Propiedades y Problemas Relacionados con las Funciones de Smarandache

Sebastián Martín Ruiz, Avda. De Regla, 43, Chipiona 11550 (Cádiz), España
M. Perez, Rehoboth, Box 141, NM 87301, E. U.

Resumen:
En este artículo presentamos definiciones y varias propiedades de algunos tipos de funciones de SMARANDACHE que son explicados en varios problemas propuestos resueltos e irresueltos además de algunas conjeturas de teoría de números y matemáticas recreativas. Son también proporcionados algunos ejemplos. Se adjuntan también interesantes problemas resueltos relacionados con el tema junto a este artículo.

1. Introducción

La *Función de Smarandache* más conocida, la cual ha llegado a ser una función clásica en teoría de números es la siguiente:

$S: N^* \rightarrow N^*$, $S(1)=1$, $S(n)$ es el menor entero tal que $S(n)!$ es divisible por n.

Por ejemplo: $S(6)=3$, ya que $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$ que es divisible por 6, y 3 es el menor número con esta propiedad, i.e. 2! no es divisible por 6.
$S(8)=4$, $S(11)=11$.
Esta función ha sido muy estudiada la pasada década y se han descubierto interesantes propiedades en relación a ella.

2. Propiedades:

2.1. Max $\{p$, p es primo y p divide $n\} \leq S(n) \leq n$ para cualquier entero positivo n.
2.2. Si $n = (p_1\hat{\ }s_1)\cdot(p_2\hat{\ }s_2)\cdot\ldots\cdot(p_k\hat{\ }s_k)$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son primos distintos entonces $S(n) = \max\limits_{1\leq i\leq k}\{S(p_i\hat{\ }s_i)\} \leq \max\limits_{1\leq i\leq k}\{p_i\cdot s_i\}$.

2.3.Caracterización de los números primos:

Sea p un entero > 4. Entonces: p es primo si y solo si $S(p)=p$.

Demostración:
Sea p un número primo >4 y supongamos que $S(p)=m<p$, entonces m! no es divisible por p, por tanto $S(p)=p$

Por otro lado, sea $S(p) = p$ y $p \neq 4$; supongamos que p no es primo, por tanto existen dos enteros s y t, con $s \leq t < p$, tal que $p = s\cdot t$, pero entonces $S(p) \leq t \neq p$ ya que t! es divisible por s y t a la vez (i.e. t! Es divisible por p). Contradicción.

2.4 *Una fórmula exacta para calcular el número de primos menores o iguales que x* (L. Seagull):
Si x es un entero ≥ 4, entonces el número de primos $\leq x$ es:

$$\prod(x) = -1 + \sum_{k=2}^{x} \left\lfloor \frac{S(k)}{k} \right\rfloor$$

donde S(k) es la Función de Smarandache clásica, y $\lfloor a \rfloor$
es la parte entera de a (el mayor entero menor o igual que a).
Demostración:
Conocemos que la función de Smarandache tiene la propiedad que si p > 4 entonces S(p) = p si y solo si p es primo, además S(k)<=k para todo k, y S(4)=4 (la única excepción para lo primero),con esto podemos encontrar fácilmente la fórmula exacta para el número de primos menores o iguales que x.

3. **Conjeturas:**
3.1. La ecuación diofántica S(n) = S(n+1) no tiene solución. (L. Tutescu)
3.2. La ecuación diofántica S(n) + S(n+1) = S(n+2) tiene infinitas soluciones (I. M. Radu)

4. **Mas Tipos de Funciones de Smarandache** han sido consideradas y estudiadas, estas son:
4.1 La *Función Doble Factorial de Smarandache*, Sdf(n) es el menor entero tal que Sdf(n)!! es divisible por n, donde el doble factorial se define como:
m!! == 1· 3· 5· ...· m, si m es impar;
y m!! = 2· 4· 6· ...· m, si m es par.
Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
SDF(n)	1	2	3	4	5	6	7	4	9	10	11	6	13	14	5	6

4.2 *Función de Smarandache-Kurepa*:
Para un primo p, SK(p) es el menor entero tal que !SK(p) es divisible por p, donde !m = 0! + 1! + 2! + ... + (m-1)!
Por ejemplo:

p	2	3	7	11	17	19	23	31	37	41	61	71	73	89
SK(p)	2	4	6	6	5	7	7	12	22	16	55	54	42	24

