第33卷 第5期 河南科学 Vol.33 No.5
2015年5月 HENAN SCIENCE May 2015

文章编号:1004-3918(2015)05-0697-04

除数和函数对Smarandache *k*次补数的混合均值

陈珠社

（宝鸡职业技术学院 基础部，陕西 宝鸡 721013）

摘　要：利用初等数论和解析数论方法研究了除数和函数复合函数与k次补数$A_k(n)$复合函数$\sigma(A_k(n))$的混合均值问题,给出一个有趣的渐近公式.

关键词：除数和函数；k次幂补数；均值；渐近公式

中图分类号：O 156.4　　**文献标识码**：A

On the Mean Value Property of the Mixed Divisor Sum Function with Smarandache *k*-power Complement Sequences

Chen Zhushe

((Department of Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, Shaanxi China)

Abstract: The main purpose of this paper is to use the elementary and analytic number methods to study the mean value properties of the mixed divisor sum function with k-power complements of n. An interesting asymptotic formula is given.

Key words: divisor sum function; k-power complement; mean value; asymptotic formula

1　预备知识与结论

1)相关定义:设n为正整数,除数和函数$\sigma_\alpha(n)$:d为n的正因子,称$\sigma_\alpha=\sum_{d|n}d^\alpha,\alpha>0$为$n$的正因子$d$的$\alpha$次幂之和,即为$n$的除数和函数$\sigma_\alpha(n)$.

本文研究除数和函数在$\alpha=1$时的情形,即:$\sigma(n)=\sigma_1(n)$.

2)k次补数$A_k(n)$:称$A_k(n)=\min\left\{u\,\middle|\,un=m^k,m\geqslant 2,u,m\in Z^+\right\}$为$n$的$k$次补数$A_k(n)$.

在文献[1]的第27个问题中,美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授建议研究有关n的k次补数$A_k(n)$的性质.不少文献[2-10]已对补数问题进行了研究,特别的是文献[3-4]研究了除数和函数分别与平方补数、立方补数的混合均值,本文在文献[3-4]的基础上,利用初等数论和解析数论方法,研究了除数和函数$\sigma(n)=\sigma_1(n)$与n的k次补数$A_k(n)$的复合函数$\sigma(A_k(n))$的混合均值$\sum_{k\leqslant n}\sigma(A_k(n))$问题,得到了一个有趣的渐近公式.即就是证明了下面的定理.

定理　对于任意的实数$x\geqslant 1$,对任意正整数$k\geqslant 2$,则有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(A_k(n))=\frac{6\zeta(k^2)R(k)}{k\pi^2}x^k+O\left(x^{k-\frac{1}{2}}\ln x\right),$$

收稿日期：2015-01-22

基金项目：国家自然科学基金项目(11071194);陕西省自然科学基金项目资助(09JK432)

作者简介：陈珠社(1964-),男,副教授,硕士,研究方向为基础数学.

其中：$\sigma(n)$ 为 n 的所有正约数之和；$\zeta(s)$ 为Riemann-zeta-函数；

$$R(s)=\prod_p\left(\frac{1}{(1-p)\left(p^s-1\right)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)-\frac{p^{k+1}}{(1-p)\left(p^{s+1}-1\right)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)(s+1)}}\right)-\frac{1}{p^{s-k+1}}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{p^{s-k+1}}},$$

$\prod_p$ 表示对所有的素数p求积.

特别地，当k=2，3时有如下推论.

推论 当k=2，3，则有如下的渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma\left(A_2(n)\right)=\frac{\zeta(4)R(2)}{2\zeta(2)}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}}\ln x\right),$$

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma\left(A_3(n)\right)=\frac{\zeta(9)R(3)}{3\zeta(2)}x^3+O\left(x^{\frac{5}{2}}\ln x\right),$$

其中：$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

2 引理及证明

证明定理需要下列引理（下列引理的证明所使用的基础知识均可在文献[10-11]中找到）.

设 $s=\sigma+\mathrm{i}t$ 为复常数，$k\geqslant 2$，ε是任意正整数，$\zeta(s)$ 为Riemann-zeta-函数，正整数，p 为素数，若当 $\sigma>k-1+\varepsilon$ 时，定义级数：$B(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1\left(A_k(n)\right)}{n^s}$.

引理1 若积性数论函数 $f(n)$ 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 绝对收敛，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_p\left(1+p+p^2+p^3+\cdots\right).$$

证明参见文献[11]定理11.6.

