第44卷2008年第3期 Vol 44 2008 No 3

关于 m 次幂部分数列与 Smarandache ceil 函数的均值

冯 强, 郭金保, 王荣波
(延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘 要: 利用解析方法研究正整数 n 的 m 次幂部分数列与 k 阶 Smarandache ceil 函数的均值分布性质, 得到了几个较为精确的渐近公式.

关键词: m 次幂部分数列; Smarandache ceil 函数; 均值; 渐进公式
中图分类号: O 156.4 文献标识码: A 文章编号: 1001-988X(2008)03-0012-05

On the mean values of m-th power part and Smarandache ceil function

FENG Qiang, GUO Jin-bao, WANG Rong-bo
(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi, China)

Abstract: The mean value distribution properties of the m-th power part and Smarandache ceil function are studied, and some sharped asymptotic formulas of this two functions are given by using Perron's formula and analytic methods.

Key words: m-th power part; Smarandache ceil function; mean value; asymptotic formula

设 n 为正整数, 对任意的自然数 i, n 的 m 次幂部分定义如下:

$$a_m(n)=\max\{i^m: i\in \mathbb{N}, i^m\leqslant n\},\quad b_m(n)=\min\{i^m: i\in \mathbb{N}, i^m\geqslant n\},$$

其中 $a_m(n)$ 与 $b_m(n)$ 分别是下部 m 次幂部分与上部 m 次幂部分. 例如, 当 $m=2$ 时,

$$a_2(1)=a_2(2)=a_2(3)=1;\ a_2(4)=a_2(5)=\cdots=a_2(8)=4;\ a_2(9)=\cdots=a_2(15)=9,\cdots$$

$$b_2(1)=1;\ b_2(2)=b_2(3)=b_2(4)=4;\ b_2(5)=\cdots=b_2(9)=9;\ b_2(10)=\cdots=b_2(16)=16,\cdots$$

对于给定的正整数 k, 著名的 k 阶 Smarandache ceil 函数定义为:

$$S_k(n)=\min\{x\in \mathbb{N}: n\mid x^k\},\quad \forall x\in \mathbb{N}^*.$$

如 $S_2(2)=2, S_2(3)=3, S_2(4)=2, S_2(5)=5, S_2(6)=6, S_2(7)=7, S_2(8)=4, S_2(9)=3, \cdots$. Smarandache 教授在文献[1]中提出的这两个函数已引起了许多学者的浓厚兴趣, 并对之进行了研究[2-5]. 本文主要利用解析的方法来研究正整数 n 的 m 次幂部分数列与 k 阶 Smarandache ceil 函数的均值分布性质, 得出了几个较为精确的渐近公式.

本文未加特别说明的概念与符号详见文献[6,7].

1 预备知识

引理 1 对任意实数 $x\geqslant 1$, $n, m, k, t\in \mathbb{N}$; $m, t\geqslant 2$ 使得 $k=tm+1$ 时, 有

收稿日期: 2008-03-15; 修改稿收到日期: 2008-03-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271093); 陕西省自然科学基金资助项目(2004A09)
作者简介: 冯强(1975—), 男, 陕西神木人, 讲师, 硕士. 主要研究方向为解析数论.
E-mail: fqtongxingzhen@163.com

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(n^m) = \frac{x^2}{2}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+2)\times$$
$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(x^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\right).$$

证明　对任意复数 $s(\mathrm{Re}\, s>2)$，设

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k(n^m)}{n^s},$$

则由 Euler 积公式[6] 可得

$$f(s)=\prod_p\left(1+\frac{S_k(p^m)}{p^s}+\frac{S_k(p^{2m})}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k(p^{nm})}{p^{ns}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}+\cdots+\frac{p}{p^{ts}}+\cdots+\frac{p^m}{p^{((m-1)t+1)s}}+\cdots+\frac{p^m}{p^{(mt+1)s}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{1-\frac{1}{p^{ts}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{p}{p^s}+\frac{p^2}{p^{(t+1)s}}+\cdots+\frac{p^{m-1}}{p^{((m-2)t+1)s}}\right)+\frac{1-\frac{1}{p^{(t+1)s}}}{1-\frac{1}{p^s}}\frac{p^m}{p^{((m-1)t+1)s}}+\right.$$

