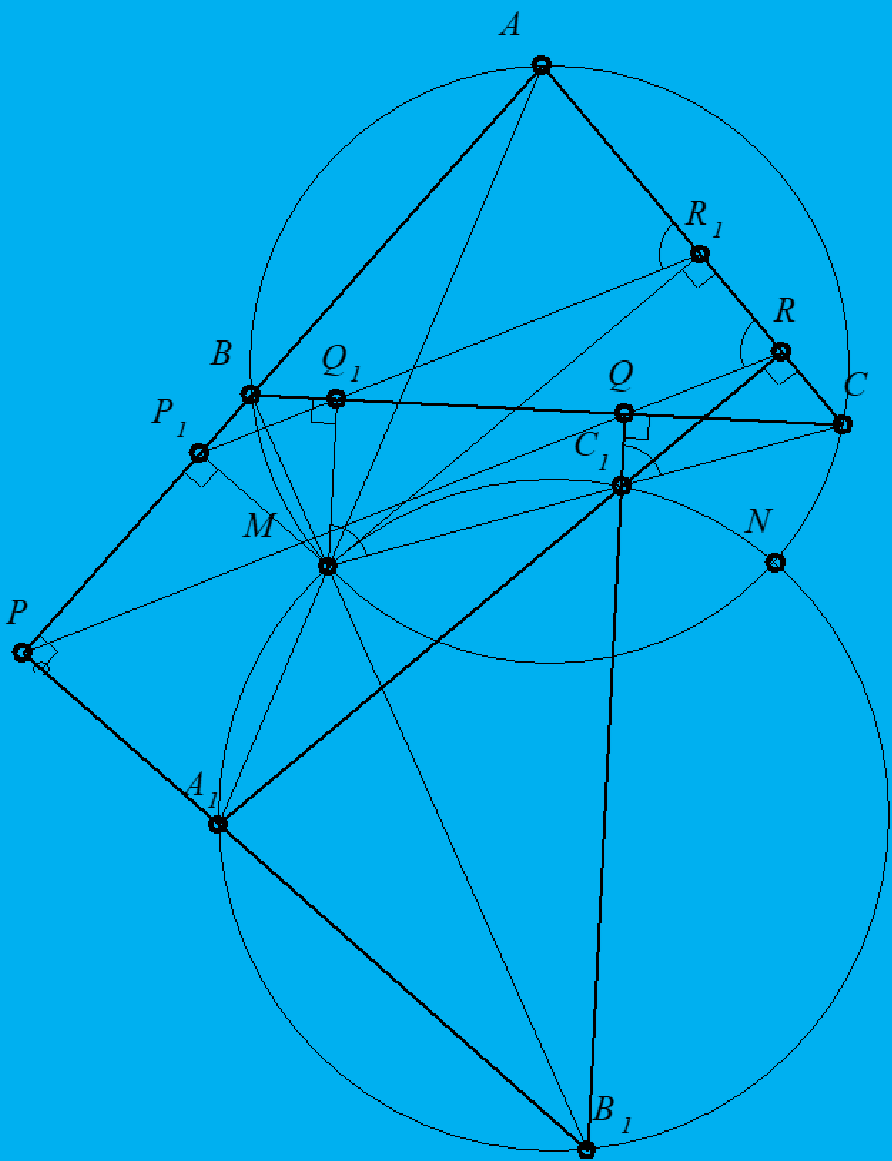
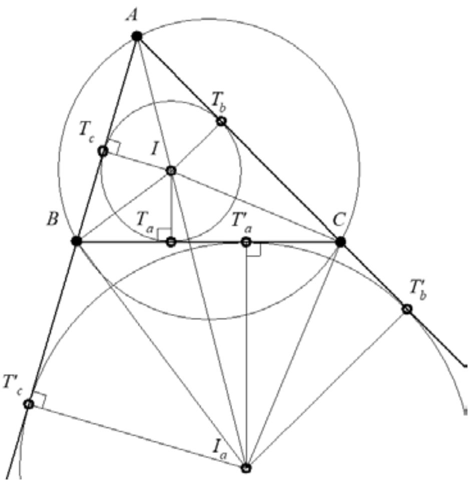
Ion Pătrașcu
Florentin Smarandache

GEOMETRIA TRIUNGHIURILOR ORTOLOGICE



Ion Pătrașcu Florentin Smarandache

GEOMETRIA TRIUNGHIURILOR ORTOLOGICE



Referenți:

Bencze Mihály, prof. dr., Departamentul de Matematică, “Áprily Lajos” Highschool, Brașov, România
Temistocle Bîrsan, prof. univ. dr., Universitatea Tehnică “Gh. Asachi” Iași, România
Claudiu-Ionuț Popîrlan, lector univ. dr., Departamentul de Informatică, Facultatea de Științe, Universitatea din Craiova, România

ISBN 978-1-59973-652-5

DTP: Mihai Șintereag
Oștirii, 4
550388 – Sibiu, România

Ion Pătrașcu
Florentin Smarandache

GEOMETRIA TRIUNGHIURILOR ORTOLOGICE

Editura Agora
Sibiu, 2020

Nepoților mei LUCAS și EVA-MARIE,
cu toată dragostea – ION PĂTRAȘCU

CUPRINS

PREFAȚĂ

Plantele şi copacii cresc perpendicular pe planul tangent la suprafața solului, în punctul de penetrare în sol; în vid, corpurile cad perpendicular pe suprafaţa Pamântului – în ambele cazuri, dacă suprafața este orizontală. Plecând de la proprietatea a două triunghiuri de a fi ortologice, cei doi autori au conceput această lucrare care încearcă să ofere o imagine integratoare a geometriei elementare prin prisma acestui "filtru".

Practic, proprietatea de ortologie este scheletul lucrării de față, care stabileşte cât mai multe conexiuni ale unor teoreme şi proprietăţi geometrice cu aceasta.

Cartea"Geometria triunghiurilor ortologice"este structurată în zece capitole.În primele șapte se face introducerea în temă şi se dezvoltă această idee prin conexarea ei cu alte proprietaţi la fel de frumoase ale geometriei, cum ar fi omologia triunghiurilor.

Capitolul 8 cuprinde trei anexe menite să lamurească anumite categorii de cititori cu privire la unele rezultate folosite în restul capitolelor. Capitolul 9 este o veritabilă culegere de probleme în care apar de regulă triunghiuri ortologice; el este destinat mai ales elevilor care se pregătesc pentru participarea la diferite concursuri de matematică. Ultimul capitol conţine soluţii şi răspunsuri la problemele din capitolul 9. Lucrarea se încheie cu o bogată bibliografie care a fost consultată şi folosită de autori. De remarcat că înaceastă cartese scoateîn evidenţă contribuţia matematicienilor români Traian Lalescu, Gheorghe Ţiţeica, Cezar Coşniţa, Alexandru Pantazi ș.a. la acest tezaur ce îl constituie GEOMETRIA!

Felicităm autorii pentru frumusețea și profunzimea temei alese, fapt explicabil prin pasiunea distinșilor profesori, complementari în lumea complexă a culturii integrale în sens A. Huxley – C. P. Snow:

– Geometrul Ion Patraşcu – profesorul clasic atras de teme incitante precum ortogonalitatea – instrument de dualitate și far în cunoaștere/progres în Matematică;

Omul de știință Florentin Smarandache – reputat și imprevizibil înnoitor în Filosofia Științei, de la Fundamente și pâna la cunoscuta-i lucrare coordonata în 2007 - "Hadron Models and related New Energy issues", vizată și în compoziția noastră pop-simfonică "LHC – Large Hadron Collider . . . ", încărcată și pe YouTube.

Ortogonalitatea este o proprietate geometrică universală, deoarece reprezintă chintesența locală a sistemului {punct M, geodezica g} în orice Spațiu Riemannn-dimensional, în particular în unul Euclidian, pentru n = minimum 2. Le propun cititorilor să încerce o "lectură ortologică" pe sfera clasică, plecând de la sistemul {M, g} și avansând, prin analogie, spre triunghiuri geodezice. Tema poate fi dusă mai departe, în studii postuniversitare/doctorale, în context Riemannian, sub imperiul neverosimilei"Teoreme de scufundare izometrică" (mecanismMAGIC – Mare ATENȚIE!–de "teleportare Nash <inversă>" : din Lumea Euclidiană n-Dim în cea Riemanniană k-Dim, unde k este un polinom de grad cred că 2 sau 3 inn - *see ProfesorulWEB*) a Genialului John Forbes Nash, Jr.

