研　　究

关于一个 F. Smarandache问题

高　静[1]，刘华宁[2]

(1. 西安交通大学 理学院，陕西 西安　710049)
(2. 西北大学 数学系，陕西 西安　710069)

摘要：　令 $a(n)$ 表示正整数 n 的十进制表示中的各位数字之积，$f(n)$ 为任意完全积性函数 .对正整数 $x \geq 2$，令 $A(x) = \sum_{n<x} f(a(n))$. 本文的主要目的是给出 $A(x)$ 的一个精确的计算公式.

关键词：　F. Smarandache问题；位数码；完全积性函数；计算公式

1　引言及结论

用 $a(n)$ 表示正整数 n 的十进制表示式中的位数码之积，例如，$a(0) = 0, a(1) = 1, a(2) = 2, \cdots, a(20) = 0, a(21) = 2, \cdots$. 在文献 [1]的问题 22中，F. Smarandache提出了研究此数列的性质. 关于这个问题，似乎没有人研究过，至少没有见到相关的论文. 对正整数 $x \geq 2$和完全积性函数 $f(n)$，记

$$A(x) = \sum_{n<x} f(a(n)).$$

本文的主要目的是推导出 $A(x)$ 的一个精确的计算公式，即就是证明下面的 .

定理　对任意正整数 x，设它在十进制中的表示式为 $x = a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$，其中 $1 \leq a_s \leq 9, 0 \leq a_i \leq 9, i = 0, 1, \cdots, s-1$. 则有恒等式

$$A(x) = \sum_{i=0}^{s} f\left(\prod_{j=i+1}^{s} a_j\right) \cdot F(a_i) \cdot F^i(10) + \frac{F^{s+1}(10) - F(10)}{F(10) - 1},$$

其中 $F(N) = \sum_{n<N} f(n)$.

2　一些引理

为了完成定理的证明，我们需要下面几个引理，首先有

引理 1　对任意整数 $k \geq 0$，我们有

$$A(10^k) = \frac{F^{k+1}(10) - F(10)}{F(10) - 1}.$$

证明　我们用归纳法来证明 .

当 $k = 0$和 $k = 1$时，结论显然成立.

假设引理对于 $k = m$时也成立，则有

$$A(10^{m+1}) = \sum_{n<9 \cdot 10^m} f(a(n)) + \sum_{9 \cdot 10^m \leq n < 10^{m+1}} f(a(n))$$

收稿日期：2002-04-26

$$= \sum_{n<9\cdot 10^m} f(a(n)) + \sum_{0\le n<10^m} f(a(n+9\cdot 10^m))$$
$$= \sum_{n<9\cdot 10^m} f(a(n)) + \sum_{0\le n<10^m} f(9\cdot a(n)) - \sum_{0\le n<10^{m-1}} f(9\cdot a(n))$$
$$= \sum_{n<9\cdot 10^m} f(a(n)) + f(9)\left[\sum_{n<10^m} f(a(n)) - \sum_{n<10^{m-1}} f(a(n))\right]$$
$$= \cdots$$
$$= A(10^m) + [f(1)+f(2)+\cdots+f(9)]\cdot[A(10^m) - A(10^{m-1})]$$
$$= (F(10)+1)\cdot A(10^m) - F(10)\cdot A(10^{m-1}) = \frac{F^{m+2}(10) - F(10)}{F(10)-1}.$$

这就完成了引理 1的证明.

引理 2　对任意整数 $k\ge 0$和 $1\le a\le 9$,我们有

$$A(a\cdot 10^k) = \frac{F^{k+1}(10) - F(10)}{F(10)-1} + F(a)\cdot F^k(10).$$

证明　应用引理 1,我们有

$$A(a\cdot 10^k) = \sum_{n<(a-1)\cdot 10^k} f(a(n)) + \sum_{(a-1)\cdot 10^k\le n<a\cdot 10^k} f(a(n))$$
$$= \sum_{n<(a-1)\cdot 10^k} f(a(n)) + \sum_{0\le n<10^k} f(a(n+(a-1)\cdot 10^k))$$
$$= \sum_{n<(a-1)\cdot 10^k} f(a(n)) + \sum_{n<10^k} f((a-1)a(n)) - \sum_{n<10^{k-1}} f((a-1)a(n))$$
$$= \sum_{n<(a-1)\cdot 10^k} f(a(n)) + f(a-1)\cdot\left[\sum_{n<10^k} f(a(n)) - \sum_{n<10^{k-1}} f(a(n))\right]$$
$$= \cdots$$
$$= A(10^k) + [f(1)+f(2)+\cdots+f(a-1)]\cdot[A(10^k) - A(10^{k-1})]$$
$$= \frac{F^{k+1}(10) - F(10)}{F(10)-1} + F(a)\cdot F^k(10).$$

这就完成了引理 2的证明.