$$\frac{1-\frac{1}{p^{ts}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{p^{m+1}}{p^{(mt+2)s}}+\frac{p^{m+2}}{p^{((m+1)t+2)s}}+\cdots+\frac{p^{2m-1}}{p^{(2(m-1)t+2)s}}\right)+\frac{1-\frac{1}{p^{(t+1)s}}}{1-\frac{1}{p^s}}\frac{p^{2m}}{p^{((2m-1)t+2)s}}+$$

$$\left.\frac{1-\frac{1}{p^{ts}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{p^{2m+1}}{p^{(2mt+3)s}}+\frac{p^{2m+2}}{p^{((2m+1)t+3)s}}+\cdots+\frac{p^{3m-1}}{p^{((3m-2)t+3)s}}\right)+\frac{1-\frac{1}{p^{(t+1)s}}}{1-\frac{1}{p^s}}\frac{p^{3m}}{p^{((3m-1)t+3)s}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{1-\frac{1}{p^{ts}}}{1-\frac{1}{p^s}}\,\frac{1-\frac{p^{m-1}}{p^{(m-1)ts}}}{1-\frac{p}{p^{ts}}}\left(\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}\frac{p^m}{p^{mts}}+\frac{p}{p^{3s}}\frac{p^{2m}}{p^{2mts}}+\cdots\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1-\frac{1}{p^{(t+1)s}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{p}{p^s}\frac{p^{m-1}}{p^{(m-1)ts}}+\frac{p}{p^{2s}}\frac{p^{2m-1}}{p^{(2m-1)ts}}+\frac{p}{p^{3s}}\frac{p^{3m-1}}{p^{(3m-1)ts}}+\cdots\right)\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{1-\frac{1}{p^{ts}}}{1-\frac{1}{p^s}}\,\frac{1-\frac{p^{m-1}}{p^{(m-1)ts}}}{1-\frac{p}{p^{ts}}}\,\frac{\frac{p}{p^s}}{1-\frac{p^m}{p^{(mt+1)s}}}+\frac{1-\frac{1}{p^{(t+1)s}}}{1-\frac{1}{p^s}}\,\frac{\frac{p^m}{p^{((m-1)t+1)s}}}{1-\frac{p^m}{p^{(mt+1)s}}}\right)=$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(ts-1)\zeta((mt+1)s-m)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}\prod_p\left(1-\frac{1+\frac{p}{p^{(t-1)s}}+\frac{p^{m+1}}{p^{mts}}-\frac{p^{m+1}}{p^{(m+1)ts}}}{p+p^s}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann Zeta 函数．$f(s)=\frac{x^s}{s}$ 在 $s=2$ 处有一阶极点，留数为

$$\frac{x^2}{2}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+2)\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right).$$

在 Perron 公式[7] 中取 $b=\frac{5}{2}+\varepsilon$，$T\geqslant 2$，可得

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(n^m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{5}{2}+\varepsilon+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}{T}\right).$$

将上式积分限移至 $\mathrm{Re}s=\frac{3}{2}+\varepsilon$ 处，并取 $T=x$ 可得

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(n^m)=\frac{x^2}{2}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+2)\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+$$
$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{5}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}+\int_{\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}+\int_{\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}^{\frac{5}{2}+\varepsilon+iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}ds.$$

容易估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\ll\int_0^T\left|f\left(\frac{3}{2}+\varepsilon+it\right)\right|\frac{x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}{1+|t|}dt\ll x^{\frac{5}{3}+\varepsilon},$$
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{5}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}+\int_{\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}^{\frac{5}{2}+\varepsilon+iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\ll\int_{\frac{3}{2}+\varepsilon}^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\left|f(\sigma+iT)\frac{x^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}{T}\right|d\sigma\ll\frac{x^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}{T}=x^{\frac{5}{3}+\varepsilon},$$

从而

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(n^m)=\frac{x^2}{2}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+2)\times$$
$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(x^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\right).$$

这就完成了引理1的证明. 】

引理2 对任意实数 $x\geqslant1$, $n,m,k,t\in\mathbf{N}$; $m,t\geqslant2$ 使得 $k=2t+1$ 时，有

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(n^2)=\frac{x^2}{2}\zeta(4t)\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-1}}+\frac{1}{p^{2(t-1)}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