Prof. univ dr.**Valentin Boju**
Membru al Ordinului "Meritul Cultural" al României
în Grad de Ofițer, Categoria H, Cercetare științifică

NOTA AUTORILOR

Ideea scrierii acestei cărți a venit odată cu cea a cărţii noastre anterioare,*Geometria triunghiurilor omologice*.

Ca şi acolo, am încercat să grefăm pe tema centrală, a triunghiurilor ortologice, cât mai multe rezultate din geometria elementară. În mod special a fost tratată legatura dintre triunghiurile ortologice şi cele omologice, s-au trecut în revistă triunghiurile "S", scoase în evidenţă pentru prima oară de marele matematician român Traian Lalescu.

Cartea se adresează deopotrivă acelora care au studiat şi îndrăgesc geometria, cât şi celor care o descoperă acum,prin studiu şi antrenament, în vederea obţinerii de rezultate deosebite la concursurile şcolare.În acest sens, am căutat să demonstrăm unele proprietăţi şi teoreme în mai multe moduri: sintetic, vectorial, analitic.

Practic, cartea seamană întrucâtva cu un roman poliţist de calitate în care urmăriţii sunt triunghiurile ortologice şi, prin cautarea lor, este descoperită, de fapt, GEOMETRIA.

Mulţumim pe această cale, distinsului profesor, **Mihai Miculiţa** din Oradea, care a realizat figurile din lucrare şi a contribuit cu observaţii şi adăugiri interesante care au dus la creşterea valorii acestei carţi.

Prof. gr. I **ION PĂTRAŞCU**
master în matematică
Colegiul National “Fraţii Buzeşti”
Craiova, România
patrascu_ion@yahoo.com

Prof. univ dr. **FLORENTIN SMARANDACHE**
Universitatea New Mexico, SUA
fsmarandache@gmail.com

1

INTRODUCERE

1.1 Triunghiuri ortologice. Definiție

Fie ABC un triunghi oarecare și P un punct în planul său. Construim din P dreptele a_1, b_1, c_1, respectiv perpendiculare pe BC, CA și AB. Pe aceste drepte, considerăm punctele A_1, B_1, C_1, astfel încât acestea să nu fie coliniare (vezi *Figura 1*). Despre triunghiul $A_1B_1C_1$ spunem că este *triunghi ortologic* în raport cu triunghiul ABC, iar despre punctul P spunem că *este centrul de ortologie* al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC.

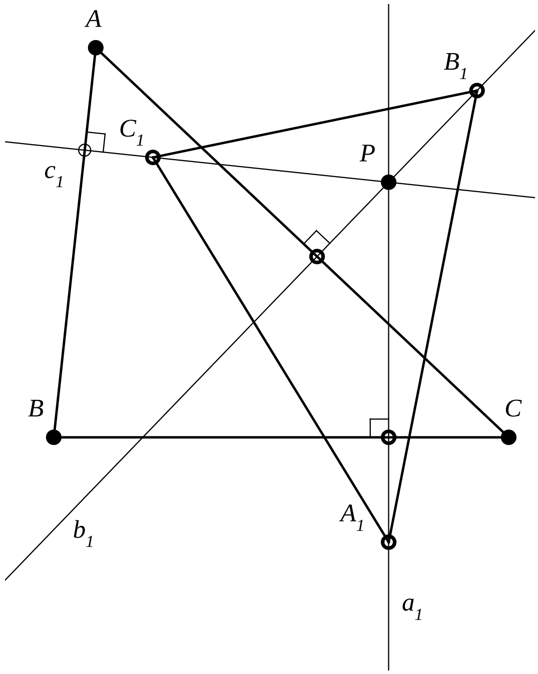


Figura 1

Definiția 1

Spunem că triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC dacă perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA și AB sunt concurente.
Despre punctul de concurență a perpendicularelor anterioare, spunem că este centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC.

Observația 1

Construcția prezentată conduce la concluzia că, fiind dat un triunghi ABC și un punct P în planul său, putem construi o infinitate de triunghiuri $A_nB_nC_n$, astfel încât $A_nB_nC_n$să fie ortologic cu ABC, $n \in \mathbb{N}$.

Exercițiul 1

Fiind dat un triunghi ABC, construiți un triunghi $A_1B_1C_1$ ortologic în raport cu ABC, astfel încât centru de ortologie să fie vârful A.

1.2. Caracterizarea relației de ortologie

Un triunghi ABC poate fi considerat ortologic în raport cu el însuși.

Într-adevăr, perpendicularele duse din A, B, C respectiv pe BC,CA, AB sunt înălțimile triunghiului, deci sunt drepte concurente.

Centrul ortologiei este ortocentrul H al triunghiului.

Putem afirma că relația de ortologie este reflexivă în mulțimea triunghiurilor.

Stabilim în cele ce urmează condiții necesare și suficiente pentru ca două triunghiuri să fie în relație de ortologie.

Un rol important în acest demers îl joacă următoarea teoremă:

Teorema 1 (L. Carnot, 1803)

Dacă A_1, B_1, C_1 sunt puncte respectiv pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC dat, perpendicularele ridicate în aceste puncte pe BC, CA respectiv AB sunt concurente dacă și numai dacă are loc relația:

$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0.$ (1)

Demonstrație

Considerăm că perpendicularele ridicate în A_1, B_1, C_1, pe BC, CA respectiv AB, sunt concurente într-un punct P (vezi *Figura 2*).

Din *Teorema lui Pitagora* aplicată în triunghiurile PA_1B, PA_1C, avem $PB^2 = {PA_1}^2 + A_1B^2$ și $PC^2 = {PA_1}^2 + A_1C^2$.

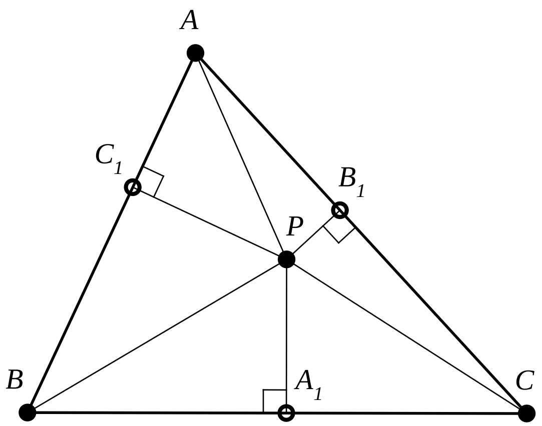


Figura 2

Prin scădere membru cu membru, găsim:

$PB^2 - PC^2 = A_1B^2 - A_1C^2$. (2)

Analog, găsim relațiile:

$PC^2 - PA^2 = B_1C^2 - B_1A^2$, (3)

$PA^2 - PB^2 = C_1A^2 - C_1B^2$. (4)

Prin adunarea membru cu membru a relațiilor (2), (3) și (4), obținem relația (1).

Reciproc

Să presupunem adevărată relația (1) și să demonstrăm concurența perpendicularelor ridicate în A_1, B_1, C_1, respectiv pe BC, CA și AB. Fie P intersecția perpendicularei în A_1 pe BC cu perpendiculara în B_1 pe CA; notăm cu C'_1 proiecția lui P pe AB. Conform celor demonstrate anterior, avem relația:

$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C'_1A^2 - C'_1B^2 = 0$ (5)

Această relație și relația (1) implică:

$C_1A^2 - C_1B^2 = C'_1A^2 - C'_1B^2$ (6)

Demonstrăm că această relație este adevărată dacă și numai dacă $C_1 = C'_1$.

Într-adevăr, să presupunem că:$C_1 \in (AB)$ și că $B \in (AC'_1)$ (vezi *Figura 3*) și că are loc relația (6).

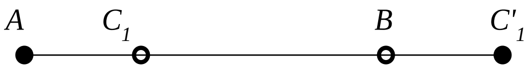


Figura 3

Obținem că:

$(C_1A - C_1B)(C_1A + C_1B) = (C'_1A - C'_1B)(C'_1A + C'_1B)$. (7)

Deoarece $C_1A + C_1B = AB$ și $C'_1A + C'_1B = AB$ din (7) avem că $C_1A - C_1B = C'_1A - C'_1B$ absurd.

