第 10卷 第 24期 2010年 8月
1671-1815(2010)24-5967-03
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 10 No. 24 Aug. 2010

关于 Smarandache可乘函数的均值研究

冯治宇
(宝鸡职业技术学院基础部,宝鸡 721013)

摘 要 研究了 Smarandache可乘函数的均值性质,并用解析方法得到了其均值的一个渐近公式。

关键词 Smarandache可乘函数 均值 渐近公式
中图法分类号 O156.4 文献标志码 A

1 引言与结论

众所周知自变量 n在正整数集或其子集中取值的函数 $y=f(n)$称为数论函数或算术函数,它的各种性质的研究在数论中占有举足轻重的地位。很多重要算术函数的单个取值非常不规则,给出它们的显式表达几乎不可能。尽管如此,其均值 $\sum_{n\leqslant x} f(n)$往往有非常规则的渐近公式。因而数论函数的均值估计问题在数论研究中占有十分重要的位置,尤其是解析数论的重要研究课题之一,也是研究各种数论问题不可或缺的工具,许多著名的数论难题都与之密切相关,因而在这一领域取得任何实质性进展都必将对数论的发展起到重要的推动作用。

1.1 Smarandache可乘函数

对任意的正整数 n, Smarandache可乘函数 $f(n)$定义如下:

$$(m, n)=1\Rightarrow f(mn)=\max\{f(m), f(n)\}。$$

如果 n的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 则有: $f(n)=\max\left\{f(p_1^{\alpha_1}), \cdots f(p_r^{\alpha_r})\right\}$特别的 $f(p^{\alpha})=\max\left\{p, \alpha\right\}$;

1.2 k-full数

对于任意的 $n\in N^{+}$, n的 k-full数集定义为:如果对于任意的素数 p, $p\mid n$都有 $p^k\mid n$,就称 n为 k-full数, k-full数集记为 A_k,例如当 $k=2$时即: $A_2=\{4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 32, 36, \cdots\}$,

对于 Smarandache可乘函数的性质与均值已有不少文献进行了研究[1,2,3],而对这个可乘函数在一些特殊集合中的均值很少研究。本文主要目的使用初等方法研究这个可乘函数在 k-full集中的均质性中,并给出一个有趣的渐进公式,具体就是证明了下面的定理。

定理 对于任意 $x\geqslant 2$, A_k表示所有简单数构成的集合,有渐进公式:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} f(n)=C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+\frac{2x}{\ln x}+\frac{9x^{\frac{2}{3}}}{2\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)。$$

2 引理

为了完成定理的证明,首先有下面几个引理

引理 1 设 $x\in A$,则 $n=p$, $n=p^2$, $n=p^3$,或 $n=pq$四种不同的情形,其中 p, q是不同的素数。

证明 已知:如果 n的标准分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k};$$

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)。$$

由文献[4]自然数 n的因子数积函数 $P_d(n)=\prod_{d\mid n} d$,小于自然数 n的因子数积函数 $q_d(n)=\prod_{d\mid n, d<n} d$,并且

2010年 6月 3日收到 国家自然科学基金项目(10671155);
陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)资助
第一作者简介:冯治宇(1964—),男,陕西凤翔人,讲师,研究方向:数论及数学应用。E-mail: fzy6x@163.com。

$$P_d(n)=\prod_{d|n} d=\prod_{\frac{n}{d}|n}\frac{n}{d}=\left(\prod_{d|n} d\frac{n}{d}\right)^{\frac{1}{2}}=n^{\frac{d(n)}{2}},\tag{1}$$

$$q_d(n)=\prod_{d|n,\,d<n} d=\frac{\prod_{d|n} d}{n}=n^{\frac{d(n)}{2}-1}\tag{2}$$

由于 n是简单数,因此 $q_d(n)\leqslant n$,即 $n^{\frac{d(n)}{2}-1}\leqslant n$,从而 $d(n)\leqslant 4$。

由 $d(n)$的定义我们有:$n=p$, $n=p^2$, $n=p^3$,或 $n=pq$四种不同的情形,其中 p, q是不同的素数。于是完成了引理 1的证明。

引理 2 对于任何实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant n}1$,由 Abel求和公式[4]及素数定理,

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

其中 $\alpha_i=(i-1)!$,$(i=1,2,3,\cdots,k)$。证明见参考文献[3]中定理 3.2。

引理 3 设实数 $x\geqslant 3$,p, q是不同的素数,有

$$\sum_{p\leqslant x}p=\frac{1}{2}\frac{x^2}{\ln x}+\frac{1}{4}\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right);$$

$$\sum_{pq\leqslant x}p=C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)。$$

证明 由引理 2

$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$,再由由 Abel求和,有:

$$\sum_{p\leqslant x}p=x\pi(x)-\int_1^x\pi(y)\,dy=$$

$$x^2\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\ln^i x}-\int_1^x\left[y\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{2+1}y}\right)\right]dy+O\left(\frac{x^2}{\ln^{2+1}x}\right)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)-\int_1^x\left[\frac{y}{\ln y}+\frac{y}{\ln^2 y}\right]dy+O\left(\frac{x^2}{\ln^{2+1}x}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\frac{x}{\ln x}+\frac{1}{4}\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)。$$