证明 对任意复数 $s(\mathrm{Re}s>2)$，设

$$f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k(n^2)}{n^s},$$

则由 Euler 积公式[6]可得

$$f_1(s)=\prod_p\left(1+\frac{S_k(p^2)}{p^s}+\frac{S_k(p^4)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k(p^{2n})}{p^{ns}}+\cdots\right)=$$
$$\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}+\cdots+\frac{p}{p^{ts}}+\cdots+\frac{p^2}{p^{(t+1)s}}+\cdots+\frac{p^2}{p^{(2t+1)s}}+\cdots\right)=$$
$$\prod_p\left(1+p\frac{\frac{1}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^{ts}}\right)}{1-\frac{1}{p^s}}+p^2\frac{\frac{1}{p^{(t+1)s}}\left(1-\frac{1}{p^{(t+1)s}}\right)}{1-\frac{1}{p^s}}+p^3\frac{\frac{1}{p^{2(t+1)s}}\left(1-\frac{1}{p^{ts}}\right)}{1-\frac{1}{p^s}}+\cdots\right)=$$
$$\prod_p\left(1+\frac{1-\frac{1}{p^{ts}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{p}{p^s}+\frac{p^3}{p^{2(t+1)s}}+\cdots\right)+\frac{1-\frac{1}{p^{(t+1)s}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{p^2}{p^{(t+1)s}}+\frac{p^4}{p^{(3t+2)s}}+\cdots\right)\right)=$$
$$\zeta(s)\zeta((2t+1)s-2)\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}+\frac{p^2-p}{p^{(t+1)s}}-\frac{1}{p^s}-\frac{p^2}{p^{(2t+1)s}}\right)=$$
$$\frac{\zeta(s)\zeta((2t+1)s-2)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}\prod_p\left(1-\frac{1}{p+p^s}\left(1+\frac{p-p^2}{p^{ts}}+\frac{p^2}{p^{2ts}}\right)\right).$$

而 $f_1(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s=2$ 处有一阶极点，留数为

$$\frac{x^2}{2}\zeta(4t)\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-1}}+\frac{1}{p^{2(t-1)}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right).$$

由引理 1 的方法立即可得

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(n^2)=\frac{x^2}{2}\zeta(4t)\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-1}}+\frac{1}{p^{2(t-1)}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

这就完成了引理 2 的证明. 】

2　主要结论

本文的主要结论是下面的 4 个定理.

定理 1　对任意实数 $x\geqslant 1, n, m, k, t\in\mathbf{N}$; $m, t\geqslant 2$ 使得 $k=tm+1$ 时，有

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a_m(n))=\frac{m}{m+1}x^{1+\frac{1}{m}}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+2)\times$$
$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(x^{1+\frac{1}{2m}+\varepsilon}\right).$$

证明　对任意实数 $x\geqslant 1$，存在正整数 M，使得 $M^m\leqslant x<(M+1)^m$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}S_k(a_m(n))&=\sum_{l=2}^{M}\sum_{(l-1)^m\leqslant n<l^m}S_k(a_m(n))+\sum_{M^m\leqslant n<x}S_k(a_m(n))=\\&\sum_{l=1}^{M-1}\sum_{l^m\leqslant n<(l+1)^m}S_k(l^m)+\sum_{M^m\leqslant n<x}S_k(a_m(n))=\\&\sum_{l=1}^{M-1}((l+1)^m-l^m)S_k(l^m)+O\left(\sum_{M^m\leqslant n\leqslant x<(M+1)^m}S_k(M^m)\right)=\\&\sum_{l=1}^{M-1}\left(\sum_{j=1}^{m}C_m^{\,j}l^{m-j}\right)S_k(l^m)+O\left(\sum_{M^m\leqslant n\leqslant x<(M+1)^m}S_k(M^m)\right)=\\&m\sum_{l=1}^{M}l^{m-1}S_k(l^m)+O(M^{m+1-\varepsilon}).\end{aligned}\qquad(1)$$

