文章编号: 1000-5641(2011)03-0068-05

关于Smarandache方程的可解性

赵教练

(渭南师范学院 数学与信息科学系, 陕西 渭南　714000)

摘要: 研究包含经典的Euler函数与Smarandache函数的算术方程, 利用分类等初等数论方法, 给出了此方程解的一般形式, 得到三个有趣的定理, 改进和补充了已有的结论.

关键词: Smarandache函数; Euler函数; 可解性

中图分类号: O156.5　　**文献标识码**: A　　**DOI**: 10.3969/j.issn.1000-5641.2011.03.010

Solvability of equations involving Smarandache function

ZHAO Jiao-lian

(*Department of Mathematics and Informatics, Weinan Teacher's College, Weinan Shaanxi*　714000, *China*)

Abstract: This acticle studied the arithmetical equation involving Euler totient function and Smarandache function. By using elementary number theory methods, the general form of solutons was discussed, and three interesting theories were obtained. The existed results were improved.

Key words: Smarandache function; Euler's totient function; solvability

0　引言及结论

对于任意给定的正整数n, F. Smarandache函数$S(n)$被定义为[1], 存在最小的正整数r满足$n|r!$, 也就是以下这样的函数:

$$S(n)=\min\{r:r\in N,n|r!\}.$$

数论中, 著名的Euler函数$\varphi(n)$表示$1,2,3,\cdots,n-1$中与n互素的个数[2]. 关于这个经典函数的相关性质, 许多学者对其进行了详尽的研究[3-9].

T. M. Apostol在文献[10]中给出如下的结论: 对$n\geqslant 1$,

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

收稿日期: 2010-10

基金项目: 陕西省自然科学基础研究计划(2010JM1009); 陕西省教育厅专项计划(2010JK541); 渭南师范学院科研计划(10YKZ065)

作者简介: 赵教练, 男, 讲师, 研究方向特殊函数. E-mail: zhaojl2004@gmail.com.

若 $n=p_1^{\partial_1}p_2^{\partial_2}p_3^{\partial_3}\cdots p_m^{\partial_m}$, 其中 $p_1<p_2<p_3<\cdots<p_k$. 根据这个结论, 很容易得到如下的性质,

$$\varphi(n)=p_1^{\partial_1-1}p_2^{\partial_2-1}\cdots p_m^{\partial_m-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1).$$

关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 与欧拉函数 $\varphi(n)$ 的方程:

$$S\left(n^k\right)=\varphi(n), \tag{0.1}$$

以前有一些学者对它进行了研究, 并给出了 k 为比较小的具体的正整数时, 方程 (0.1) 的正整数解. 例如, 文献 [11] 中,给出了 $k=1$ 时方程 (0.1) 的全部正整数解, $n=1,8,9,12,18$. 文献 [12] 中对 $k=2$ 及 $k=3$ 时方程 (0.1) 的解进行了研究, 并给出了它的正整数解, 分别为 $n=1,24,50$ 及 $n=1,48,49$. 本文不具体到某个特定的 k, 而是寻求它们解的一般形式, 在这个过程中，发现了两类满足特定条件下的 k 的一些解, 即以下定理.

定理 1　设 p 为素数, $p\geqslant 5$, 若 $p+2$ 也为素数,则 $n=p^2(p+2)$ 及 $n=2p^2(p+2)$ 为方程 $S\left(n^k\right)=\varphi(n)$ 的解, 其中 $k=\frac{1}{2}(p+2)(p-1)$.

定理 2　设 k 为任意的正整数, 若 $2k+1$ 为素数, 则 $n=(2k+1)^2$ 及 $n=2\times(2k+1)^2$ 是方程 $S\left(n^k\right)=\varphi(n)$ 的解.

定理 3　设k 为任意的正整数, 当 $1\leqslant k\leqslant 3$ 时, $n=2^{k+1}\times 3$ 是方程 $S\left(n^k\right)=\varphi(n)$ 的解; 而当 $k\geqslant 4$ 时, $n=2^{k+1}\times 3$ 不是方程 $S\left(n^k\right)=\varphi(n)$ 的解.

