文章编号:1007－2985(2013)05－0003－03

关于除数函数与 Smarandache k 次补数的混合均值*

黄 炜[1],马 焱[2]

(1. 宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013;2. 宝鸡文理学院经济管理系,陕西 宝鸡 721013)

摘 要:对任意的正整数 n,Smarandache k 次幂补数 $A_k(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 mn 是完全 k 次幂数. 用解析的方法研究了除数函数 $\tau(n)$ 对补数列 $A_k(n)$ 的复合函数 $\tau(A_k(n))$ 的混合均值并得到了一个渐近公式.

关键词:除数函数;k－次幂补数;均值;渐近公式

中图分类号:O156.4 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.1007－2985.2013.05.002

美籍数论专家 Smarandachek F 教授[1] 提出数论中许多未解决的问题,要求人们研究补数的问题就是其中的第 29 个问题. Smarandache k 次补数 $A_k(n)$ 被定义为:对任意给定的正整数 $k \geqslant 2$ 及任意正整数 n,$A_k(n) = \min\{u \mid un = m^k, u, m \in \mathbf{N}_+\}$. 特别地,将 $A_2(n)$,$A_3(n)$,$A_4(n)$ 分别被称为平方补数、立方补数和四次方补数[2]. $\tau(n)$ 是 n 的除数函数,即 $\alpha > 0$,$\tau = \sum\limits_{d \mid n} 1$,其中 d 是 n 的正除数. 关于复合函数 $\tau(A_k(n))$ 的混合均值问题,已有学者进行了初步研究,如文献[3] 研究了复合函数 $\tau(A_2(n))$ 的混合均值,文献[4] 研究了复合函数 $\tau(A_3(n))$ 的混合均值. 笔者在文献[3－4] 的基础上,利用解析方法和初等方法进一步研究 $\sum\limits_{k \leqslant n} \tau(A_k(n))$ 的均值性质,得到一个比较有趣的渐近公式.

1 引理及证明

文献[5] 包含了证明以下引理所需要的基础知识.

设 $s = \sigma + it$ 为复常数,$\zeta(s)$ 为 Riemann-zeta－函数,正整数 $k \geqslant 2$,p 为素数,若 ε 是任意正整数,当 $\sigma > (k-1) + \varepsilon$ 时,定义 $B(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\tau(A_k(n))}{n^s}$.

引理 1 令 $f(n)$ 是一个积性数论函数,使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 绝对收敛,那么这个级数的和能表示为在所有素数上展开的一个绝对收敛的无穷乘积,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} (1 + p + p^2 + p^3 + \ldots).$$

引理 2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f(n)}{n^s}$ 对 $\sigma > \sigma_a$ 绝对收敛,若 $f(n)$ 是完全积性函数,则当 $\sigma > \sigma_a$ 时,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{f(n)\, p^{-s}}\right).$$

特别地,当 $\sigma > 1$ 时,有 $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} = \prod\limits_{p} \left(1 - \dfrac{1}{p^{-s}}\right)$.

引理 3 设 ε 是任意正常数,当 $\sigma \geqslant k-1$ 时,有

(1) $B(s+1)$ 在半平面 $\operatorname{Re} s \geqslant k - 1 + \varepsilon$ 上有界且解析;

* 收稿日期:2013－01－14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省自然科学基金资助项目(09JK432)

作者简介:黄 炜(1961－),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院基础部教授,主要从事解析数论与特殊函数研究;马 焱(1963－),女,陕西乾县人,宝鸡文理学院教授,主要从事财务管理研究.

（2）$B(s)$ 有表达式 $B(s+1)=\dfrac{\zeta^{k+1}(s)\zeta(ks)}{\zeta^{k}(2s)}R(s)$.

其中，$R(s)=\prod\limits_{p}\left[1-\dfrac{2+\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant k-1}C_k^{i-1}p^{(i-1)s}+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}p^{(k-i)s}}{(1+p^{s})^{k}}\right]$.

证明　对于任意素数 p，p 的 k 次补数 $A_k(p^n)$ 为

$$A_k(p^n)=\begin{cases}1 & n=km,\\ p^{k-i} & n=mk+i,1\leqslant i\leqslant m-1.\end{cases}$$

现有 $A_k(n)=n^{k-i}\leqslant n^{k}$，而对于任意正数 ε，$\tau(n)\ll n^{\frac{\varepsilon}{2}+1}$，故 $\tau(A_k(n))\ll n^{\frac{k\varepsilon}{2}}$.

（1）当 $\sigma\geqslant k$ 时，级数 $B(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sigma(A_k(n))}{n^{s}}$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant k-1+\varepsilon$ 上绝对一致收敛[5]，从而 $B(s+1)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant k-1+\varepsilon$ 上有界且解析.