同时,当 $x<1$时,由麦克劳林幂级数有:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m+\cdots;$$

因而 $\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p\sum_{q\leqslant\frac{x}{p}}1=$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p\left\{\frac{\left(\frac{x}{p}\right)}{\ln x-\ln p}+\frac{\left(\frac{x}{p}\right)}{(\ln x-\ln p)^2}+O\left(\frac{\left(\frac{x}{p}\right)}{(\ln x-\ln p)^3}\right)\right\}=$$

$$\frac{x}{\ln x}\sum_{p\leqslant x}\left[1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\frac{\ln^3 p}{\ln^3 x}+\cdots+\frac{\ln^m p}{\ln^m x}+\cdots\right]+$$

$$\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{p\leqslant x}\left[1+2\frac{\ln p}{\ln x}+3\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+4\frac{\ln^3 p}{\ln^3 x}+\cdots+(m+1)\frac{\ln^m p}{\ln^m x}+\cdots\right]+$$

$$O\sum_{p\leqslant x}\frac{x^m}{\ln^3\frac{x}{p}}=A_1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}+A_2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^3 x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^4 x}\right)。$$

其中 A_1、A_2为两个可计算的常数。

同理可得

$$\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}1\sum_{p\leqslant\frac{x}{q}}p=$$

$$\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\left\{\frac{\left(\frac{x}{q}\right)^2}{2(\ln x-\ln p)}+\frac{\left(\frac{x}{q}\right)^2}{4(\ln x-\ln p)^2}+O\left(\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^2}{(\ln x-\ln p)^3}\right)\right\}=$$

$$\frac{x^2}{2\ln x}\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{q^2}\left[1+\frac{\ln q}{\ln x}+\frac{\ln^2 q}{\ln^2 x}+\frac{\ln^3 q}{\ln^3 x}+\cdots+\frac{\ln^m q}{\ln^m x}+\cdots\right]+$$

$$\frac{x^2}{4\ln^2 x}\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{q^2}\left[1+2\frac{\ln q}{\ln x}+3\frac{\ln^2 q}{\ln^2 x}+4\frac{\ln^3 q}{\ln^3 x}+\cdots+(m+1)\frac{\ln^m q}{\ln^m x}+\cdots\right]+O\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^m}{\ln^3\frac{x}{q}}=\left(\frac{1}{2}\sum_q\frac{1}{q^2}\right)\frac{x^2}{\ln x}+$$

$$\left(\frac{1}{2}\sum_q\frac{\ln q}{q^2}+\frac{1}{4}\sum_q\frac{1}{q^2}\right)\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)。$$

综上所述

$$\sum_{pq\leqslant x}p=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p\sum_{q\leqslant\frac{x}{p}}1+\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}1\sum_{p\leqslant\frac{x}{q}}p-\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}1=$$

$$B_1\frac{x^2}{\ln x}+B_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)。$$

其中 B_1、B_2为两个可计算的常数。于是完成了引理 3的证明。

3 定理的证明

根据引理 1及引理 2立刻得到

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} f(n)=\sum_{p\leqslant x} p+\sum_{p^2\leqslant x} 2p+\sum_{p^3\leqslant x} 3p+\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p<q}} p=$$

$$C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+\frac{2x}{\ln x}+\frac{9x^{\frac{2}{3}}}{2\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)。$$

其中 C_1、C_2 为两个可计算的常数, 这就完成了定理的证明。

参 考 文 献

1 Smarandache F. Only problems not solutions. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993
2 Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Spring-Verlag, 1976
3 LIU Hongyan, ZHANG Wepeng. On the divisor products and proper divisor products sequences. Smarandache Notions Journal, 2002; 13(1—2—3): 128—133
4 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1999

One Hybrid Mean Value Formula Involving of New Smarandache Multiplicative Function

FENG Zhi-yu
(Department of Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, P. R. China)

[Abstract] The hybrid mean value of new smarandache multiplicative function is studied and an asymptotic formula of this function is given by using the analytic methods.

[Key words] Smarandache multiplicative function mean value asymptotic formula

---

(上接第 5966页)

变换且使得 $A=S+N$, 至于该分解的唯一性证明过程由于篇幅原因在本文中省略。

参 考 文 献

1 裴定一, 祝跃飞. 算法数论. 北京: 北京大学出版社, 2002: 23—26
2 蓝一中. 高等代数简明教程(第二版). 北京: 北京大学出版社, 2007: 136—154
3 田金兵, 严 政, 刘合国. 关于中国剩余定理. 湖北大学学报, 2006; 28(4): 325—327

Proof and Applications of Chinese Remainder Theorem in $k[x]$

HE Bin-tao
(Department of Mathematics, Shanxi University of Technology, Hanzhong 723000, P. R. China)

[Abstract] Chinese remainder theorem plays an important role in number theory and algebra. A proof of Chinese remainder throrem in $k[x]$ is given, and give the applications in proving Lagrange interpolating formula and Jordan-Chevally theory by Chinese remainder theorem in $k[x]$.

[Key words] Chinese remainder theorem congruent equations Lagrange interpolating formula