令 $A(x)=\sum_{n\leqslant x}S_k(n^m), f(x)=x^{m-1}$，利用阿贝尔恒等式[6] 及引理 1，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{l\leqslant M}l^{m-1}S_k(l^m)&=A(M)f(M)-\int_1^M A(t)f'(t)\mathrm{d}t+O(1)=\\&M^{m-1}\left\{\frac{M^2}{2}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+2)\times\right.\\&\left.\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(M^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\right)\right\}-\\&(m-1)\int_1^M t^{m-2}\left\{\frac{t^2}{2}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+1)\times\right.\\&\left.\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(t^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\right)\right\}\mathrm{d}t=\\&\frac{M^{m+1}}{m+1}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+2)\times\\&\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(M^{m+\frac{2}{3}+\varepsilon}\right).\end{aligned}\qquad(2)$$

又因为

$$0\leqslant x-M^m<(M+1)^m-M^m=M^{m-1}\left(m+C_m^{\,2}\frac{1}{M}+\cdots+\frac{1}{M^{m-1}}\right)\ll x^{\frac{m-1}{m}},\qquad(3)$$

结合(1)~(3)式，则有

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a_m(n))=\frac{m}{m+1}x^{1+\frac{1}{m}}\zeta(2t-1)\zeta((2t-1)m+2)\times$$
$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-3}}+\frac{1}{p^{(2t-1)m-1}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(x^{1+\frac{2}{3m}+\varepsilon}\right).$$

定理1得证.　】

定理2　对任意实数 $x\geqslant1$, $n, m, k, t\in\mathbf{N}$; $m=2$, $t\geqslant2$ 使得 $k=2t+1$ 时，有

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a_m(n))=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\zeta(4t)\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2t-1}}+\frac{1}{p^{2(t-1)}}\left(1-\frac{1}{p^{2t}}\right)\right)\right)+O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right).$$

定理3　对任意实数 $x\geqslant1$, $n, m, k, t\in\mathbf{N}$; $m, t\geqslant2$ 使得 $k=tm$ 时，有

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a_m(n))=\frac{m}{m+1}x^{1+\frac{1}{m}}\zeta(2t-1)\prod_p\left(1-\frac{p^{2t}+p^3}{p^{2t+2}+p^{2t+1}}\right)+O\left(x^{1+\frac{1}{2m}+\varepsilon}\right).$$

定理4　对任意实数 $x\geqslant1$, $n, m, k, t\in\mathbf{N}$; $m, t\geqslant2$ 使得 $m=kt$ 时，有

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a_m(n))=\frac{m}{m+t}x^{1+\frac{t}{m}}+O\left(x^{1+\frac{t}{2m}+\varepsilon}\right).$$

定理2~4的证明与定理1类似，本文从略.

3　小结

本文主要讨论了正整数 n 的 m 次幂部分数列与 k 阶Smarandache ceil函数的均值分布性质，结论的复杂性关键在于引理1,2．在引理1,2中，我们只讨论了以下2种情形：(1) $k=tm+1$；(2) $k=2t+1$．类似于引理1,2，我们可以讨论下列两种情形：(3) $k|m$；(4) $m|k$．在以上4种情形之下，$\sum_{n\leqslant x}S_k(n^m)$ 的值的分布是有规律的；而当 $k=tm+j$，$2\leqslant j<m-1$ 时，$\sum_{n\leqslant x}S_k(n^m)$ 的值的分布规律不稳定，至少笔者目前还没有找到合适的求解方法，留待日后进一步研究.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. *Only Problems, Not Solutions*[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] 张文鹏. 关于正整数的立方部分数列[J]. 咸阳师范学院学报, 2003, **18**(4): 5-7.
[3] ZHANG Jian. On the inferior and superior cube part of a positive integer function[J]. *Pure and Applied Mathematics*, 2003, **19**(3): 234-236.
[4] IBSTEDT. *Surfing on the Ocean of Numbers: a few Smarandache Notions and Similar Topics*[M]. New Mexico: Erhus University Press, 1997.
[5] SABIN T, TATIANA T. Some new results concerning the Smarandache ceil function[J]. *Smarandache Notions Journal*, 2002, **13**(1-3): 30-36.
[6] APOSTOL T. *Introduction to Analytic Number Theory*[M]. New York: Springer Verlag, 1976.
[7] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

(责任编辑　马宇鸿)