（2）由定义知 $A_k(n)$ 是积性函数，又因为 $\tau(A_k(m\cdot n))=\tau(A_k(m))\cdot\tau(A_k(n))$，$\tau(A_k(n))$ 也是积性函数，所以由 $A_k(n)$ 的定义及文献[5]的有关定理有：当 $\sigma\geqslant k-1$ 时，$\tau(A_k(n))$ 的 Dirichlet 级数为

$$\begin{aligned}
B(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(A_k(n))}{n^{s}}=\prod_{p}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(A_k(p^{k}))}{p^{ks}}\right)=\prod_{p}\left(\tau(1)+\frac{\tau(A_k(p))}{p^{s}}+\frac{\tau(A_k(p^{2}))}{p^{2s}}+\frac{\tau(A_k(p^{3}))}{p^{3s}}+\ldots\right)=\\
&\prod_{p}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\tau(A_k(p^{kt}))}{p^{kts}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\tau(A_k(p^{kt+1}))}{p^{(kt+1)s}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\tau(A_k(p^{kt+2}))}{p^{(kt+2)s}}+\ldots+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\tau(A_k(p^{kt+k-1}))}{p^{(k-1)s}}\right)=\\
&\prod_{p}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{p^{kts}}\left(\tau(A_k(1))+\frac{\tau(A_k(p))}{p^{s}}+\frac{\tau(A_k(p^{2}))}{p^{2s}}+\frac{\tau(A_k(p^{3}))}{p^{3s}}+\ldots+\frac{\tau(A_k(p^{k-1}))}{p^{(k-1)s}}\right)\right)=\\
&\zeta(ks)\prod_{p}\left(\tau(1)+\frac{\tau(p^{k-1})}{p^{s}}+\frac{\tau(p^{k-2})}{p^{2s}}+\frac{\tau(p^{k-3})}{p^{3s}}+\ldots+\frac{\tau(p)}{p^{(kt+k-1)s}}\right)=\\
&\zeta(ks)\prod_{p}\left(1+\frac{k}{p^{s}}+\frac{k-1}{p^{2s}}+\frac{k-2}{p^{3s}}+\ldots+\frac{2}{p^{(k-1)s}}\right)=\\
&\zeta(ks)\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}\left(1+\frac{k}{p^{s}}-\frac{1}{p^{s}}-\frac{1}{p^{2s}}-\frac{1}{p^{3s}}-\ldots-\frac{1}{p^{(k-1)s}}-\frac{2}{p^{ks}}\right)=\\
&\zeta(ks)\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}\left[1+\frac{k}{p^{s}}-\frac{1}{p^{ks}}-\frac{\frac{1}{p^{s}}\left(1-\left(\frac{1}{p^{s}}\right)^{k}\right)}{1-\frac{1}{p^{s}}}\right]=\\
&\frac{\zeta^{k+1}(s)\zeta(ks)}{\zeta^{k}(2s)}\prod_{p}\left[1-\frac{2+\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant k-1}C_k^{i-1}p^{(i-1)s}+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}p^{(k-i)s}}{(1+p^{s})^{k}}\right]=\\
&\frac{\zeta^{k+1}(s)\zeta(ks)}{\zeta^{k}(2s)}R(s),
\end{aligned}$$

其中 $R(s)=\prod\limits_{p}\left[1-\dfrac{2+\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant k-1}C_k^{i-1}p^{(i-1)s}+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}p^{(k-i)s}}{(1+p^{s})^{k}}\right]$. 表面无穷级数 $R(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant k-1+\varepsilon$ 上绝对一致收敛，从而 $B(s)=\dfrac{\zeta^{k+1}(s)\zeta(ks)}{\zeta^{k}(2s)}R(s)$ 在此区域内有界且解析.

2　定理及证明

定理 1　设 $x\geqslant 1$，则有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(A_k(n))=B_0x\ln^{k}x+B_1x\ln^{k-1}x+\ldots+B_{k-1}x\ln x+B_kx+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

其中：$R(s)=\prod\limits_{p}\left[1-\dfrac{2+\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant k-1}C_k^{i-1}p^{(i-1)s}+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}p^{(k-i)s}}{(1+p^{s})^{k}}\right]$；$\tau(n)$ 是 n 的除数函数；$\prod p$ 表示对所有的素数 p 求积.

证明　不难看出，存在一正常数 B，使 $\tau(A_k(n))\ll n^{\varepsilon}=n^{\frac{B}{\ln\ln n}}=H(n)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\tau(A_k(n))}{n^{s}}=\zeta^{k+1}(\sigma)H(\sigma)$，$\sigma>0$.

