广义 Smarandache 幂和函数的均值

王　阳，华柳青

（南阳师范学院 数学与统计学院，河南 南阳 473061）

摘　要：对任意正整数 n 及给定的正整数 m 和 k ($k>1$)，定义了广义 Smarandache 幂和函数 $P(n,m,k)=\sum\limits_{i=0}^{[(\ln m+\ln n)/\ln k]}(n-k^i)$. 利用初等方法和高斯函数的性质研究了 $P(n,m,k)$ 的均值，得到了一个有趣的渐近公式.

关键词：广义 Smarandache 幂和函数；均值；渐近公式

中图分类号：O 156.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001—8735(2014)02—0149—03

1　引言及结论

对任意正整数 n 及给定的正整数 $k>1$，Smarandache 和函数 $S(n,k)$ 和 $AS(n,k)$ 为

$$S(n,k)=\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n\\ i=0,1,2,\cdots}}(n-ki),\quad AS(n,k)=\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n\\ i=0,1,2,\cdots}}|n-ki|.$$

Smarandache 幂和函数为 $P(n,k)=\sum\limits_{i=0,1,2,\cdots}^{|n-ki|\leqslant n}(n-k^i)$. 由高斯函数的性质可得

$$S(n,k)=\sum_{i=0}^{[2n/k]}(n-ki),\quad AS(n,k)=\sum_{i=0}^{[2n/k]}|n-ki|,\quad P(n,k)=\sum_{i=0}^{[\ln(2n)/\ln k]}(n-k^i),$$

其中 $[x]$ 为高斯函数，即 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 关于 $S(n,k)$ 和 $AS(n,k)$ 的性质，文献[1-3]进行了研究，得到若干渐近公式及恒等式. 文献[4－5]分别将 $S(n,k)$ 和 $AS(n,k)$ 进行了推广，定义了广义 Smarandache 和函数 $S(n,m,k)$ 和 $AS(n,m,k)$（m 为给定的自然数）：

$$S(n,m,k)=\sum_{i=0}^{[(m+n)/k]}(n-ki),\quad AS(n,m,k)=\sum_{i=0}^{[(m+n)/k]}|n-ki|,$$

并研究了 $S(n,m,k)$ 和 $AS(n,m,k)$ 的分布性质，给出均值表达式.

受文献[4-5]的启发，本文将Smarandache幂和函数 $P(n,k)$ 进行推广，定义了一个广义Smarandache幂和函数 $P(n,m,k)$，即对任意正整数 n 及给定的正整数 k ($k>1$) 和 m，广义 Smarandache 幂和函数 $P(n,m,k)$ 为

$$P(n,m,k)=\sum_{i=0}^{[(\ln m+\ln n)/\ln k]}(n-k^i),$$

且 $P(n,2,k)=P(n,k)$. 由定义容易得到 $P(4,2,2)=1$，$P(8,16,8)=-49$. 关于 $P(n,m,k)$ 的算数性质我们认为是有意义的，它至少可以反映出正整数 n 在 k 的方幂中的分布性质. 本文的主要目的是利用初等方法及高斯函数的性质，研究 $P(n,m,k)$ 的均值，并得到下面的定理.

定理　对于给定的正整数 k ($k>1$)，m 及任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}P(n,m,k)=\frac{1}{2\ln k}x^2\ln(mx)+R(n,m,k),$$

其中 $|R(n,m,k)|\leqslant\left(\frac{1}{4}+\frac{mk}{k-1}\right)x^2+\frac{x}{k-1}+\frac{2x\ln(mx)+2x+\ln(mx)+x\ln k}{2\ln k}$.

收稿日期：2013-08-11

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071194；河南省自然科学基金资助项目(132300410372)

作者简介：王　阳(1962－)，女，河南省南阳市人，南阳师范学院教授，主要从事数论研究，E-mail：wangyang621211@126.com.

推论 1 对于给定的正整数 $k\,(k>1)$ 及任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}P(n,1,k)=\frac{1}{2\ln k}x^2\ln x+R(x,1,k),$$

其中 $|R(x,1,k)|\leqslant\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{k-1}\right)x^2+\frac{x}{k-1}+\frac{2x\ln x+2x+\ln x+x\ln k}{2\ln k}.$

推论 2 对于给定的正整数 $k\,(k>1)$ 及任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}P(n,k)=\frac{1}{2\ln k}x^2\ln(2x)+R(x,2,k),$$

其中 $|R(x,2,k)|\leqslant\left(\frac{1}{4}+\frac{2k}{k-1}\right)x^2+\frac{x}{k-1}+\frac{2x\ln(2x)+2x+\ln(2x)+x\ln k}{2\ln k}.$

2 定理的证明

对任意实数 x，$\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的小数部分. 由 $P(n,m,k)$ 的定义可得

$$P(n,m,k)=n+n\left[\frac{\ln n+\ln m}{\ln k}\right]-\frac{k^{\left[\frac{\ln n+\ln m}{\ln k}\right]+1}-1}{k-1}=$$
$$\frac{n\ln(mn)}{\ln k}+n+\frac{1}{k-1}-n\left\{\frac{\ln(mn)}{\ln k}\right\}-\frac{mn}{k-1}k^{1-\left\{\frac{\ln(mn)}{\ln k}\right\}}. \tag{1}$$