4.3. *Función de Smarandache-Wagstaff*:
Para un primo p, SW(p) es el menor entero tal que W(SW(p)) es divisible por p, donde W(m) = 1! + 2! + ... + (m)!
Por ejemplo:

p	3	11	17	23	29	37	41	43	53	67	73	79	97
SW(p)	2	4	5	12	19	24	32	19	20	20	7	57	6

4.4 *La función Superior de Smarandache de orden k*:
Sk(n) es el menor entero para el cual n divide a Sk(n)^k
Por ejemplo, para k=2, tenemos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
S2(n)	1	2	3	2	5	6	7	4	3	10	11	6	13	14	15	4

4.5. *Función Pseudo-Smarandache:*

Z(n) es el menor entero tal que $1 + 2 + ... + Z(n)$ es divisible por n.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7
Z(n)	1	3	2	3	4	3	6

4.6. *Función Entorno al Primorial de Smarandache* :

SNTP(n) es el menor primo tal que alguno de estos tres valores p# - 1, p# , o p# + 1 es divisible por n,

donde p# , para un número primo p, es el producto de todos los primos menores o iguales que p. Esta función solo existe para valores de n libres de cuadrados.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	59	...
SNTP(n)	2	2	2	?	3	3	3	?	?	5	11	...	13	...

5. **Otros tipos de funciones de Smarandache** que han sido estudiadas los últimos años son:

5.1. Sea $f: Z \rightarrow Z$ una función estrictamente creciente y x un elemento de R, Entonces:

a) *f-Parte Inferior de Smarandache* de x, ISf(x), es el menor k tal que $f(k) \leq x < f(k+1)$.

b) *f-parte Superior Smarandache* de x, SSf(x) es el menor k tal que $f(k) < x \leq f(k+1)$.

Casos Particulares:

a) Parte S-Prima Inferior:

Para cualquier número real n positivo definimos ISp(n) como el mayor primo menor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

2,3,3,5,5,7,7,7,7,11,11,13,13,13,13,17,17,19,19,19,19,23,23.

b) Parte S-Prima Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSp(n) es el menor primo mayor o igual que n:

Los primeros valores de esta función son:

2,2,2,3,5,5,7,7,11,11,11,11,13,13,17,17,17,17,19,19,23,23,23.

c) Parte S-Cuadrada Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos ISs(n) como el mayor cuadrado menor o igual que n:

Los primeros valores de esta función son:

0,1,1,1,4,4,4,4,4,9,9,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,16,16,25,25.

d) Parte S-Cuadrada Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSs(n) como el menor cuadrado mayor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,4,4,4,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,25,25,25,25,25,25,25,25,25,36.

e) Parte S-Cúbica Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos ISc(n) el mayor Cubo menor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,1,1,1,1,1,1,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,27,27,27,27.

f) Parte S-Cúbica Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSc(n) es el menor cubo mayor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,8,8,8,8,8,8,8,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27.

g) Parte S-Factorial Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos ISf(n) el mayor factorial menor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

1,2,2,2,2,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,24,24,24,24,24,24,24.

h) Parte S-Factorial Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSf(n) el menor factorial mayor o igual que n:

Los primeros valores de esta función son:

1,2,6,6,6,6,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,120.

Comentario 1: Esto es una generalización de la parte entera superior/inferior de un número.

5.2. Sea f: $Z \to Z$ una función estrictamente creciente y x un elemento de R. Entonces: definimos la *f-Parte Fraccionaria de Smarandache* de x, FSf(x)=x-ISf(x), donde ISf(x) es la f-Parte Inferior de Smarandache definida arriba.

Casos Particulares:

a)Parte S-Prima Fraccionaria:

FSp(x)=x – ISp(x),

donde ISp(x) es la Parte S-Prima Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSp(12.501) = 12.501 - 11 = 1.501.

b)Parte S-Cuadrada Fraccionaria:

FSs(x) = x - ISs(x),

donde ISs(x) es la Parte S-Cuadrada Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSs(12.501) = 12.501 - 9 = 3.501.

c)Parte S-Cúbica Fraccionaria:

FSc(x) = x - ISc(x),

donde ISc(x) es la Parte S-Cúbica Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSc(12.501) = 12.501 - 8 = 4.501.

d) Parte S-Factorial Fraccionaria:

FSf(x) = x - ISf(x),

donde ISf(x) es la Parte S-Factorial Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSf(12.501) = 12.501 - 6 = 6.501.

