DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2010.02.002

第 28卷 第 2期 江西科学 Vol.28 No.2
2010年 4月 JIANGXI SCIENCE Apr.2010

文章编号:1001-3679(2010)02-0144-03

关于自然数幂和数列及其 Smarandache行列式

屈 芝 莲

(宝鸡职业技术学院,陕西 宝鸡 721013)

摘要:对任意正整数 n,设 $a_k(n)$表示不超过 n的最大 k次方和部分, $b_k(n)$表示不小于过 n的最小 k次方和部分。利用初等方法研究{ $a_k(n)$}和{ $b_k(n)$} 这 2 个数列构成的行列式的一些特殊性质。

关键词:自然数的幂和数列;Smarandache行列式;性质

中图分类号:O156.4 文献标识码:A

On the Sum of Natural Number's k-th Power Series and Its Determinant

QU Zhi-lian

(Baoji Vocational and Technical College, Shanxi Baoji 721013 PRC)

Abstract: Let n be a positive integer, a(n) be the largest sum of natural numbers k-th power less than or equal to n. And b(n) is the smallest sum of natural number's k-th power greater than or equal to n. We use the elementary methods to study the value of the determinant formed by the series { $a_k(n)$ } and { $b_k(n)$ }, and give two interesting conclusion.

Key words: Sum of natural number's k-th power Series, Smarandache determinant, Conclusion

1 引言及结论

1.1 自然数方幂和数列

自然数方幂和是指对 m, $m\in N$,形如 $S_k(m)=\sum_{i}^{m} i^k$的和式,这是一个古典的幂和问题,自从希腊数学家阿基米德开始研究,一直是许多中外数学家、学者研究的热点,文献[2~8]得到了很多有益的结果,这里不再赘述。

定义:设对整数 n, n的 k次幂和部分数列定义如下

$$a_k(n)=\max\{m\mid\sum_{i=1}^{m} i^k\leq n, m, n\in N^+\},$$

$$b_k(n)=\min\{m\mid\sum_{i=1}^{m} i^k\geq n, m, n\in N^+\},$$

其中, $k\in N^+$, $k\geq 2$,称 $a_k(n)$表示不超过 n的最大 k次方和部分,亦称为下部自然数方幂和部分数列,称 $b_k(n)$表示不小于 n的最小 k次方和部分,亦成为上部自然数方幂和部分数列。

例:当 k=2时, $a(1)=1$, $a(2)=1$, $a(3)=1$, $a(4)=4$, $a(5)=2$, …, $a(14)=3$, …。 $b(1)=2$, $b(2)=2$, $b(3)=2$, $b(4)=2$, $b(5)=2$, $b(6)=3$, …, $b(14)=3$, …。

事实上,从这 2个数列的定义知。

如果,当 $1\leq n<(1+2^k)$时, $a_k(n)=1$, $b_k(n)=2$;

当 $(1+2^k)\leq n<(1+2^k+3^k)$[$a_k(n)=2$, $b_k(n)=3$],即 $\sum_{i=1}^{m} i^k\leq n<\sum_{i=1}^{m+1} i^k$时, $a_k(n)=m$, $b_k(n)=m+1$, $k=2, 3, 4, \cdots$。

收稿日期:2010-01-14;修订日期:2010-02-27

作者简介:屈芝莲(1958-),女,陕西扶风人,副教授,研究方向:基础数论。

基金项目:国家自然科学基金项目(10271093);陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)资助。

1.2 Smarandache行列式

设对任何整数 n,称 $n\times n$行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$$

为 n阶 Smarandache行列式。

在本文中，给出$\{a_k(n)\}$和$\{b_k(n)\}$这 2个数列的一些重要性质；首先定义自然数方幂和数列的 Smarandache行列式 $A(n,k)$和 $B(n,k)$，即对任意的正整数 n，$A(n,k)$和 $B(n,k)$表示 $n\times n$的行列式：

$$A(n,k)=$$

$$\begin{vmatrix} a_k(1) & a_k(2) & \cdots & a_k(n) \\ a_k(n+1) & a_k(n+2) & \cdots & a_k(2n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k(n^2-n+1) & a_k(n^2-n+2) & \cdots & a_k(n^2) \end{vmatrix},$$

$$B(n,k)=$$

$$\begin{vmatrix} b_k(2) & b_k(3) & \cdots & b_k(n+1) \\ b_k(n+2) & b_k(n+3) & \cdots & b_k(2n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_k(n^2-n+2) & b_k(n^2-n+3) & \cdots & b_k(n^2+1) \end{vmatrix}$$

称为 n阶 Smarandache行列式。

例如：$A(2,2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3$,

$$A(3,2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$A(4,2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$A(5,2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$A(6,2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0$$

……

$$B(2,2)=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$B(3,2)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$B(4,2)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$B(5,2)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$B(6,2)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}=0$$

……

关于这些行列式的性质，至今似乎没有人研究，至少没有在现有的文献中看到，最近，张文鹏教授建议研究这些行列式的性质[1]。本文的主要目的是利用初等方法研究这 2个问题，并给出这些行列式的性质，即就是证明了下面的定理。

