第 10卷 第 19期 2010年 7月
1671-1815(2010)19-4725-04
科学技术与工程
Science Technology and Engineering
Vol.10 No.19 July 2010
© 2010 Sci.Tech.Engng.

研究简报

数 学

关于 Smarandache问题中相差 5个数组成反关联数列的研究

杨倩丽
(渭南师范学院数学与信息科学系,渭南 714000)

摘 要 给出了 Smarandache问题中相差 5 个数组成反关联数列的定义。通过猜想、归纳、递推的办法,得到了此数列的通项表达式以及几 个相关的性质。

关键词 Smarandache问题 反关联数列 算术性质
中图法分类号 O156; 文献标志码 A

1 引言与主要结论

1993年,美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache以《only prombles, not solutions!》[1]一书中提出了初等数论及集合论中 105个未解决的问提,其中第 20问提是讨论置换序列的性质。Mihaly Bencze和 Lucian Tutescu教授在[2]中的问题 4再次提出具体的逆序排列的偶数数列 $\{b_n\}$,定义 $\{b_n\}$为:2, 42, 642, 8642, 108642, 12108642, 1412108642, 161412108642, 18161412108642, …。作者在文献[3]中的解决了 Smarandache问题中逆序排列的偶数数列的相关问题及其性质,得出了递推公式、通项的精确表达式、偶数数列$\{b_n\}$的前 50项之和的精确公式。现在进一步推广逆序排列的偶数数列 $\{b_n\}$,研究 Smarandache逆序排列相差 5个数数列的算术性质,即数列 $\{b_n\}$定义为:1, 61, 1161, 161161, 21161161, 2621161161, 312621161161, 36312621161161, 4136312621161161, …。现给出了它的递推公式、通项的精确表达式以及几个相关的性质等。

定理 1 假设当 $n\geqslant 2$时,任意的正整数 $(5n-9)$有 k位数.那么对于 Smarandache

从 1开始每相差 5个数组成反关联数列 $\{b_n\}$,我们有如下的递推公式

$$b_n=b_{n-1}+(5n-4)\times 10^{\frac{10-10^k}{45}+k\times(n-1)}。$$

这里 $b_1=1$。

定理 2 若 $(5n-9)$有 k位数,那么 Smarandache问题中从 1开始每相差 5个数组成反关联数列 $\{b_n\}$中的第 b_{n-1}项有 $\left[\frac{10-10^k}{45}+k\times(n-1)\right]$ 位数.

定理 3 假设 $S_{k(m,n)}=\sum_{i=m}^{n}(5i-4)\times 10^{k(i-1)}$,那么将得到通项的精确表达式,即

$$b_n=1+S_{1(2,3)}+10^{-2}\times S_{2(4,21)}+10^{-22}\times S_{3(22,201)}$$

2010年 4月 9日收到 国家自然科学基金项目(10271093)、陕西省自然科学基金项目(SJ08A22)资助
作者简介:杨倩丽(1964—),女,陕西大荔人,教授,研究方向:数论。

$+\dots+10^{\substack{-(k-1)\\ -2\dots 2}}\times S_{k(m,n)}$。

定理 **4** 若 S_{50}表示 Smarandache问题中相差 5 个数组成反关联数列$\{b_n\}$的前 50项之和, 那么

$$S_{50}=\frac{246\times 48^2\times 10^3-50}{9}+\frac{2440-234\times 10^3}{9^2}+\frac{10^3-10^4}{9^3}+\frac{246\times 30^2\times 10^{40}-16\times 47\times 10^4}{99}+\frac{214\times 10^6-54\times 10^4}{99^2}+\frac{10^9-10^{41}}{99^3}+\frac{246\times 10^{128}-106\times 29\times 10^{41}}{999}+\frac{236\times 10^{128}-34\times 10^{144}}{999^2}+\frac{10^{48}-10^{129}}{999^3}。$$

2 引理及其证明

为了完成定理的证明, 先给出几个引理, 并予证明。

引理 **1** 设 k、m、n为正整数, 并且 $m\leqslant n$, 则

$$S_{k(m,n)}=\frac{(5m-4)\times 10^{k(m-1)}}{1-10^k}+5\times\frac{10^{km}[1-10^{k(n-m)}]}{(1-10^k)^2}-\frac{(5n-4)\times 10^{kn}}{1-10^k}。$$

证明 由 $S_{k(m,n)}$的定义, 可知

$$S_{k(m,n)}=\sum_{i=m}^{n}(5i-4)\times 10^{k(i-1)}=(5m-4)\times 10^{k(m-1)}+(5m+1)\times 10^{km}+\dots+(5n-4)\times 10^{k(n-1)}。$$

从而 $10^k S_{k(m,n)}=(5m-4)\times 10^{km}+(5m+1)\times 10^{k(m+1)}+\dots+(5n-4)\times 10^{kn}$。

因此可得 $(1-10^K)S_{k(m,n)}=(5m-4)\times 10^{k(m-1)}+5\times[10^{km}+10^{k(m+1)}+\dots+10^{k(n-1)}]-(5n-4)\times 10^{kn}$。