注　通过定理 2 可以知道, $k=2$ 时, $n=25$ 也是方程 $S\left(n^2\right)=\varphi(n)$ 的解; $k=3$ 时, $n=98$ 同样也是 $S\left(n^3\right)=\varphi(n)$ 的解. 这样对文献 [12] 的结果进行了补充.

1　引理及证明

为了完成定理的证明, 需要引入以下两个有用的引理.

引理 1.1　设 p 为任意素数, 当 $1\leqslant\partial\leqslant p^2+p$ 时, $S\left(p^{\partial}\right)=\left(\partial-\left[\frac{\partial}{p+1}\right]\right)p$, 其中 $\left[\frac{\partial}{p+1}\right]$ 表示对 $\frac{\partial}{p+1}$ 取整.

证　明　当$1\leqslant\partial\leqslant p^2+p$ 时, 设 $S\left(p^{\partial}\right)=kp$.

将数列 $\{np\}$ 按每行 p 个数进行排列, 其中 $n\in\mathbf{N}^+$, 则每行相乘时 p 的指数为 $p+1$.

根据带余除法可知, 存在正整数 m 和 d, 使得

$$\partial=m(p+1)+d, 0\leqslant d\leqslant p, \tag{1.1}$$

此时

$$k=mp+d. \tag{1.2}$$

将 (1.2) 式代入 (1.1) 式得 $\partial=k+m$, 即

$$k=\partial-m. \tag{1.3}$$

由 (1.1) 式得 $\frac{\partial}{p+1}=m+\frac{d}{p+1}$. 由于 $0\leqslant d\leqslant p$, 则 $0\leqslant\frac{d}{p+1}<1$, 所以两边取整可得

$$m=\left[\frac{\partial}{p+1}\right]\quad. \tag{1.4}$$

将 (1.4) 式代入 (1.3) 得$k=\partial-\left[\frac{\partial}{p+1}\right]$. 因此 $S\left(p^{\partial}\right)=\left(\partial-\left[\frac{\partial}{p+1}\right]\right)p$. 引理 1.1 得证.

引理 1.2 设 p 为素数, ∂ 为任意的正整数, 那么 $S\left(p^{\partial}\right)$ 的上下界有如下估计.

$$(p-1)\partial+1 \leqslant S\left(p^{\partial}\right) \leqslant (p-1)\left[\partial+1+\log_p \partial\right]+1.$$

证　明 参见文献[13].

2 定理的证明

首先来证明定理 1. 当 $n=p^2(p+2)$ 时,

$$S(n)=\max\{S(p^{2k}), S((p+2)^k)\}.$$

由于 $2k=(p+2)(p-1)<p^2+p$, 根据引理 1.1, 可得

$$\begin{aligned} S\left(p^{2k}\right) &= \left\{2k-\left[\frac{2k}{p+1}\right]\right\}p \\ &= \left\{(p+2)(p-1)-\left[\frac{(p+2)(p-1)}{p+1}\right]\right\}p, \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(p+2)(p-1)}{p+1}\right]=\left[\frac{(p+1)(p-1)+(p-1)}{p+1}\right]=\left[p-1+\frac{p-1}{p+1}\right]=p-1.$$

因此

$$S(p^{2k})=\{(p+2)(p-1)-(p-1)\}p=p^3-p.$$

所以需要证明 $S\left(n^k\right)=S\left(p^{2k}\right)$, 即证明

$$S(p^{2k})>S((p+2)^k).$$

而 $k=\frac{1}{2}(p+2)(p-1)<(p+2)^2+(p+2)$, 则

$$S\left((p+2)^k\right)=\left\{k-\left[\frac{k}{p+3}\right]\right\}(p+2)=\left\{\frac{1}{2}(p+2)(p-1)-\left[\frac{(p+2)(p-1)}{2(p+3)}\right]\right\}(p+2).$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{(p+2)(p-1)}{2(p+3)}\right] &= \left[\frac{(p+2)(p+3)-(3p+5)}{2(p+3)}\right]=\left[\frac{(p+2)(p+3)-2(p+3)-(p+2)}{2(p+3)}\right] \\ &= \left[\frac{p+1}{2}-1-\frac{p+2}{2(p+3)}\right]. \end{aligned}$$