Analog, găsim că relația (6) nu poate fi satisfăcută în ipoteza C_1, C'_1 separate de punctele$A$ sau B. Dacă spre exemplu $C_1, C'_1 \in (AB)$, atunci relația (7) conduce la $C_1A = C'_1A$, ceea ce implică $C_1 = C'_1$ și implicația teoremei este demonstrată.

Observația 2

a) Punctele A_1, B_1, C_1 din ipoteza teoremei pot fi coliniare.
b) Dacă punctele A_1, B_1, C_1 din enunțul *Teoremei Carnot* sunt necoliniare, atunci relația (1) exprimă o condiție necesară și suficientă ca triunghiul $A_1B_1C_1$ să fie ortologic în raport cu triunghiul ABC.
c) Din demonstrația *Teoremei Carnot*,s-a desprins formularea următoarei leme:

Lema 1

Locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea $MA^2 - MB^2 = k$, unde A și B sunt două puncte fixe date și k– o constantăreală, este o dreaptă perpendiculară pe AB.

d) *Teorema lui Carnot* poate fi folosită pentru demonstrarea concurenței unor perpendiculare ridicate pe laturile unui triunghi.

Exercițiul 2

Demonstrați cu ajutorul *Teoremei lui Carnot* că:

a) mediatoarele unui triunghi sunt concurente;
b) înălțimile unui triunghi sunt concurente.

Teorema 2

Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri în plan. $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC dacă și numai dacă este adevărată relația:

$$A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2 \qquad (7)$$

Demonstrație

Considerăm că $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu ABC, notăm cu P punctul de ortologie și fie $\{A'\} = BC \cap PA_1$, $\{B'\} = AC \cap B_1P$, $\{C'\} = AB \cap PC_1$ (vezi *Figura 4*); demonstrăm relația (7).

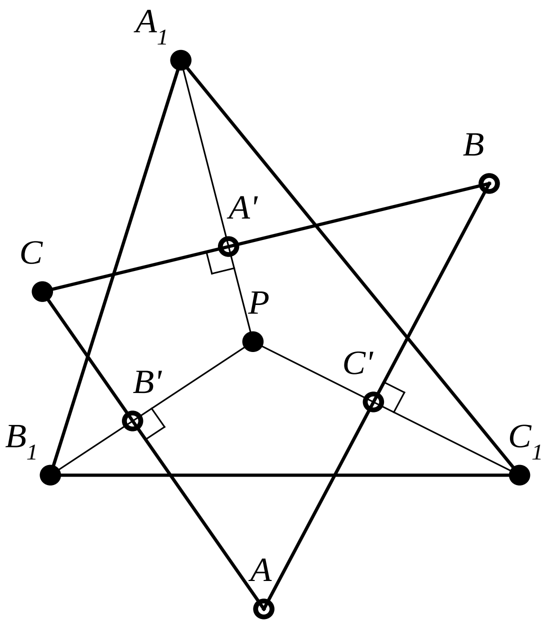


Figura 4

Conform *Teoremei 1*, avem:

$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0 \qquad (8)$$

Dar: $A'B^2 - A'C^2 = A_1B^2 - A_1C^2$ (Teorema lui Pitagora).

Analog, $B'C^2 - B'A^2 = B_1C^2 - B_1A^2$ și $C'A^2 - C'B^2 = C_1A^2 - C_1B^2$.

Adunând membru cu membru, aceste ultime (3) relații și ținând seama de (8) deducem relația (7).

Reciproc

Să considerăm că triunghiurile A_1, B_1, C_1 și ABC sunt astfel încât este satisfăcută relația (7) și demonstrăm că A_1, B_1, C_1 este ortologic în raport cu ABC.

*Teorema lui Pitagora*și relația (7) conduc la:

$A'C^2 - A'B^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0.$

Conform *Teoremei 1*, perpendicularele în A', B', C' pe BC, CA, AB (și care trec respectiv prin A_1, B_1, C_1 este concurentă, deci triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC.

O altă modalitate de a stabili ortologia a două triunghiuri este dată de:

Teorema 3

Triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC dacă și numai dacă pentru orice punct M din planul lor are loc relația:

$\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$ (9)

Demonstrație

Notăm $E(M) = \overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC_1} \cdot \overrightarrow{AB}$ și demonstrăm că $E(M)$ are această valoare oricare ar fi M.

Fie $E(N) = \overrightarrow{NA_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NB_1} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NC_1} \cdot \overrightarrow{AB}$, unde N este un punct din plan diferit de M.

Avem:

$E(M) - E(N) = \left(\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{NA_1}\right) \cdot \overrightarrow{BC} +$

$+\left(\overrightarrow{MB_1} - \overrightarrow{NB_1}\right) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MC_1} - \overrightarrow{NC_1}) \cdot \overrightarrow{AB}.$

Deci$E(M) - E(N) = \overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}).$

Deoarece $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, rezultă că $E(M) - E(N) = \overrightarrow{MN} \cdot \vec{0} = 0.$

Am demonstrat că dacă relația (9) este adevărată pentru un punct din plan, atunci ea este adevărată pentru orice alt punct al planului.

Să considerăm acum că triunghiul$A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC și că P este centrul de ortologie.

Evident $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PB_1} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PC_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ și prin urmare relația (9) este adevărată pentru punctul P, deci ea este adevărată și pentru orice alt punct M din plan.

Reciproc

Dacă relația (9) este satisfăcută, să demonstrăm că triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC.

Să notăm M intersecția perpendicularei dată din A_1 pe BC cu perpendiculara dusă din B_1 pe CA.

Relația (9) devine în acest caz: $\overrightarrow{MC_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, ceea ce arată că MC_1 este perpendiculară pe AB și în consecință triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport în ABC punctul M fiind centrul de ortologie.

Observația 3

Din *Teorema 3*, reținem că pentru a demonstra că un triunghi$A_1B_1C_1$, este ortologic în raport cu alt triunghi ABC este suficient să arătăm că există un punct M în planul lor astfel încât relația (9) să fie satisfăcută.

1.3. Teorema triunghiurilor ortologice

Am observat că relația de ortologie, în mulțimea triunghiurilor din plan, este *reflexivă*.

Teorema care urmează arată că relația de ortologie este *simetrică*.

Teorema 4 (J. Steiner, 1828 – Teorema triunghiurilor ortologice)

Dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC atunci și în triunghiul ABC este ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$.

Demonstrația 1

Se bazează pe *Teorema 2*. Relația (7), fiind simetrică, o putem scrie:

$$AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 \qquad (10)$$

Din *Teorema 2*, rezultă că triunghiul ABC este ortologic în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

Demonstrația 2

Folosim *Teorema 3*.Fie triunghiul $A_1B_1C_1$, ortologic în raport cu triunghiul ABC, atunci are loc relația (9), considerăm în această $M = A_1$, rezultă: $\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0$, adică cu relația (9) în care $M = A$, ceea ce arată că triunghiul ABC este ortologic în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

Demonstrația 3

Fie P centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$, în raport cu triunghiul ABC, iar P_1 punctul de intersecție al perpendicularelor duse din A și B respectiv pe B_1C_1 și C_1A_1 (vezi *Figura 5*).

Vom nota $\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{PC_1} = \overrightarrow{c_1}$ și$\overrightarrow{P_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{P_1B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{P_1C} = \vec{c}$.

Din ipoteză, deducem că $\overrightarrow{a_1} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, $\overrightarrow{b_1} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$ și

$\overrightarrow{a_1} \cdot (\overrightarrow{b_1} - \vec{c}_1) = \vec{b} \cdot (\vec{c}_1 - \vec{a}_1) = 0$.

Folosind identitatea evidentă: $\overrightarrow{a_1} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + \overrightarrow{b_1} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) + \overrightarrow{c_1} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\overrightarrow{b_1} - \vec{c}_1) + \vec{b} \cdot (\vec{c}_1 - \vec{a}_1) + \vec{c} \cdot (\vec{a}_1 - \vec{c}_1)$, deducem că $\vec{c} \cdot (\vec{a}_1 - \vec{c}_1) = 0$, adică $P_1C \perp AB$, ceea ce arată că triunghiul ABC este ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$, centrul ortologiei fiind în punctul P_1.