根据引理 1—3 及著名的 Perron's 公式[6]，并取 $s_0=1$，$b=k+\dfrac{1}{\ln x}$，$T\geqslant 1$，x 为半奇数，有 $\sum\limits_{n\leqslant x}A_k(n)=$

$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}B(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{b+\varepsilon})$，这里的 ε 表示任意给定的正数.

下面对主项进行估计. 若取 $a=k-\frac{1}{2}+\frac{1}{\ln x}$，将积分限从 $s=a\pm \mathrm{i}T$ 到 $s=b\pm \mathrm{i}T$，被积函数为 $B(s)\frac{x^s}{s}=\frac{\zeta^{k+1}(s)\zeta(ks)}{\zeta^k(2s)}R(s)\frac{x^s}{s}$，则在 $k+1$ 阶极点 $s=0$ 处的留数为

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{k\,!}\left(s^{k+1}\zeta^{k+1}(s)\frac{\zeta(ks)\cdot R(s)}{\zeta^k(2s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right)^{(k)}=\lim_{s\to 1}\frac{1}{k\,!}\left(C_k^0(s^{k+1}\zeta^{k+1}(s))^{(k)}\frac{\zeta(ks)\cdot R(s)}{\zeta^k(2s)}\cdot\frac{x^s}{s}+\right.$$
$$\left.C_k^1(s^{k+1}\zeta^{k+1}(s))^{(k-1)}\left(\frac{\zeta(ks)\cdot R(s)}{\zeta^k(2s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right)'+\ldots+C_k^k(s^{k+1}\zeta^{k+1}(s))\left(\frac{\zeta(ks)\cdot R(s)}{\zeta^k(2s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right)^{(k)}\right)=$$
$$B_0x\ln^k x+B_1x\ln^{k-1}x+B_2x\ln^{k-2}x+\ldots+B_{k-1}x\ln x+B_kx,$$

即

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{a-\mathrm{i}T}^{b-\mathrm{i}T}+\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}+\int_{b+\mathrm{i}T}^{a+\mathrm{i}T}+\int_{a+\mathrm{i}T}^{b-\mathrm{i}T}\right)B(s+1)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=B_0x\ \ln^k x+$$
$$B_1x\ \ln^{k-1}x+B_2x\ \ln^{k-2}x+\ldots+B_{k-1}x\ln x+B_kx.$$

比较容易地估计，

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b+\mathrm{i}T}^{a+\mathrm{i}T}+\int_{a-\mathrm{i}T}^{b-\mathrm{i}T}\right)B(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll\int_a^b\left|B(\sigma+\mathrm{i}T)\frac{x^k}{T}\right|\mathrm{d}\sigma\ll\frac{\alpha^k(T)x^\varepsilon}{T}=x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\ln x,$$
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{a+\mathrm{i}T}^{a-\mathrm{i}T}B(s+1)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right)\right|\ll\int_0^T\left|B\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}T\right)\frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{T}\right|\mathrm{d}t\ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\ln x,$$

因此有

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(A_k(n))=B_0x\ \ln^k x+B_1x\ \ln^{k-1}x+B_2x\ \ln^{k-2}x+\ldots+B_{k-1}x\ln x+B_kx+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

证毕.

推论 1　设 $x\geqslant 1$，则有如下渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(A_2(n))=B_0x\ln^2 x+B_1x\ln x+B_2x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$
$$\sum_{n\leqslant x}\tau(A_3(n))=B_0x\ln^3 x+B_1x\ln^2 x+B_2x+\ln x+B_3x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] HUANG Wei. An Arithmetical Function and the Power Complements [C]//Research on Smaramtache Problems in Number Theory. Hexis, 2005: 123－124.

[3] 张红莉，王　阳. 关于平方补数除数函数的均值 [J]. 纺织高校基础科学学报，2002(1)：44－46.

[4] 王　阳. 立方幂补数除数函数的均值 [J]. 数学的实践与认识，2004，34(12)：144－148.

[5] TOM M APOSTPL. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[6] PAN C D, PAN C B. Foundation of Analytic Number Theory [M]. Beijing: Science Press, 1997.

Mean Value of Divisor Function for Smarandache *k*-Power Complements

HUANG Wei[1], MA yan[2]

(1. Department of Basic Courses, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, Shaanxi China; 2. Department of Ecomomics and Management, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, Shaanxi China)

Abstract: Let n be positive integer, the Smarandache k-power complements $A_k(n)$ is defined as the smallest integer m such that mn is perfect k-th power. The mean value of $\tau(A_k(n))$ is studied and an asymptotic formula is given by the analytic integral methods.

Key words: divisor function; k-power complement; mean value; asymptotic formula

（责任编辑　向阳洁）