定理 1：对于任意的正整数 $n\geq 2$，$A(n,2)=0$且 $B(n,2)=0$。

定理 2：对于任意的正整数 $n\geq 3$，$k\geq 2$，$A(n,k)=0$且 $B(n,k)=0$。

通过这种行列式的计算可以给出一个正整数是否为自然数方幂和的一个新的判别方法。

2 定理的证明

2.1 定理 1的证明

由于 $k=2$，$S_2(m)=\sum_{i}^{m} i^2$，对于任何实数 $x>1$存在唯一确定的自然数 N使得 $S_k(N)\leq x<S_k(N+1)$，对于正整数 $k=2$，有

$$a_2(n^2)-a_2(n^2-n+1)=\sum_{i}^{m+n} i^2-\sum_{i}^{m} i^2=\sum_{i=1}^{n}(m+i)^2=(m+1)^2+(m+2)^2+\cdots+(m+n)^2=\frac{1}{6}(m+n)(2m+n)(3m+2n)。$$

由于 $m > 1$，从而 $a_2(n^2) - a_2(n^2-n+1) = \frac{1}{6}(m+n)(2m+n)(3m+2n) > 2n^2 > 2$。同理可证 $a_2(n^2+1) - a_2(n^2-n+1) > 2$。

由 Smarandache 行列式的定义知，行列式 $A(n,2)$ 和 $B(n,2)$ 一定有 2 行或 2 列相同，可以推断：

$$A(n,2) = \begin{vmatrix} a_k(1) & a_k(2) & \cdots & a_k(n) \\ a_k(n+1) & a_k(n+2) & \cdots & a_k(2n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k(n^2-n+1) & a_k(n^2-n+2) & \cdots & a_k(n^2) \end{vmatrix} = 0,$$

$$B(n,k) = \begin{vmatrix} a_k(2) & a_k(3) & \cdots & a_k(n+1) \\ a_k(n+2) & a_k(n+3) & \cdots & a_k(2n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k(n^2-n+2) & a_k(n^2-n+3) & \cdots & a_k(n^2+1) \end{vmatrix} = 0。$$

故 $A(n,2) = 0$ 且 $A(n,2) = 0$。

2.2 定理 2 的证明

由文献[5]中定理 1 和定理 2 有：

$$a_k(n^2) - a_k(n^2-n+1) = \sum_{i}^{m+n} i^k - \sum_{i}^{m} i^k = \sum_{i=1}^{n} (m+i)^k = \frac{1}{k+1}(m+n)^{k+1} + \frac{1}{2}(m+n)^k + \sum_{i=2}^{k} \frac{B_i C_k^{i-1}}{i} n^{k+1-i} = a_{k0}(m+n)^{k+1} + a_{k1}(m+n)^k + \cdots + a_{ki}(m+n)^{k+1-i} + \cdots + a_{kk}(m+n),$$

其中，B_i 为 Bernoulli 数，当 i 为偶数时 $B_i \neq 0$，当 i 为奇数时 $B_i = 0$，$a_{k0} = \frac{1}{k+1}$，$a_{k1} = \frac{1}{2}$，$a_{k3} = a_{k5} = \cdots = a_{k\,2[\frac{k-1}{2}]+1} = 0$。由于 $m+n \geq 2$，$k \geq 1$，$\sum_{i=0}^{k} a_{ki} = 1$，从而 $a_k(n^2) - a_k(n^2-n+1) > kn^{k+1} > 2$。

由 Smarandache 行列式的定义知，行列式 $A(n,k)$ 和 $B(n,k)$ 至少有 2 行或 2 列相同，可以推断：

$$A(n,k) = \begin{vmatrix} a_k(1) & a_k(2) & \cdots & a_k(n) \\ a_k(n+1) & a_k(n+2) & \cdots & a_k(2n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k(n^2-n+1) & a_k(n^2-n+2) & \cdots & a_k(n^2) \end{vmatrix} = 0,$$

$$B(n,k) = \begin{vmatrix} a_k(2) & a_k(3) & \cdots & a_k(n+1) \\ a_k(n+2) & a_k(n+3) & \cdots & a_k(2n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k(n^2-n+2) & a_k(n^2-n+3) & \cdots & a_k(n^2+1) \end{vmatrix} = 0。$$

这就完成了定理的证明。

参考文献：

[1] Smarandache F. Sequences of Numbers Involved In Unsolved Problems[M]. Phoenix: Hexis Press, 2006.

[2] 陈景润，黎签愚. 在 $S_k(n)$ 上的新结果[J]. 科学通报(英文版)，1986, 31(6): 361－362.

[3] 陈瑞卿. 关于幂和问题的新结果[J]. 数学曲实践与认识，1994(1): 66－69.

[4] 朱豫权，刘玉清. 关于幂和公式系数的一个递推关系式[J]. 数学的实践与认识，2002,(32): 319－323.

[5] 朱伟仪. 自然数幂和公式系数的递推公式和有关 Bernoulli 数的计算公式[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版)，2005, 28(2): 128－131.

[6] 黄 炜. k 次方根序列的均值渐近公式[J]. 甘肃科学学报，2009,(3): 49－52.

[7] 杨存典，李 超，李军庄. 一个数论函数的渐进公式[J]. 甘肃科学学报，2006,(2): 20－21.

[8] 冯 强，王荣波. 关于正整数 n 的 k 次幂部分数列加权均值[J]. 甘肃科学学报，2008,(2): 5－8.