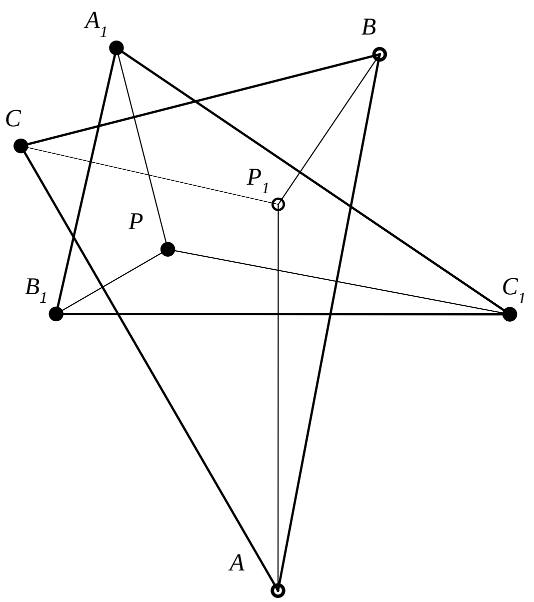


Figura 5

Demonstrația 4

Notăm cu $A'B'C'$ triunghiul pedal al centrului P de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC (vezi *Figura 6*). De asemenea, notăm cu A'', B'', C'' intersecțiile cu BC, CA, AB ale perpendicularelor duse din A, B, C respectiv pe B_1C_1, C_1A_1 și $A'B'$.

Avem: $\Delta A''AB \sim \Delta A'C_1P$ (pentru că $\sphericalangle A''AB \equiv \sphericalangle A'C_1P$ și $\widehat{ABA''} \equiv \widehat{C_1PA'}$ ca unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare). Rezultă:

$$\frac{A''A}{A'C_1} = \frac{A''B}{A'P}. \tag{1}$$

$\Delta A''AC \sim \Delta A'B_1P$ (pentru că $\sphericalangle A''AC \equiv \sphericalangle A'B_1P$ și $\widehat{ACA''} \equiv \widehat{B_1PA'}$ ca unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare). Rezultă:

$$\frac{A''A}{A'B_1} = \frac{A''C}{A'P}. \tag{2}$$

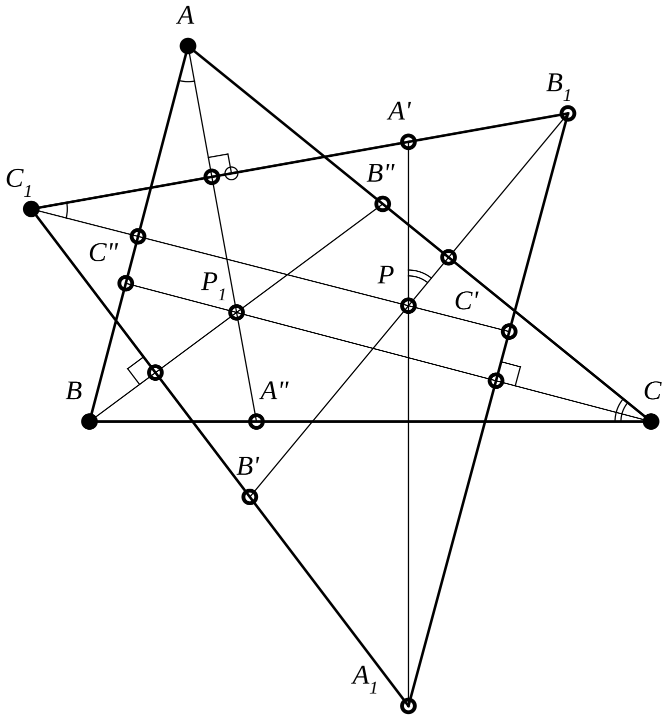


Figura 6

Din relațiile (1) și (2), obținem că:

$\frac{A'B_1}{A'C_1} = \frac{A''B}{A''C}$ (3).

Analog, vom obține că:

$$\frac{B'C_1}{B'A_1} = \frac{B''C}{B''A}, \tag{4}$$

$$\frac{C'A_1}{C'B_1} = \frac{C''A}{C''B}. \tag{5}$$

Deoarece A_1A', B_1B', C_1C' sunt concurente în P, din *Teorema lui Ceva* obținem că:

$$\frac{A'B_1}{A'C_1} \cdot \frac{B'C_1}{B'A_1} \cdot \frac{C'A_1}{C'B_1} = 1. \tag{6}$$

Relațiile (3), (4), (5) și (6) și *Teorema lui Ceva* arată că și cevienele AA'', BB'', CC'' sunt concurente, prin urmare și triunghiul ABC este ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$.

Demonstrația 5

Fie P centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC. Notăm cu A_2, B_2 și C_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor B_1PC_1, C_1PA_1, A_1PB_1 (vezi *Figura 7*).

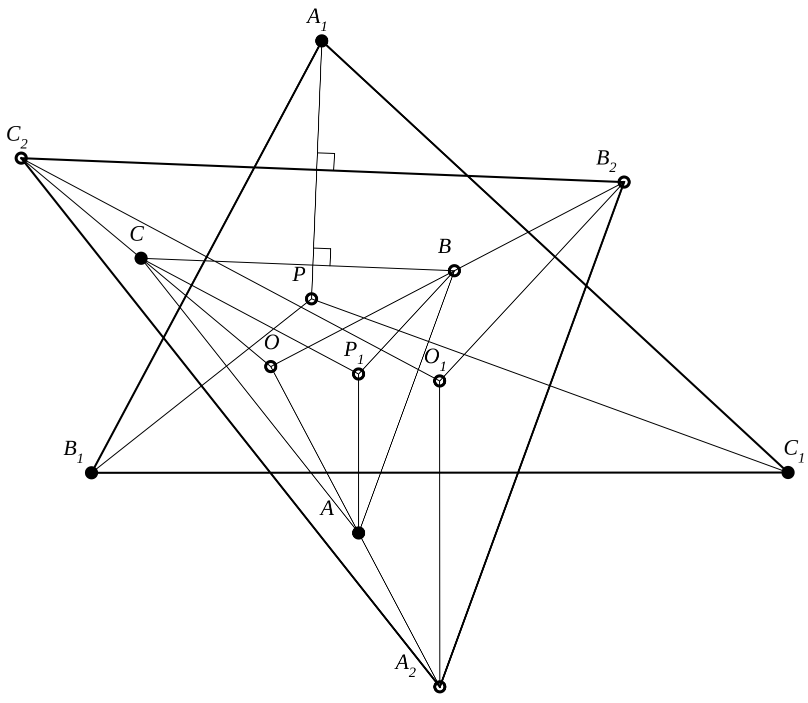


Figura 7

Liniile centrelor B_2C_2; C_2A_2; A_2B_2 fiind mediatoarele segmentelor PA_1, PB_1, respectiv PC_1, sunt paralele cu laturile triunghiului ABC. Triunghiurile $A_2B_2C_2$ și ABC sunt omotetice (având laturile paralele), iar centrul omotetiei a fost notat cu O.

Perpendicularele din A_2, B_2 și C_2 pe laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt chiar mediatoarele acestuia și, prin urmare, sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$, pe care îl notăm O_1. Deoarece triunghiurile $A_2B_2C_2$ și ABC sunt omotetice, rezultă că și perpendicularele duse din A; B, C pe B_1C_1, C_1A_1, respectiv A_1B_1, vor fi concurente (sunt paralele cu A_2O_1, B_2O_1 și C_2O_1) într-un punct P_1, ceea ce arată că triunghiul ABC este ortologic în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

Remarca 1

Teorema triunghiurilor ortologice arată că, în mulțimea triunghiurilor din plan, *relația de ortologie este simetrică*.

Remarca 2

Spunând că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt ortologice, este evident că trebuie să convenim că ordinea vârfurilor la cele două triunghiuri a fost pusă în acord.

Demonstrația 6 (analitică)

Considerăm triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC astfel încât: $A_1(a_1, a_2)$, $B_1(b_1, b_2)$, $C_1(c_1, c_2)$, $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ (vezi *Figura 8*).