引理2 对于完全积性函数 $f(n)$，当 $\sigma>\sigma_a$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ 绝对收敛，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{f(n)p^{-s}}\right),$$

特别地，当σ>1时，有

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{-s}}\right).$$

证明参见文献[11]定理11.7.

引理3 对任意正常数 ε，当 $\sigma\geqslant k-1$ 时，则

1）$B(s+1)$ 在半平面 $Res\geqslant k-1+\varepsilon$ 上解析且有界.

2）$B(s)$ 的表达式如下：

$$B(s+1)=\frac{\frac{\zeta(ks)R(k)}{k\zeta(2)}x\zeta(s-k+1)}{\zeta\left(2(s-k+1)\right)}R(s),\tag{1}$$

其中：

$$R(s)=\prod_p\left(\frac{1}{(1-p)\left(p^s-1\right)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)-\frac{p^{k+1}}{(1-p)\left(p^{s+1}-1\right)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)(s+1)}}\right)-\frac{1}{p^{s-k+1}}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{p^{s-k+1}}}.$$

证明　对于素数 p 及正整数 k，$A_k(p^n)=\begin{cases}1, & n=km,\\ p^{k-i}, & n=mk+i \quad (1\leqslant i\leqslant k-1),\end{cases}$ 显然 $A_k(n)=n^{k-i}\leqslant n^k$，对于任意的正数 ε，$\sigma(n)<<n^{\frac{\varepsilon}{2}+1}$，故 $\sigma\left(A_k(n)\right)<<n^{\frac{\varepsilon}{2}+\left[\frac{k}{2}\right]+1}$.

1）当 $\sigma\geqslant k$ 时，在半平面 $Res\geqslant k-1+\varepsilon$ 上由文献[11]知级数 $B(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma\left(A_k(n)\right)}{n^s}$ 绝对一致收敛，故在半平面 $Res\geqslant k-1+\varepsilon$ 上 $B(s+1)$ 解析且有界.

2）当 $(m,n)=1$ 时，$A_k(n)$ 是积性函数而 $\sigma(n)$ 也是关于 n 的积性函数，进而有：

$$\sigma\left(A_k(mn)\right)=\sigma\left(A_k(m)A_k(n)\right)=\sigma\left(A_k(m)\right)\sigma\left(A_k(n)\right),$$

故 $\sigma\left(A_k(n)\right)$ 也是关于 n 的积性函数，由欧拉公式[12]知：当 $\sigma\geqslant k-1$ 时，有

$$B(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma\left(A_k(n)\right)}{n^s}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma\left(A_k(p^k)\right)}{p^{ks}}\right)=$$

$$\zeta(ks)\prod_p\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\sigma(1)}{p^{kts}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\sigma\left(p^{k-1}\right)}{p^{(kt+1)s}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\sigma\left(p^{k-2}\right)}{p^{(kt+2)s}}+\cdots+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\sigma(p)}{p^{(kt+k-1)s}}\right)=$$

$$\zeta(ks)\prod_p\left(\sigma(1)+\frac{\sigma\left(p^{k-1}\right)}{p^s}+\frac{\sigma\left(p^{k-2}\right)}{p^{2s}}+\frac{\sigma\left(p^{k-3}\right)}{p^{3s}}+\cdots+\frac{\sigma(p)}{p^{(k-1)s}}\right)=$$

$$\zeta(ks)\prod_p\left(1+\frac{p^{k-1}+p^{k-2}+\cdots+p+1}{p^s}+\frac{p^{k-2}+\cdots+p+1}{p^{2s}}+\frac{p^{k-3}+\cdots+p+1}{p^{3s}}+\cdots+\frac{p^2+p+1}{p^{(k-2)s}}+\frac{p+1}{p^{(k-1)s}}\right)=$$

$$\zeta(ks)\prod_p\left(1+\frac{\frac{1}{(1-p)p^s}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)}{1-\frac{1}{p^s}}-\frac{\frac{1}{(1-p)p^{s-k}}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)(s+1)}}\right)}{1-\frac{1}{p^{s+1}}}\right)=$$

$$\frac{\zeta(ks)\zeta(s-k+1)}{\zeta\left(2(s-k+1)\right)}\prod_p\left(\frac{1}{(1-p)\left(p^s-1\right)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)-\frac{p^{k+1}}{(1-p)\left(p^{s+1}-1\right)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)(s+1)}}\right)-\frac{1}{p^{s-k+1}}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{p^{s-k+1}}}=$$

$$\frac{\zeta(ks)\zeta(s-k+1)}{\zeta\left(2(s-k+1)\right)}R(s).$$

其中：

$$R(s)=\prod_p\left(\frac{1}{(1-p)\left(p^s-1\right)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)-\frac{p^{k+1}}{(1-p)\left(p^{s+1}-1\right)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)(s+1)}}\right)-\frac{1}{p^{s-k+1}}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{p^{s-k+1}}},$$