3　定理的证明

这节我们来完成定理的证明.

若 $a_s, a_{s-1}, \cdots, a_0$中有值为零的数,则令 t为第一个值为零的数的下标,否则令 $t=-1$. 应用引理 1和引理 2,我们有

$$A(x) = \sum_{n<a_s\cdot 10^s} f(a(n)) + \sum_{a_s\cdot 10^s\le n<x} f(a(n))$$
$$= A(a_s\cdot 10^s) + \sum_{0\le n<x-a_s\cdot 10^s} f(a(n+a_s\cdot 10^s))$$

若 $t=s-1$,则 $A(x) = A(a_s\cdot 10^s)$,定理成立.否则

$$A(x) = A(a_s\cdot 10^s) + \sum_{0\le n<x-a_s\cdot 10^s} f(a_s\cdot a(n)) - \sum_{0\le n<10^{s-1}} f(a_s\cdot a(n)) = \cdots$$

$$= \sum_{i=t+1}^{s} \frac{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_s)}{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_i)} \cdot A(a_i \cdot 10^i) - \sum_{i=t+1}^{s-1} \frac{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_s)}{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_i)} \cdot A(10^i)$$

$$= \sum_{i=t+1}^{s} \frac{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_s)}{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_i)} \cdot \left[\frac{F^{i+1}(10) - F(10)}{F(10) - 1} + F(a_i) \cdot F^i(10) \right]$$

$$- \sum_{i=t+1}^{s-1} \frac{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_s)}{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_i)} \cdot \frac{F^{i+1}(10) - F(10)}{F(10) - 1}$$

$$= \sum_{i=t+1}^{s} \frac{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_s)}{f(a_{t+1})f(a_{t+2})\cdots f(a_i)} \cdot F(a_i) \cdot F^i(10) + \frac{F^{s+1}(10) - F(10)}{F(10) - 1}$$

$$= \sum_{i=0}^{s} f\left(\prod_{j=i+1}^{s} a_j\right) \cdot F(a_i) \cdot F^i(10) + \frac{F^{s+1}(10) - F(10)}{F(10) - 1},$$

于是完成了定理的证明.

4 应用举例

这节我们对一些完全积性函数来应用本文的定理,以得到一些有用的结论.

1. 令 $f(n) = n$, 则 $A(x) = \sum_{n<x} a(n)$, 我们有

$$A(x) = \sum_{i=0}^{s} \prod_{j=i+1}^{s} a_j \cdot \frac{a_i(a_i - 1)}{2} \cdot 45^i + \frac{45^{s+1} - 45}{44}.$$

2. 令 $f(n) = n^2$, 则 $A(x) = \sum_{n<x} a^2(n)$, 我们有

$$A(x) = \sum_{i=0}^{s} \prod_{j=i+1}^{s} a_j^2 \cdot \frac{a_i(a_i - 1)(2a_i - 1)}{6} \cdot 285^i + \frac{285^{s+1} - 285}{284}.$$

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ House, 1993, 22.

[2] Tom M Apstol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[3] "Smarandache Sequences" at http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/snaqint.txt.

[4] "Smarandache Sequences" at http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/snaqint2.txt.

[5] "Smarandache Sequences" at http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/snaqint3.txt.

On a Problem of F. Smarandache

GAO Jing[1], LIU Hua-ning[2]

(1. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract Let $a(n)$ denotes the product of the base 10 digits of $n \in N$, $f(n)$ be a completely multiplicative function. For natural $x \geq 2$, let $A(x) = \sum_{n<x} f(a(n))$. The main purpose of this paper is to give a exact calculating formula for $A(x)$.

Keywords F. Smarandache problem; digital sums; completely multiplicative function; calculating formula