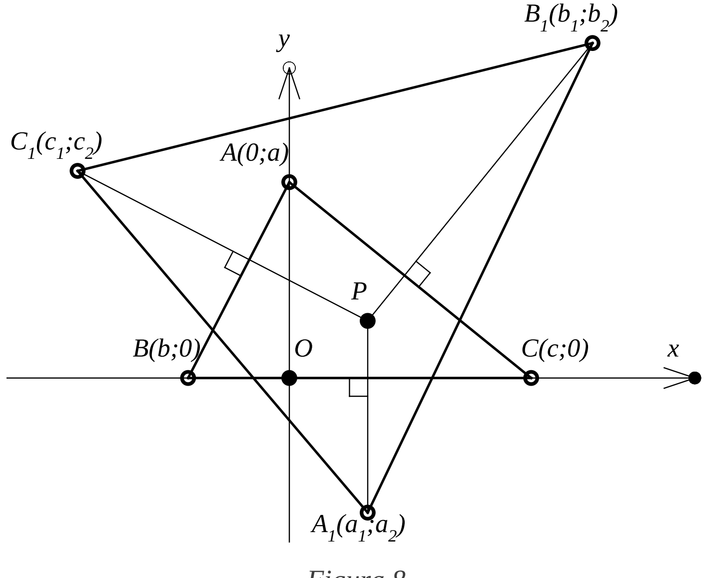


Figura 8

Ecuațiile laturilor BC, AB, AC sunt:

BC: $y = 0$,

AB: $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} - 1 = 0$,

AC: $\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1 = 0$.

Perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA, respectiv AB au ecuațiile:

$x - a_1 = 0$, $y - b_2 = \frac{c}{a}(x - b_1)$, $y - c_2 = \frac{b}{a}(x - c_1)$.

Faptul că aceste perpendiculare sunt concurente într-un punct P (vezi *Figura 8*) este exprimat de condiția:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ c & -a & ab_2 - cb_1 \\ b & -a & ac_2 - bc_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

Această condiție se poate scrie echivalent:

$$a(b_2 - c_2) + b(c_1 - a_1) + c(a_1 - b_1) = 0 \qquad (12)$$

Ecuațiile laturilor triunghiului$A_1B_1C_1$ sunt:

B_1C_1: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ sau

$(b_2 - c_2)x - (b_1 - c_1)y + b_1c_2 - b_2c_1 = 0$;

C_1A_1: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ sau

$(a_2 - c_2)x - (a_1 - c_1)y + a_1c_2 - a_2c_1 = 0$;

A_1B_1: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ sau

$(a_2 - b_2)x - (a_1 - b_2)y + a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Pantele acestor drepte sunt:

$m_{B_1C_1} = \frac{b_2 - c_2}{b_1 - c_1}$, $m_{C_1A_1} = \frac{a_2 - c_2}{a_1 - c_1}$, $m_{A_1B_1} = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_2}$.

Perpendicularele duse din A, B, C respectiv pe B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1 au ecuațiile:

$y - a = \frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2}x$,

$y = -\frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2}(x - b)$,

$y = -\frac{a_1 - b_1}{a_2 - c_2}(x - c)$.

Concurența acestor drepte este exprimată de condiția:

$$\begin{vmatrix} b_1 - c_1 & b_2 - c_2 & -a(b_2 - c_2) \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 & -b(a_1 - c_1) \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & -c(a_1 - b_1) \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

În acest determinant, dacă din linia 1 scădem linia 2 și adunăm linia 3 ($L_1 \to L_1 - L_2 + L_3$), în determinantul obținut, ținând seama de condiția (12), găsim că linia întâi este nulă, deci determinantul este nul, și condiția (13) este satisfăcută.

Definiția 2

Dacă două triunghiuri ortologice au centrele de ortologie diferite, vom spune că dreapta determinată de acestea este axa de ortologie a triunghiurilor.

Problema 1

Arătați că relația de ortologie în mulțimea triunghiurilor din plan nu este o relație tranzitivă.

Problema 2

Fie ABC un triunghi, P un punct în interiorul său și O_A, O_B, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor PBC, PCA respectiv PAB. Demonstrați că triunghiurile ABC și $O_AO_BO_C$ sunt ortologice. Precizați axa de ortologie.

2

TRIUNGHIURI ORTOLOGICE REMARCABILE

2.1 Un triunghi și triunghiul său complementar

Definiția 3

Se numește *triunghi complementar* sau *triunghi median* al unui triunghi dat triunghiul determinat de mijloacele laturilor acelui triunghi.

Propoziția 1

Un triunghi dat și triunghiul său complementar sunt triunghiuri ortologice.

Centrele de ortologie sunt respectiv ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului dat.

Demonstrație

Notăm $A_1B_1C_1$ triunghiul complementar al triunghiului dat ABC (vezi *Figura 9*).

Deoarece B_1C_1 este linie mijlocie în triunghiul ABC, perpendiculara din A pe B_1C_1 va fi și înălțimea din A a triunghiului ABC; analog, perpedincularele din B și C pe C_1A_1, respectiv A_1B_1 sunt înălțimi.

Înălțimile triunghiului ABC, fiind concurente în H ortocentrul triunghiului, rezultă că ABC este ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$.

Perpendicularele din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA, AB sunt mediatoarele triunghiului ABC, deci O centrul cercului circumscris triunghiului ABC este centrul de ortologie al triunghiului complementar în raport cu triunghiul ABC.

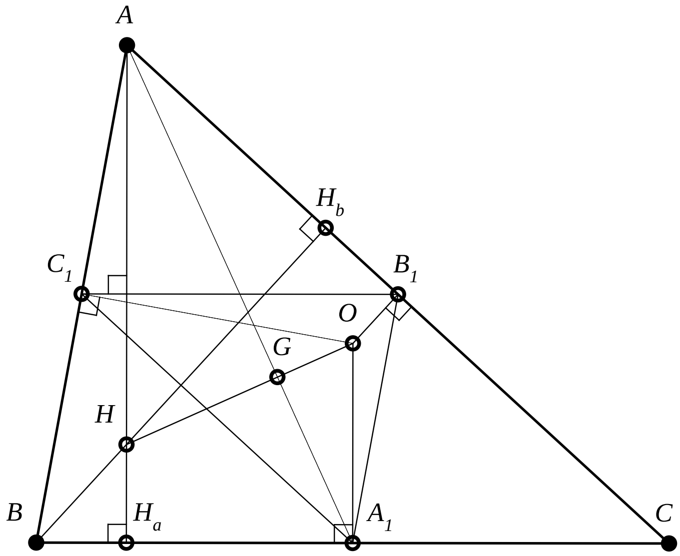


Figura 9

Observația 4

a) Centrul cercului circumscris triunghiului ABC, O, este ortocentrul triunghiului complementar $A_1B_1C_1$.

b) Triunghiul ABC și triunghiul său complementar sunt omotetice prin omotetia $h\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Centrul omotetiei este G – centrul de greutate al triunghiului ABC.

c) Punctele H, G, O sunt coliniare, dreapta lor se numește *dreapta lui Euler*.

Problema 3

Fie ABC un triunghi dat, $A_1B_1C_1$ triunghiul său complementar și $A_2B_2C_2$ triunghiul complementar al triunghiului $A_1B_1C_1$. Demonstrați că triunghiul ABC și triunghiul $A_2B_2C_2$ sunt ortologice. Precizați centrele de ortologie.

2.2 Un triunghi și triunghiul său anticomplementar

Definiția 4

Se numește *triunghi anticomplementar* al unui triunghi dat triunghiul determinat de paralele duse prin vârfurile triunghiului la laturile opuse ale acestuia.

Propoziția 2

Un triunghi dat și triunghiul său anticomplementar sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt centrul cercului circumscris și ortocentrul triunghiului anticomplementar.

Demonstrație

Demonstrația propoziției este imediată dacă ținem seama de faptul că pentru triunghiul anticomplementar $A_1B_1C_1$ al triunghiului dat ABC (vezi *Figura 10*), acesta din urmă este triunghi complementar.

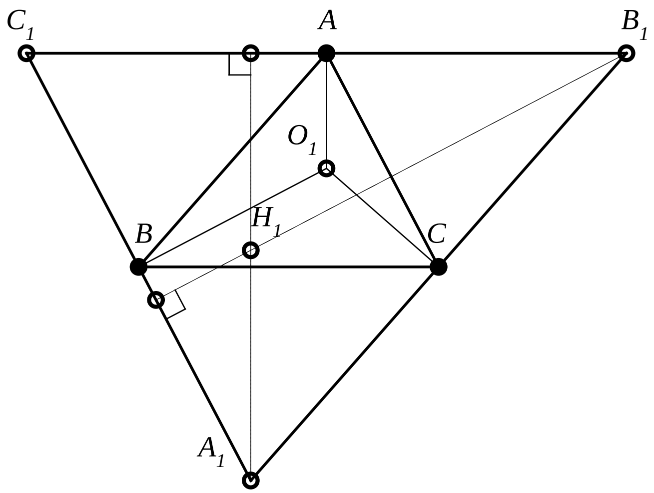


Figura 10

Suntem astfel în condițiile *Propoziției 1*.Oricum, se observă imediat că perpendicularele ridicate în A, B, C respectiv pe B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1 sunt mediatoarele triunghiului $A_1B_1C_1$, iar perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA și AB sunt înălțimile triunghiului anticomplementar.