显然无穷级数 $R(s)$ 在半平面 $Res\geqslant k-1+\varepsilon$ 上绝对一致收敛，有 $B(s)=\frac{\zeta(s-k+1)}{\zeta\left(2(s-k+1)\right)}R(s)$ 在此区域内有界且解析.

3　定理的证明

由引理1~3，再在著名的Perron's公式[12]中取 $s_0=1,b=k+\frac{1}{\ln x},T\geqslant 1,x$ 为半奇数，故有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma\left(A_k(n)\right)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}B(S+1)\,\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{b+\varepsilon}\right),$$

其中：ε 表示任意给定的正数．

主项估计：环路积分中取 $a=k-\frac{1}{2}+\frac{1}{\ln x}$，将积分限积分，从 $s=a\pm\mathrm{i}T$ 到 $s=b\pm\mathrm{i}T$，被积函数为 $B(s+1)\frac{x^s}{s}$，在一阶极点 $s=k$ 处的留数为

$$\underset{s=k}{Res}\left(\frac{\zeta(ks)\zeta(s-k+1)}{\zeta\left(2(s-k+1)\right)}R(s)\,\frac{x^s}{s}\right)=\lim_{s\to k}\left((s-k)\,\frac{\zeta(ks)\zeta(s-k+1)}{\zeta\left(2(s-k+1)\right)}R(s)\,\frac{x^s}{s}\right)=\frac{\zeta\left(k^2\right)R(k)}{k\zeta(2)}x^k,$$

其中：$k=2,3,\cdots$，即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{a-\mathrm{i}T}^{b-\mathrm{i}T}+\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}+\int_{b+\mathrm{i}T}^{a+\mathrm{i}T}+\int_{a+\mathrm{i}T}^{b-\mathrm{i}T}\right)B(s+1)\,\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=\frac{\zeta\left(k^2\right)R(k)}{k\zeta(2)}x^k\,. \tag{2}$$

我们可以容易地得到估计：

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{b+\mathrm{i}T}^{a+\mathrm{i}T}+\int_{a-\mathrm{i}T}^{b-\mathrm{i}T}\right)A(s+1)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|<<\int_a^b\left|B(\sigma+\mathrm{i}T)\frac{x^k}{T}\right|\mathrm{d}\sigma<<\frac{x^{k+\varepsilon}}{T}=x^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon}\ln x\,, \tag{3}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{a+\mathrm{i}T}^{a-\mathrm{i}T}\right)B(s+1)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|<<\int_0^T\left|B\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}T\right)\frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{T}\right|\mathrm{d}t<<x^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon}\ln x\,. \tag{4}$$

因此有：

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma\left(A_k(n)\right)=\frac{6\zeta\left(k^2\right)R(k)}{k\pi^2}x^k+O\left(x^{k-\frac{1}{2}}\ln x\right),$$

其中 $k=2,3,\cdots$．

定理证明完毕．

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Huang Wei. An arithmetical function and the power com plements[C]// Research on Smarandache Problems in Number Theory, USA: Hexis, 2005.

[3] 王 阳. 立方幂补数除数和函数的性质[J]. 兰州理工大学学报，2006，32(4)：153-154.

[4] 张红莉. 除数和函数对平方补数的均值[J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(6)：905-908.

[5] 张红莉，王 阳. 关于平方补数除数函数的均值[J]. 纺织高校基础科学学报，2002(1)：44-46.

[6] 黄 炜. 关于除数函数与Smarandache k次补数的混合均值[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2013，34(5)：3-4.

[7] 黄 炜，刘秋红. k次余数补数函数均值的渐进公式[J]. 河南科学，2009，27(12)：1497-1499.

[8] 黄 炜，张转社. k次减法补数的因子函数均值的渐近公式[J]. 海南大学学报：自然科学版，2010，28(1)：11-14.

[9] 黄 炜. 两个包含r角形数补数的复合函数的渐近公式[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，32(3)：4-6.

[10] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[11] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

（编辑 张继学）