所以 $$S_{k(m,n)}=\frac{(5m-4)\times 10^{k(m-1)}}{1-10^k}+5\times\frac{10^{km}[1-10^{k(n-m)}]}{(1-10^k)^2}-\frac{(5n-4)\times 10^{kn}}{1-10^k}。$$

这就证明了引理 1。

引理 **2**[4] 假设 $S'_{k(m,n)}=\sum_{i=m}^{n}i^2\times 10^{-ki}$. 那么对于任意的正整数 k、m、n有

$$S'_{k(m,n)}=\frac{m^2\times 10^{-km}}{1-10^{-k}}+\frac{(2m+1)\times 10^{-k(m+1)}}{(1-10^{-k})^2}\times 2\times\frac{10^{-k(m+2)}[1-10^{-k(n-m-1)}]}{(1-10^{-k})^3}-\frac{(2n-1)\times 10^{-k(n+1)}}{(1-10^{-k})^2}-\frac{n^2\times 10^{-k(n+1)}}{1-10^{-k}}。$$

引理 **3**[4] 假设 $S'_{k(m,n)}=\sum_{i=m}^{n}i^2\times 10^{-ki}$, 那么对于任意的正整数 k、m、n有

$$S'_{k(m,n)}=\frac{m^2\times 10^{-km}}{1-10^{-k}}+\frac{10^{-k(m+1)}[1-10^{-k(n-m)}]}{(1-10^{-k})^2}-\frac{n\times 10^{-k(n+1)}}{1-10^{-k}}。$$

3 定理的证明

有了以上引理, 我们可以证明定理

3.1 首先采用数学归纳法证明定理 1

证明 (1)当 $n=2$, 3时, 定理 1显然成立;

(2)假设当 $n=m$时, 定理 1成立, 即

$$b_m=b_{m-1}+(5m-4)\times 10^{\frac{10-10^k}{45}+k\times(m-1)}。$$

比较 b_m与 b_{m-1}可知, b_{m-1}有 $\left[\frac{10-10^k}{45}+k(m-1)\right]$位数。

如果 $n=m+1$, 我们可分为两种情况来讨论:

(i)如果 $(5m-4)$仍有 k位数, 那么 b_m就有 $\left[\frac{10-10^k}{45}+k(m-1)+k\right]$位数, 比较 b_{m+1}与 b_m, 立即可得

$$\frac{b_{m+1}-b_m}{5m+1}=10^{\frac{10-10^k}{45}}+k\times(m-1)+k,$$

即 $b_{m+1}=b_m+(5m+1)\times 10^{\frac{10-10^k}{45}+k\times m}$。

(ii)如果 $(5m-9)$仍有 $(k+1)$位数, 那么 b_m就有 $[\frac{10-10^k}{45}+k(m-1)+k+1]$位数, 考虑到 $(5m-6)$有 k位数, $(5m-4)$有 $(k+1)$位数, 因此仅存在一种情况, 那就是

$5m-9=10^k-4$，$5m-4=10^k+1$。

即 $m=\frac{10^k}{5}+1$。因此，有

$$\frac{10-10^k}{45}+k\times(m-1)+(k+1)=\frac{10-10^k}{45}+k\times\frac{10^k}{5}+(k+1)=\frac{10-10^{k+1}}{45}+(k+1)\times m。$$

比较 b_{m+1} 与 b_m 的不同，可推断

$$\frac{b_{m+1}-b_m}{5m+1}=10^{\frac{10-10^k}{45}+k\times(m-1)+(k+1)}=10^{\frac{10-10^{k+1}}{45}+(k+1)\times m}。$$

即 $b_{m+1}=b_m+(5m+1)\times 10^{\frac{10-10^{k+1}}{45}+(k+1)\times m}$。

结合(i)(ii)可知，对于任意的正整数 n，定理 1 恒成立。

3.2 利用定理 1的结论

注意到 b_n 与 b_{n-1} 的不同，立即可得定理 2。

3.3 根据定理 1的结论

可推出定理 3

由定理 1可知，$(5n-9)$有 k位数，我们假设 $(5m-9)$是最小的一个有 k位数的正整数(当 $k=1$ 时，$m=2$；并且 $m=10^{k-1}+1$)，那么

$$b_n=1+(5\times2-4)\times10^{\frac{10-10^1}{45}+1\times(2-1)}+(5\times3-4)\times10^{\frac{10-10^1}{45}+1\times(3-1)}+(5\times4-4)\times10^{\frac{10-10^2}{45}+2\times(4-1)}+\dots+(5\times21-4)\times10^{\frac{10-10^2}{45}+2\times(21-1)}+(5\times22-4)\times10^{\frac{10-10^3}{45}+3\times(22-1)}+\dots+(5\times201-4)\times10^{\frac{10-10^3}{45}+3\times(201-1)}+(5\times202-4)\times10^{\frac{10-10^4}{45}+4\times(202-1)}+\dots+(5\times2001-4)\times10^{\frac{10-10^4}{45}+4\times(2001-1)}+(5\times2\,002-4)\times10^{\frac{10-10^5}{45}+5\times(2002-1)}+\dots+(5\times m-4)\times10^{\frac{10-10^k}{45}+k\times(m-1)}+\dots+(5\times n-4)\times10^{\frac{10-10^k}{45}+k\times(n-1)}=1+10^{\frac{10-10^1}{45}}\times S_{1(2,3)}+10^{\frac{10-10^2}{45}}\times S_{2(4,21)}+10^{\frac{10-10^3}{45}}\times S_{3(22,201)}+10^{\frac{10-10^4}{45}}\times S_{4(202,2001)}+\dots+10^{\frac{10-10^k}{45}}\times S_{k(m,n)}=1+S_{1(2,3)}+10^{-2}\times S_{2(4,21)}+10^{-22}\times S_{3(22,201)}+10^{-222}\times S_{4(202,2001)}+\dots+10^{-\overset{(k-1)}{2\cdots2}}\times S_{k(m,n)}。$$