Observația 5

a) Centrul cercului circumscris triunghiului anticomplementaral unui triunghi este este ortocentrul triunghiului dat.
b) Triunghiurile anticomplementar și complementar ale unui triunghi dat sunt omotetice prin omotetia cu centrul în centrul de greutate al triunghiului dat și de raport 4:1.
c) Triunghiurile anticomplementar și complementar ale unui triunghi dat sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului dat.

2.3 Un triunghi și triunghiul său ortic

Definiția 5

Se numește *triunghi ortic* al unui triunghi (nedreptunghic) dat triunghiul format din picioarele înălțimilor triunghiului dat.

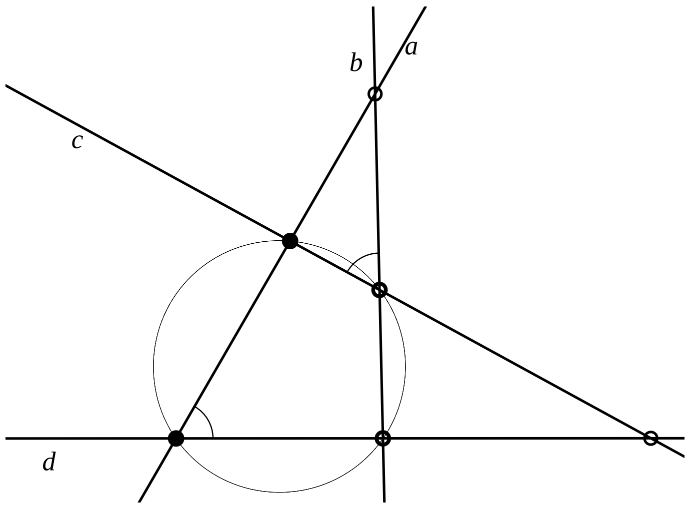


Figura 11

Observația 6

Pentru un triunghi dreptunghic nu se definește noțiunea de triunghi ortic.

Definiția 6

Spunem că dreptele c, d sunt *antiparalele* în raport cu dreptele concurente a și b dacă unghiul făcut de dreptele a și d este congruent cu unghiul făcut de dreptele b și c.

În *Figura 11*, dreptele (c, d) sunt antiparalele în raport cu (a, b); $\sphericalangle(a, d) \equiv \sphericalangle(b, c)$.

Observația 7

a) Dreptele (c, d) antiparalele cu (a, b) formează cu acestea un patrulater inscriptibil.
b) Dacă c, d sunt antiparalele în raport cu a, b, atunci și dreptele a, b sunt antiparalele în raport cu dreptele c, d.

Propoziția 3

Dacă dreptele c, d sunt antiparalele în raport cu dreptele a, b și dreapta c' este paralelă cu c, atunci dreptele c', d sunt antiparalele în raport cu a, b.

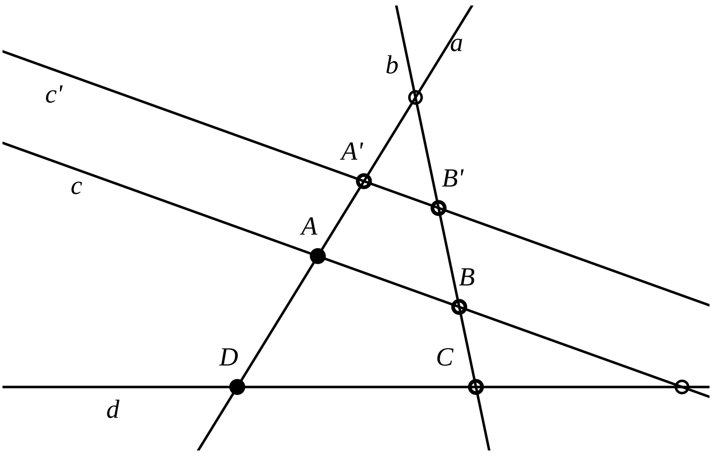


Figura 12

Demonstrație

În *Figura 12*, am notat A, B, C, D vârfurile patrulaterului inscriptibil determinat de antiparalele c, d în raport cu dreptele a, b.

Notăm cu A' și B' intersecțiile paralelei c' cu a respectiv b, observăm că patrulaterul $A'B'CD$ este inscriptibil și, în consecință, c', d sunt antiparalele în raport cu a, b.

Remarca 3

Dacă ABC este un triunghi neisoscel($AB \neq AC$) și dreapta a intersectează AB respectiv AC în A' și B' astfel încât $\sphericalangle AB'A' \equiv \sphericalangle ABC$, vom spune despre a și BC că sunt antiparalele sau că a este o antiparalelă la BC (vezi *Figura 13*).

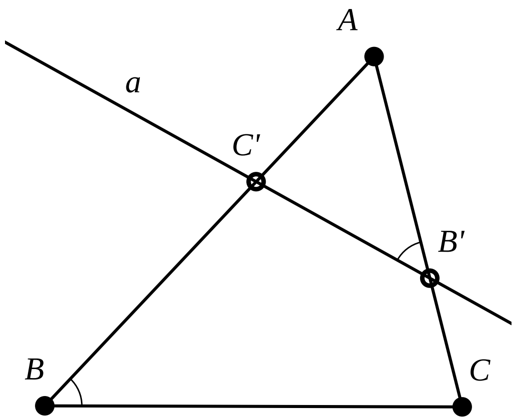


Figura 13

Propoziția 4

Triunghiul ortic al unui triunghi neisoscel dat are laturile respectiv antiparalele cu laturile acestui triunghi.

Demonstrație

În *Figura 14*, am considerat ABCun triunghi obtuzunghic și $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic. Deoarece $\sphericalangle BB_1C = \sphericalangle BC_1C = 90^0$, rezultă că patrulaterul BCB_1C_1este inscriptibil și, în consecință, B_1C_1 este antiparalelă la BC. Analog, se arată că A_1C_1 și A_1B_1 sunt antiparalele la AC și respectiv AB.

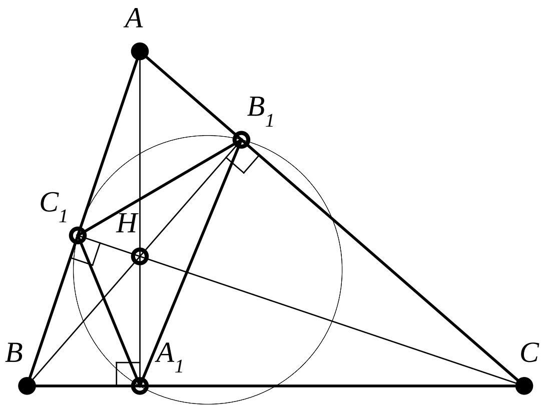


Figura 14

Propoziția 5

Într-un triunghi (neisoscel), tangenta într-un vârf la cercul circumscris este antiparalelă cu latura opusă.

Demonstrație

FiePA tangenta la cercul circumscris triunghiului ABC (vezi *Figura 15*). Avem $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle ACB$ (unghiuri înscrise cu aceeași măsură). Relația anterioară arată că PA și BC sunt antiparalele în raport cu AB și AC.

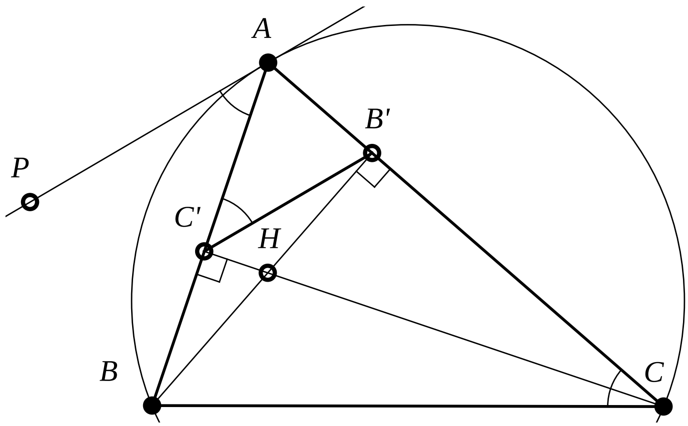


Figura 15

Remarca 4

Dacă ducem proiecțiile lui B și C pe AC respectiv AB și le notăm cu B' respectiv C', observăm că:

Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralelă la latura $B'C'$ a triunghiului ortic $A'B'C'$ al acestui triunghi.