Comentario 2.1.: Esto es una generalización de la parte fraccionaria de un número
Comentario 2.2.: De forma similar podemos definir:
-La f-Parte Inferior Fraccionaria de Smarandache:
IFSf(x) = x - ISf(x) = FSf(x);
-La f-Parte Superior Fraccionaria de Smarandache:
SFSf(x) = SSf(x) - x;
por ejemplo: Parte Cúbica Superior Fraccionaria de Smarandache de 12.501=
= 27 - 12.501 = 14.499.

5.3. Sea g: A $\rightarrow$ A una función estrictamente creciente, y sea "~" una ley de composición interna en A. Entonces decimos que f: A $\rightarrow$ A es la *función complementaria de Smarandache respecto de la función g y la ley interna "~"* si:
f(x) es el menor k tal que existe un z en A que verifica
x~k = g(z).
Casos Particulares:
a)Función de Smarandache Complementario del Cuadrado:
f: N $\rightarrow$ N, f(x) = es el menor k tal que x· k es un cuadrado perfecto.
Los primeros valores de esta función son:
1,2,3,1,5,6,7,2,1,10,11,3,14,15,1,17,2,19,5,21,22,23,6,1,26,3,7.
b)Función de Smarandache Complementario del Cubo:
f: N $\rightarrow$ N, f(x) = es el menor k tal que x· k es un cubo perfecto.
Los primeros valores de esta función son:
1,4,9,2,25,36,49,1,3,100,121,18,169,196,225,4,289,12,361,50.
De forma más general:
c)Función de Smarandache Complementario de la Potencia m-ésima:
f: N $\rightarrow$ N, f(x) =es el menor k tal que x· k es una potencia m-ésima
d) Función de Smarandache Complementario del Primo:
f: N $\rightarrow$ N, f(x) = es el menor k tal que x+k es un número primo.
Los primeros valores de esta función son:
1,0,0,1,0,1,0,3,2,1,0,1,0,3,2,1,0,1,0,3,2,1,0,5,4,3,2,1,0,1,0,5.

5.4. *Función S-Multiplicativa*:
es una función f : N* $\rightarrow$ N* tal que para cualquier (a, b) = 1, f(a· b) = max {f(a), f(b)};
[i.e. cumple la principal propiedad de la función de Smarandache].
Las siguientes funciones son obviamente S-multiplicativas:
a) La función constante f :N* $\rightarrow$ N*, f(n) = 1.
b) La función de Smarandache S:N* $\rightarrow$ N, S(n) = max{ p| p! : n}.
Ciertamente muchas propiedades de funciones multiplicativas pueden ser trasladadas a funciones S-multiplicativas.

6. Iteraciones Funcionales de Smarandache:

6.1.*Iteración funcional de Smarandache de Primera Especie*:
Sea $f: A \to A$ una función, tal que $f(x) \leq x$ para todo x, y
$\min \{f(x), x \in A\} \geq m_0 \neq -\infty$.
Supongamos que f tiene en $p \geq 1$ un punto fijo: $m_0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_p$.
[Un punto x es llamado punto fijo si $f(x) = x$.] Entonces:
$SI1_f(x)$ = es el menor número de iteraciones k tal que
$f(f(\ldots f(x)\ldots))$ = constante
iterada k veces.

Ejemplo:
Sea $n > 1$ un número entero, y $d(n)$ el número de divisores positivos de n,
$d: N \to N$.
entonces $SI1_d(n)$ es el menor número de iteraciones k
tal que $d(d(\ldots d(n)\ldots)) = 2$;
iterada k veces
puesto que $d(n) < n$ para $n > 2$, y el punto fijo de la función d es 1
y 2.
Tenemos que $SI1_d(6) = 3$, ya que $d(d(d(6))) = d(d(4)) = d(3) = 2$ = constante.
$SI1_d(5) = 1$, puesto que $d(5) = 2$.