3.4 证明定理 4

根据定理 1，有

$$S_{50}=b_1+b_2+b_3+\dots+b_{49}+b_{50}=50\times1+49\times(5\times2-4)\times10^{\frac{10-10^1}{45}+1\times(2-1)}+48\times(5\times3-4)\times10^{\frac{10-10^1}{45}+1\times(3-1)}+47\times(5\times4-4)\times10^{\frac{10-10^2}{45}+2\times(4-1)}+\dots+30\times(5\times21-4)\times10^{\frac{10-10^2}{45}+2\times(21-1)}+29\times(5\times22-4)\times10^{\frac{10-10^3}{45}+3\times(22-1)}+\dots+2\times(5\times49-4)\times10^{\frac{10-10^3}{45}+3\times(49-1)}+1\times(5\times50-4)\times10^{\frac{10-10^3}{45}+3\times(50-1)}=251\times10^{50}\times\sum_{i=48}^{50}i\times10^{-i}+251\times10^{98}\times\sum_{i=30}^{47}i\times10^{-2i}+251\times10^{128}\times\sum_{i=1}^{29}i\times10^{-3i}-5\times10^{50}\times\sum_{i=48}^{50}i^2\times10^{-i}-5\times10^{98}\times\sum_{i=30}^{47}i^2\times10^{-2i}-5\times10^{128}\times\sum_{i=1}^{29}i^2\times10^{-3i}。$$

根据引理 2与引理 3的结论，我们可得到

$$S_{50}=\frac{246\times48^2\times10^3-50}{9}+\frac{2440-234\times10^3}{9^2}+\frac{10^3-10^4}{9^3}+\frac{246\times30^2\times10^{40}-16\times47\times10^4}{99}+\frac{214\times10^6-54\times10^4}{99^2}+\frac{10^9-10^{41}}{99^3}+\frac{246\times10^{128}-106\times29\times10^{41}}{999}+\frac{236\times10^{128}-34\times10^{144}}{999^2}+\frac{10^{48}-10^{129}}{999^3}。$$

这就证明了定理 4。

参 考 文 献

1 Smarandache F. Only problems, not solutions. Chicago: Xiquan Publ House, 1993: 22-26

2 Bencze M, Tutescu T. Some notions and questions in number theory. Vol 2. http://www.gallup.unm.edu/smarandache/SNAQINT2.TXT, 2006-2

3 杨倩丽, 李　云. 关于 Smarandache问题中逆序排列的偶数数列的性质. 纯粹数学与应用数学, 2006; (3) 325-329

4 易　媛, 亢小玉. Smarandache反关联奇序列. Smarandache问题研究. High American Press, 2006; 64-70

(下转第 4739页)

Existence of Solution for a Boundary Value Problem of Fractional Order

TIAN Cong-cong, ZHANG Mei, LIU Yan-sheng
(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[Abstract] The existence of one solution for a boundary value problem of fractional order is considered, involving $\alpha \in (3, 4]$,

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \\ u''(1) = 0, \quad u'''(1) = g(u(1)) \end{cases}$$

by using the Schauder fixed point theorem.

[Key words] boundary value problem Caputo derivative Schauder fixed point theorem

(上接第 4727页)

On the Smarandache Back Concatenated Sequence with Common Difference 5

YANG Qian-li
(Department of Mathematics and Science, Weinan Teachers University, Weinan 714000, P. R. China)

[Abstract] The definition of Smarandache back concatenated sequence with common difference 5 is firstly given. By methods of guess, induction are and recursion, the recurrence formula, coherent expression formula of this sequence and several relevant properties are obtained.

[Key words] Smarandache question Smarandache back concatenated sequence arithmetical properties

(上接第 4729页)

Cycle Extensibility and Degree Sums in Graphs

LIU Chun-fang, TENG Yan, XU Xin-sheng
(Department of Mathematics and Information Science, Binzhou University, Binzhou 256603, P. R. China;
School of Mathematical Sciences, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[Abstract] The relations between degree sums and extending paths in graphs are studied. The following results is proved. Let G is a graph of order n. If $d(u) + d(v) \geqslant n+2$ for any distinct vertices u, v in $V(G)$, then G is path extendable.

[Key words] degree of vertex extending path graph graph