Într-adevăr, am stabilit în *Propoziția 4* că $B'C'$ este antiparalelă cu BC și cum $\sphericalangle A'C'B' \equiv \sphericalangle ACB$ ținând cont de relația (4), obținem că $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle AC'B'$ ceea ce arată că $PA \parallel B'C'$.

Propoziția 6

Un triunghi dat și triunghiul său ortic sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt centrul cercului circumscris și ortocentrul triunghiului dat.

Demonstrație

Considerăm triunghiul ascuțitunghic ABC și fie $A'B'C'$ triunghiul să ortic (vezi *Figura 16*).

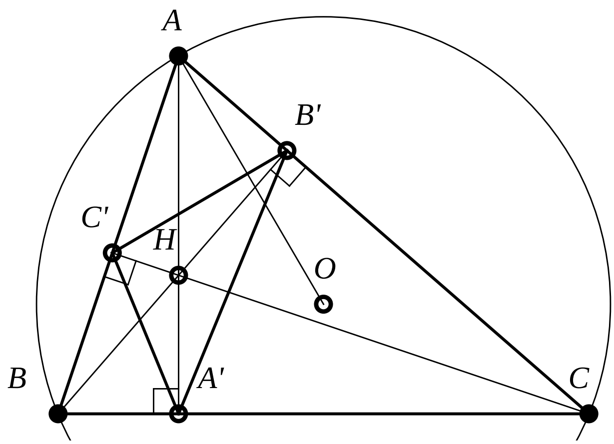


Figura 16

Evident, înălțimile $A'A$, $B'B$, $C'C$ sunt concurente în ortocentrul H, prin urmare $A'B'C'$ este ortologic în raport cu ABC.

Din teorema triunghiurilor ortologice, rezultă că și ABC este ortologic în raport cu $A'B'C'$. Să arătăm că centrul de ortologie este O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Perpendiculara dusă din A pe $B'C'$, având în vedere *Propoziția 4*, este perpendiculară și pe tangenta în A la cercul circumscris, deci trece prin O. Analog, pependicularele din B și C pe $A'C'$, respectiv $A'B'$ trec prin centrul cercului circumscris.

Teorema se demonstrează analog și în cazul triunghiului ABC – obtuzunghic.

Remarca 5

Centrele de ortologie H și O sunt puncte conjugate izogonal.

Observația 8

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt omologice. Centrul omologiei este H, iar axa omologiei este axa ortică (vezi [24]).

2.4 Triunghiul median și triunghiul ortic

Teorema 5

Într-un triunghi dat, triunghiul median, triunghiul ortic și triunghiul cu vârfurile în mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfurile triunghiului dat sunt înscrise în același cerc (*Cercul celor nouă puncte*).

Demonstrație

Notăm $A_1B_1C_1$ triunghiul ortic, $A_2B_2C_2$ triunghiul median și A_3, B_3, C_3, mijloacele segmentelor HA, HB, HC (H – ortocentrul triunghiului ABC, vezi *Figura 17*).

Avem că B_2C_3 este linie mijlocie în triunghiul AHC, deci $B_2C_3 \parallel AH$ și $B_2C_3 = \frac{1}{2}AH$. Analog, A_2C_3 este linie mijlocie în triunghiul BHC, deci $A_2C_3 \parallel BH$; cum $OB_2 \perp AC$, deci $OB_2 \parallel BH$, avem că $A_2C_3 \parallel OB_2$ și având $OA_2 \parallel B_2C_3$, rezultă că patrulaterul $OA_2C_3B_2$ este paralelogram, prin urmare $B_2C_3 = OA_2$. Deoarece $OA_2 \parallel A_3H$ și $(OA_2) = (A_3H)$ obținem că: patrulaterul OA_2HA_3 este paralelogram. Notând cu O_9 mijlocul segmentului OH, avem că A_3, O_9, A_2 sunt coliniare și $O_9A_3 = O_9A_2$.

Deoarece O_9A_3 este linie mijlocie în triunghiul AHO, avem că: $O_9A_3 = \frac{1}{2}OA$, deci $O_9A_3 = \frac{1}{2}R$. În triunghiul dreptunghic $A_3A_1A_2$, A_1O_9 este mediană, deci $A_1O_9 = O_9A_3 = O_9A_2 = \frac{1}{2}R$.

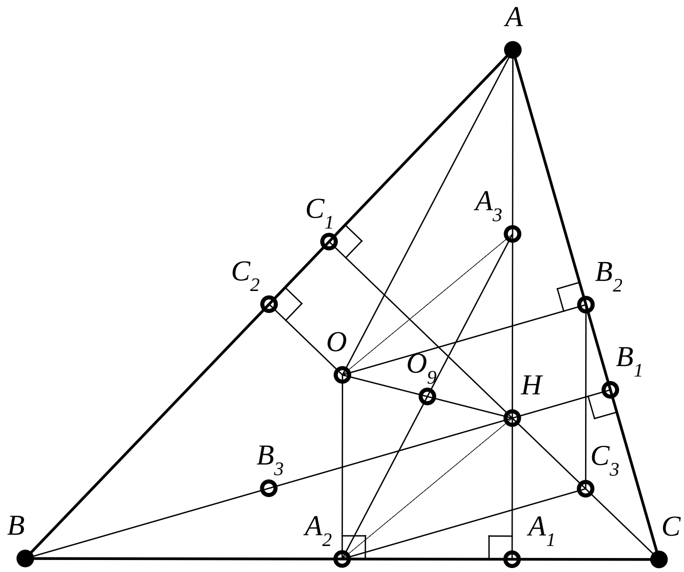


Figura 17

Analog, rezultă că punctele B_1, B_2, B_3 sunt la distanța $\frac{1}{2}R$ deO_9 și de asemenea punctele C_1, C_2, C_3. Cercul punctelor A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 se mai numește și cercul lui Euler, după cum s-a văzut raza acestuia este jumătate din raza cercului circumscris triunghiului dat.

Observația 9

a) Triunghiul median și triunghiul determinat de mijloacele segmentelor HA, HB, HC sunt congruente.
b) Demonstrația *Teoremei 5*se face în același mod dacă triunghiul ABC este obtuzunghic.
c) *Cercul lui Euler* este omoteticul cercului circumscris triunghiului prin omotetia de centru H și de raport $\frac{1}{2}$.
d) Din observația precedentă, rezultă două proprietăți utile în legătură cu ortocentrul unui triunghi, și anume:

Propoziția 7

Simetricul ortocentrului unui triunghi față de laturile triunghiului aparțin cercului circumscris.

Propoziția 8

Simetricele ortocentrului unui triunghi față de vârfurile triunghiului median aparțin cercului circumscris triunghiului dat.

Propoziția 9

Triunghiul median și triunghiul ortic al unui triunghi dat sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt centrul cercului celor nouă puncte și ortocentrul triunghiului dat.

Demonstrație

Segmentul A_2A_3 este diametru în cercul celor nouă puncte, având $B_1A_2 = C_1A_2 = \frac{1}{2}BC$ (mediane în triunghiuri dreptunghice) și $\sphericalangle A_2B_1A_3 \equiv \sphericalangle A_2C_1A_3 = 90^0$, avem că $\Delta A_2B_1A_3 \equiv \Delta A_2C_1A_3$, deci și $A_3B_1 \equiv A_3C_1$ și, prin urmare, A_2A_3 este mediatoarea segmentului B_1C_1. Analog, se arată că perpendiculara din B_2 pe A_1C_1 trece prin centrul O_9al cercului celor nouă puncte. Faptul că ortocentrul H este centrul de ortologie al triunghiului ortic în raport în triunghiul median este evident.

Observația 10

Putem demonstra că perpendiculara din A_2 pe B_1C_1 trece prin O_9 și, ținând seama că B_1C_1 este antiparalelă la BC, deci B_1C_1 este paralelă cu tangenta în A_2 la cercul celor nouă puncte și ca atare perpendiculara din A_2 pe B_1C_1, fiind perpendiculară pe tangenta în A_2 trece prin centrul cerccului O_9.

