的值分布[J].纯粹数学与应用数学，2007，23(2)：235－238.

[4] 樊旭辉，闫欣荣.关于 Smarandache 双阶乘 $sdf(n)$函数的均值估计[J].空军工程大学学报(自然科学版)，2013，14(4)：88－90.

[5] 鲁伟阳，高　丽，郝虹斐.关于 Smarandache 双阶乘函数与伪 Smarandache 函数的混合均值[J].江西科学，2014，32(2)：189－191；251.

[6] WANG Jianping.On the Value Distribution Properties of the Smarandache Double-Factoral Function[J].Scientia Magna，2007，3(4)：111－114.

[7] 潘承洞，潘承彪.素数定理的初等证明[M].上海：上海科学技术出版社，1988：284.

[8] TOM M APOSTOL.Introduction to Analytic Number Theory[M].New York：Spring-Verlag，1976：60，77.

On the Hybrid Mean Value of the Smarandache Double-Factorial Function

LU Weiyang[1]，GAO Li[2]

(1.Yan'an Senior High School，Yan'an 716000，Shaanxi China；2.College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，Shaanxi China)

Abstract：The elementary method and analytic method were performed to study the mean value problem of hybrid function $(Sdf(n)-P(n))^{\beta}$ and $\delta_{\alpha}(n)(Sdf(n)-P(n))^{\beta}$ involving the Smarandache double-factorial function $Sdf(n)$ and the largest prime factor divisor function $P(n)$，where $\delta_{\alpha}(n)$ denotes the divisor function.Two sharper asymptotic formulas were proposed.

Key words：Smarandache double-factorial function；divisor function；hybrid mean value；asymptotic formula

(责任编辑　向阳洁)