由于 $0<\frac{p+2}{2(p+3)}<1$, 所以 $\left[\frac{(p+2)(p-1)}{2(p+3)}\right]=\frac{p+1}{2}-1$, 因此

$$S((p+2)^k)=\left\{\frac{1}{2}(p+2)(p-1)-\frac{p+1}{2}+1\right\}(p+2)=\frac{1}{2}p^3+p^2-\frac{1}{2}p-1.$$

$$S(p^{2k})-S((p+2)^k)=(p^3-p)-\left(\frac{1}{2}p^3+p^2-\frac{1}{2}p-1\right)=\frac{1}{2}p^3-p^2-\frac{1}{2}p+1.$$

下来需要证明当 $p\geqslant 5$ 时, $\frac{1}{2}p^3-p^2-\frac{1}{2}p+1>0$. 令函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2-\frac{1}{2}x+1$, 则

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{1}{2},$$

它的对称轴为 $x=5$, 而 $f'(5)=\frac{3}{2}5^2-2\times5-\frac{1}{2}=27>0$, 所以 $f'(x)\geqslant f'(5)>0$, 因此 $f(x)$ 在 $[5,+\infty]$ 上严格单调递增. 由于 $f(5)=\frac{1}{2}\times5^3-5^2-\frac{5}{2}+1=36>0$, 所以 $f(x)>0$ 在 $[5,+\infty]$ 上恒成立. 我们知道, 当 $p\geqslant5$ 时, $\frac{1}{2}p^3-p^2-\frac{1}{2}p+1>0$, 即

$$S(p^{2k})-S((p+2)^k)>0,$$

从而 $S(p^{2k})>S((p+2)^k)$. 由此,

$$S(p^{2k}(p+2)^k)=S(p^{2k})=p^3-p=p(p-1)(p+1).$$

当 $n=p^2(p+2)$ 时, $\varphi(n)=p(p-1)(p+2-1)=p(p-1)(p+1)$. 所以, $S(n^k)=\varphi(n)$. 而当 $n=2p^2(p+2)$ 时,

$$S(n)=\max\{S(2),S(p^{2k}),S((p+2)^k)\}=S\left(p^{2k}\right)=p\,(p-1)\,(p+1)\,,$$
$$\varphi(n)=(2-1)\,p\,(p-1)\,(p+2-1)=p\,(p-1)\,(p+1)\,.$$

则有, $S\left(n^k\right)=\varphi(n)$. 定理1证毕.

接着证明定理2. 如果 $2k+1$ 为素数, 当 $n=(2k+1)^2$ 时,

$$S(((2k+1)^2)^k)=2k\times(2k+1)\,,$$
$$\varphi((2k+1)^2)=(2k+1)(2k+1-1)=2k(2k+1),$$

故 $S(((2k+1)^2)^k)=\varphi((2k+1)^2)$. 因此 $2k+1$ 为素数时, $n=(2k+1)^2$ 是方程 $S(n^k)=\varphi(n)$ 的解.

当 $n=2\times(2k+1)^2$ 时,

$$S((2\times(2k+1)^2)^k)=\max\{S(2^k),S((2k+1)^{2k})\}=2k(2k+1),$$
$$\varphi(2\times(2k+1)^2)=2k\,(2k+1)\,,$$

故 $S((2\times(2k+1)^2)^k)=\varphi((2k+1)^2)$. 因此 $2k+1$ 为素数时, $n=2\times(2k+1)^2$ 是方程 $S(n^k)=\varphi(n)$ 的解.

综上所述, 当 $2k+1$ 为素数时, $n=(2k+1)^2$ 及 $n=2\times(2k+1)^2$ 是方程 $S\left(n^k\right)=\varphi(n)$ 的解. 定理2得证.