6.2.*Iteración funcional de Smarandache de Segunda especie*:
Sea $g: A \to A$ una función, tal que $g(x) > x$ para todo x, y sea $b > x$. Entonces:
$SI2_g(x, b)$ = es el menor número de iteraciones tal que
$g(g(\ldots g(x)\ldots)) \geq b$.
iterada k veces

Ejemplo:
Sea $n > 1$ un número entero, y $\Sigma(n)$ la suma de los divisores positivos
de n (1 y n incluidos), $\Sigma: N \to N$.

Entonces $SI2_\Sigma(n, b)$ es el menor número de iteraciones k tal que
$\Sigma(\Sigma(\ldots\Sigma(n)\ldots)) \geq b$,
iterada k veces
puesto que $\Sigma(n) > n$ para $n > 1$.
se tiene $SI2_\Sigma(4, 11) = 3$, ya que $\Sigma(\Sigma(\Sigma(4))) = \Sigma(\Sigma(7)) = \Sigma(8) = 15 \geq 11$.

6.3.*Iteración Funcional de Smarandache de Tercera Especie*:
Sea $h: \to A$ una función, tal que $h(x) < x$ para todo x, y sea $b < x$. Estonces:
$SI3_h(x, b)$ = es el menor número de iteraciones k tal que
$h(h(\ldots h(x)\ldots)) \leq b$.
iterada k veces

Ejemplo:
Sea n un número entero y gd(n) el mayor divisor de n, menor que n,
gd: $N^* \to N^*$ con $gd(n) < n$ para $n > 1$.

$SI3_{gd}(60, 3) = 4$, puesto que $gd(gd(gd(gd(60)))) = gd(gd(gd(30))) = gd(gd(15)) = gd(5) = 1 \leq 3$.

7 **Referencias**:

[1] Ashbacher, C., "A Note on the Smarandache Near-To-Primordial Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 46-49, 1996.
[2] Ashbacher, C., "Some Properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions", <Mathematics and Informatics Quarterly>, Vol. 7, No. 3, pp. 114-116, 1997.
[3] Begay, A., "Smarandache Ceil Functions", in <Bulletin of Pure and Applied Sciences>, India, Vol. 16E, No. 2, 227-229, 1997.
[4] Castillo, Jose, "Other Smarandache Type Functions", http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/funct2.txt
[5] Dumitrescu, C., Seleacu, V., "Some notions and questions in number theory", Erhus Univ. Press, Glendale, 1994. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/snaqint.txt
[6] Ibstedt, H., "Smarandache Iterations of First and Second Kinds", <Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society>, Vol. 17, No. 4, Issue 106, 680, 1996.
[7] Kashihara, K., "Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems", Erhus Univ. Press, Vail, USA, 1996. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/Kashihara.pdf
[8] Mudge, Mike, "The Smarandache Near-To-Primordial (S.N.T.P.) Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 45, 1996.
[9] Popescu, Marcela, Nicolescu, Mariana, "About the Smarandache Complementary Cubic Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, no. 1-2-3, 54-62, 1996.
[10] Popescu, Marcela, Seleacu, Vasile, "About the Smarandache Complementary Prime Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 12-22, 1996.
[11] Ruiz, Sebastian Martin, "Applications of Smarandache Function, Prime and Coprime Functions", American Research Press, Rehoboth, 2002; http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SMRuiz-eBook.pdf
[12] Seagull, L., "The smarandache Function and the number of primes up to x", <Mathematical Spectrum>, University of Shielfield, Vol. 28, No. 3, 53, 1995/6. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/FORMULA.TXT
[13] Smarandache, F., "A Function in Number Theory", Analele Univ. Timisoara, XVIII, fasc. 1, 79-88, 1980; http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SFBook1.pdf
[14] Smarandache, Florentin, "Only Problems, not Solutions!", Xiquan Publishing House, Phoenix-Chicago, 1990, 1991, 1993; http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/OPNS.pdf
[15] "The Florentin Smarandache papers" Special Collection, Arizona State University, Hayden Library, Tempe, Box 871006, AZ 85287-1006, USA;

[16] Tabirca, Sabin, "About S-Multiplicative Functions", <Octogon>, Brasov, Vol. 7, No. 1, 169-170, 1999.
[17] Weisstein, Eric W., “CRC Concise Encyclopedia of Mathematics”, CRC Press, Boca raton, 1998.

Otros libros electrónicos de Sucesiones y Funciones de Smarandache pueden bajarse de Internet en la dirección
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm
y hay trabajos de investigación en http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/math.htm.