对任意实数 $x>1$，由文献[6]中的 Euler 求和公式可知

$$\sum_{n\leqslant x}n\ln(mn)=\ln m+\int_1^x t\ln(tm)\mathrm{d}t+\int_1^x(t-[t])(t\ln(tm))'\mathrm{d}t+([x]-x)x\ln(mt).$$

由高斯函数的性质容易得到

$$\int_1^x\frac{t\ln(mt)}{\ln k}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{n\ln(mn)}{\ln k}\leqslant\int_1^{x+1}\frac{t\ln(mt)}{\ln k}\mathrm{d}t,$$

从而

$$\frac{x^2\ln(mx)}{2\ln k}-\frac{x^2}{4}\leqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{n\ln(mn)}{\ln k}\leqslant\frac{(x+1)^2\ln(mx+m)}{2\ln k}-\frac{(x+1)^2}{4}.$$

由此可得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{n\ln(mn)}{\ln k}=\frac{1}{2\ln k}x^2\ln(mx)-\frac{x^2}{4}+R_1(n,m,k), \tag{2}$$

其中

$$|R_1(n,m,k)|=\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{n\ln(mn)}{\ln k}-\frac{1}{2\ln k}x^2\ln(mx)+\frac{x^2}{4}\right|\leqslant\frac{2x\ln(mx)+\ln(mx)+2x}{2\ln k}, \tag{3}$$

令

$$R_2(n,m,k)=\sum_{n\leqslant x}\left(n+\frac{1}{k-1}-n\left\{\frac{\ln(mn)}{\ln k}\right\}-\frac{mn}{k-1}k^{1-\left\{\frac{\ln(mn)}{\ln k}\right\}}\right),$$

由于 $0\leqslant\left\{\frac{\ln(mn)}{\ln k}\right\}<1$，所以

$$\sum_{n\leqslant x}\left(-\frac{mkn}{k-1}\right)\leqslant R_2(n,m,k)\leqslant\sum_{n\leqslant x}\left(n+\frac{1}{k-1}\right),$$

因此

$$-\frac{mk}{k-1}x^2<R_2(n,m,k)\leqslant\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{2}\right)x, \tag{4}$$

令 $R(n,m,k)=R_1(n,m,k)+R_2(n,m,k)-\frac{x^2}{4}$，由(1)～(4)式可得

$$\sum_{n\leqslant x}P(n,m,k)=\frac{1}{2\ln k}x^2\ln(mx)+R(n,m,k),$$

其中

$$|R(n,m,k)|\leqslant\left(\frac{1}{4}+\frac{mk}{k-1}\right)x^2+\frac{x}{k-1}+\frac{2x\ln(mx)+2x+\ln(mx)+x\ln k}{2\ln k}.$$

定理得证.

$m=1$ 时，利用定理可得推论 1；$m=2$ 时，$P(n,2,k)=P(n,k)$，利用定理可得推论 2.

显然，上述定理及推论的误差项是非常弱的，是否存在较强的渐近公式也是一个有趣的问题.

参考文献：

［1］ 王建平. 一类包含 Smarandche 和函数的 Dirichet 级数［J］. 陕西师范大学学报：自然科学版，2010，38(5)：14-17.

［2］ 陈娇. 一类包含 Smarandche 和函数的 Dirichet 级数［J］. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(1)：39-43.

［3］ 赵院娥. 一类包含 Smarandche 和函数的均值［J］. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(1)：44-47.

［4］ 李梵蓓. 关于广义 Smarandche 和函数的均值［J］. 内蒙古师范大学学报：自然科学汉文版，2010，39 (6)：555-557.

［5］ 黄炜. 关于广义 Smarandche 和函数的均值［J］. 吉首大学学报：自然科学版，2012，33(2)：7-9.

［6］ Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory［M］. New York：Springer-Verlag，1976：54.

On the Mean Value of Generalized Power-Sum Smarandache Function

WANG Yang，HUA Liu-qing

(*College of Mathematics and Statistics*，*Nanyang Normal University*，*Nanyang* 473061，*Henan*，*China*)

Abstract：Let n be any positive integer，for two fixed positive integer m and $k(k>1)$，a generalized power-sum Smarandache functions $P(n,m,k)$ is defined by $P(n,m,k)=\sum_{i=0}^{[(\ln m+\ln n)/\ln k]}(n-k^i)$. The mean value of $P(n,m,k)$ is studied by using elementary methods and the properties of Gauss function，an interesting asymptotic formula is given.

Key words：generalized power-sum Smarandache function；mean value；asymptotic formula

【责任编辑 陈汉忠】

（上接第 148 页）

Analysis of the Fixed Points for a Class Neuronal Network Models'

LIU Ju-hong[1]，WANG Zhen-huan[1]，YOU Hai-feng[2]

(1. *College of Science*，*Inner Mongolia Agriculture University*，*Hohhot* 010018，*China*；
2. *Transportation Institute*，*Inner Mongolia University*，*Hohhot* 010021，*China*)

Abstract：In this paper，the autonomous system and the fixed points for a class of neuronal network models' are studied. We found that can be exist from two to six fixed points while changing of parameter w，among them，fold bifurcation will be found in the case of three or five fixed points. Then the character of these fixed points will be analyzed through the calculation of linearization array and eigenvalues.

Key words：neuronal networks；autonomous system；fixed points

【责任编辑 陈汉忠】