最后证明定理3. 由文献 [11,12], 可以得到, 当 $1\leqslant k\leqslant3$ 时, $n=2^{k+1}\times3$ 是方程 $S\left(n^k\right)=\varphi(n)$ 的解. 下面证明: 当 $k\geqslant4$ 时, $n=2^{k+1}\times3$ 不是方程 $S\left(n^k\right)=\varphi(n)$ 的解.

当 $k\geqslant4$, $n=2^{k+1}\times3$ 时, $\varphi(n)=2^{k+1}$,

$$S(n^k)=\max\{S(2^{k(k+1)}),S(3^k)\}=S(2^{k(k+1)}).$$

由引理1.2可知

$$S(2^{k(k+1)})\leqslant(2-1)\,[k\,(k+1)+1+\log_2k\,(k+1)]+1$$
$$\leqslant k\,(k+1)+\log_2k\,(k+1)+2.$$

故 $\varphi(n)-S(n)\geqslant2^{k+1}-\{k\,(k+1)+\log_2k\,(k+1)+2\}$.

作函数 $f(x)=2^{x+1}-\{x(x+1)+\log_2 x(x+1)+2\}$, 则

$$f'(x)=2^{x+1}\ln 2-2x-1-\frac{2x+1}{x(x+1)\ln 2}.$$

当 $x\geqslant 4$ 时, $0<\frac{2x+1}{x(x+1)\ln 2}<1$, 所以 $f'(x)>2^{x+1}\ln 2-2x-2>0$, $f(x)$ 为单调递增函数. 又 $f(4)=2^5-(4\times 5+\log_2 4\times 5+2)=8-\log_2 5>0$, 所以 $x\geqslant 4$ 时, $f(x)>0$ 恒成立. 故当 $k\geqslant 4$ 时, $2^{k+1}-\{k(k+1)+\log_2 k(k+1)+2\}>0$. 即当 $k\geqslant 4$, $n=2^{k+1}\times 3$ 时, $\varphi(n)-S(n^k)>0$.

因此 $k\geqslant 4$, $n=2^{k+1}\times 3$ 不是方程 $S(n^k)=\varphi(n)$ 的解. 这就完成了定理3的证明.

[参 考 文 献]

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solution [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2003.
PAN C D, PAN C B. Elementary Number Theory [M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2003.
[3] MURTHY A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.
[4] LE Maohua. An Equation concerning the Smarandache LCM Function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-18.
[5] FU Jing. An Equation Involving the Smarandache Function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(4): 83-86.
[6] MA Jinping. An equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 89-90.
[7] ZHAO Yanlin. Some divisibility of Smarandache numerical carpet [J]. Scientia Magna, 2008, 4(3): 29-32.
[8] REN Zhibin. On the equation involving the Smarandache reciprocal function and its positive integer solutions [J]. Scientia Magna, 2008, 4(1): 23-25.
[9] WU Qibin. A conjecture involing the F.Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 26-28.
[10] APOSTOL T. M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York, Spring: Verlag, 1976.
[11] MA Jinping, An equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 89-90.
[12] 易媛, 亢小玉. Smarandache问题研究[M]. [S.L.] High American Press, 2006: 99-100.
YI Y, KANG X Y. Smarandache Problems Research [M]. [S.L.] High American Press, 2006: 99-100.
[13] MARK Farris. Patrick Mitshell, Bounding the Smarandache function [J]. Smrandache Notions Journal, 2002, 13(1): 37-42.

(上接第43页)

[6] 徐保根. 关于图的符号边控制数[J]. 华东交通大学学报, 2003, 20(2): 102-105.
XU B G. On signed edge domination in graphs[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2003, 20(2): 102-105.
[7] 徐保根. 关于图的符号边控制数的下界[J]. 华东交通大学学报, 2004, 21(1): 110-113.
XU B G. On the lower bounds of signed edge domination numbers in graphs[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2004, 21(1): 110-113.