Problema 4

Arătați că triunghiul complementar și triunghiul anticomplementar al unui triunghi dat sunt triunghiuri ortologice. Precizați centrele de ortologie.

Problema 5

Arătați că triunghiul ortic și triunghiul anticomplementar al unui triunghi dat sunt triunghiuri ortologice. Precizați centrele de ortologie.

2.5 Un triunghi și triunghiul său de contact

Definiția 7

Numim *triunghi de contact* al unui triunghi dat triunghiul determinat de punctele de tangentă (contact) ale cercului înscris în triunghi cu laturile acestuia.

Observația 11

În *Figura 18*, triunghiul de contact al triunghiului ABC a fost notat cu $C_a C_b C_c$. I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC (intersecția biectoarelor).

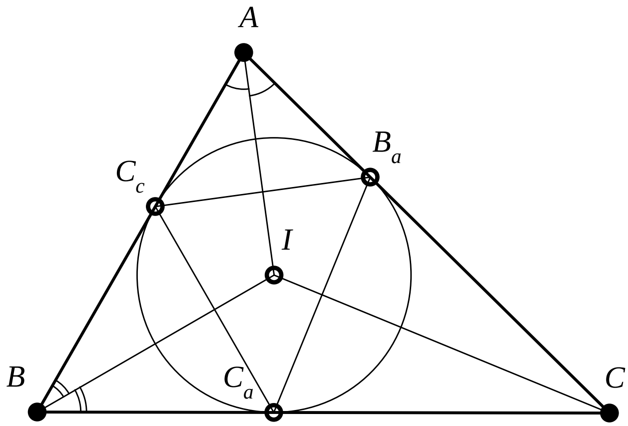


Figura 18

Propoziția 10

Un triunghi dat și triunghiul său de contact sunt triunghiuri ortologice. Centrele de contact ale acestor triunghiuri coincid cu centrul cercului înscris în triunghiul dat.

Demonstrație

Vom folosi *Figura 18*. Tangentele AC_b, AC_c duse din A la cercul înscris sunt egale, deci perpendiculara dusă din A pe $C_b C_c$ este bisectoarea unghiului BAC, care, evident, trece prin I. Perpendiculara dusă din C_a pe BC este rază a cercului înscris, deci conține centrul I al cercului, punct ce este centrul comun al celor două ortologii între triunghiurile considerate.

Observația 12

a) Triunghiul ABC și triunghiul său de contact $C_aC_bC_c$ sunt triunghiuri bilogice.

b) Triunghiurile ABC și $C_aC_bC_c$ sunt triunghiuri omologice, centrul omologiei fiind *punctul lui Gergonne*, iar axa omologiei fiind *dreapta lui Lemoine* (vezi [24]).

Propoziția 11

Triunghiul de contact și triunghiul median al unui triunghi dat sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiul dat și în triunghiul median al triunghiului dat.

Demonstrație

Notăm $A_1B_1C_1$ triunghiul median al triunghiului dat ABC (vezi *Figura 1*9), deoarece $B_1C_1 \parallel BC$ și $IC_a \perp BC$ rezultă că perpendiculara dusă din C_a pe B_1C_1 trece prin I centrul cercului înscris în triunghiul $ABC.$ Patrulaterul $A_1B_1AC_1$ este paaralelogram, bisectoarele unghiurilor B_1AC_1 și $B_1A_1C_1$ sunt paralele, cum $AI \perp C_bC_c$, rezultă că și $A_1I_1 \perp C_bC_c$ (am notat cu I_1 centrul cercului înscris în triunghiul median).

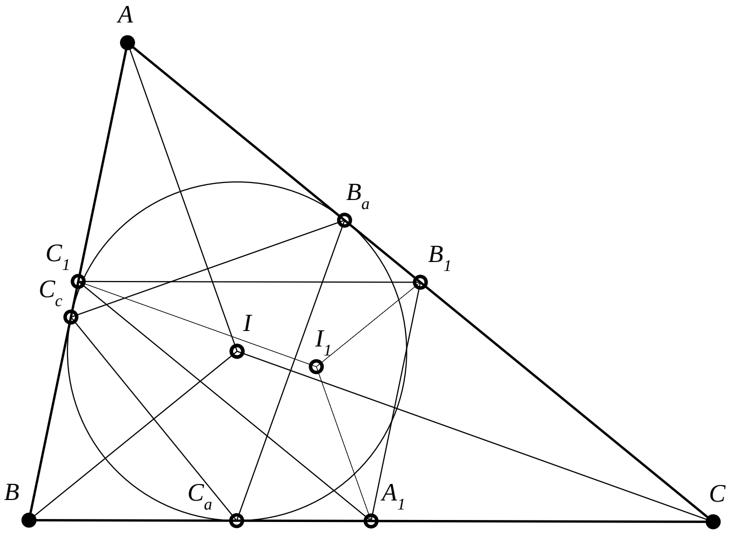


Figura 19

2.6 Un triunghi și triunghiul său tangențial

Definiția 8

Triunghiul tangențial al unui triunghi dat ABC este triunghiul format de tangentele în A, B și C la cercul circumscris triunghiului ABC.

Observația 13

a) În *Figura 20*, am notat $T_aT_bT_c$ triunghiul tangențial al triunghiului ABC.
b) Triunghiul ABC este triunghiul de contact pentru triunghiul său tangențial $T_aT_bT_c$.
c) Centrul cercului circumscris triunghiului ABC, O, este centrul cercului înscris în triunghiul său tangențial.

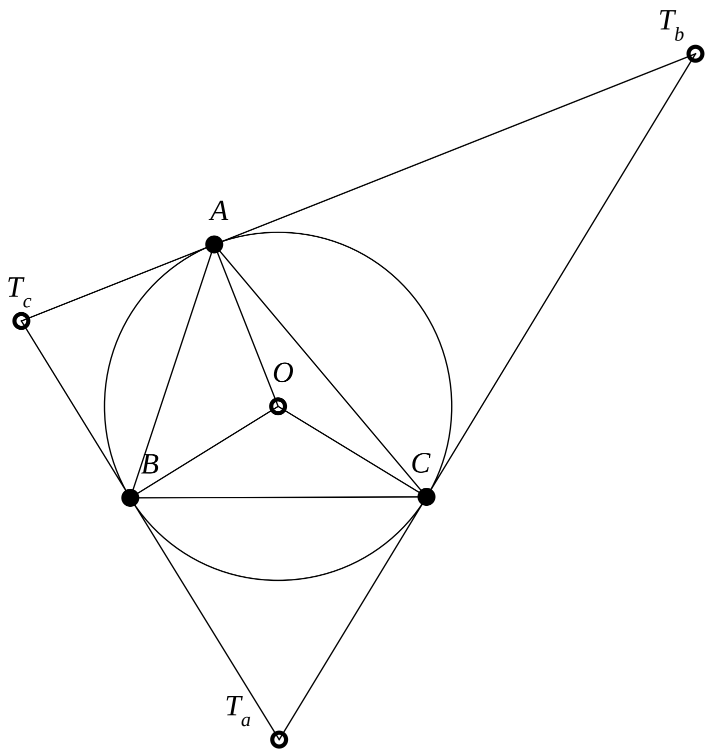


Figura 20

Propoziția 12

Un triunghi dat și triunghiul său tangențial sunt triunghiuri ortologice. Centrul comun de ortologie este centrul cercului circumscris triunghiului dat.

Observația 14

a) Demonstrația acestei proprietăți rezultă din demonstrația *Propoziției 10*.
b) Din *Propoziția 11*, rezultă că triunghiul tangențial al unui triunghi dat și triunghiul median al triunghiului tangențial sunt ortologice.
c) Triunghiul tangențial al unui triunghi dat și acel triunghi sunt triunghiuri omologice. Centrul omologiei este centrul simedian K (*punctul lui Lemoine* al triunghiului dat, vezi [24]).

Propoziția 13

Triunghiul tangențial și triunghiul median al unui triunghi dat sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt centrul cercului circumscris și centrul cercului celor nouă puncte ale triunghiului dat.

Demonstrație

Fie $T_aT_bT_c$ și $A_1B_1C_1$ triunghiurile tangențial și median ale triunghiului dat ABC (vezi *Figura 21*). Evident, T_aA_1 este mediatoarea segmentului BC și, cum $B_1C_1 \parallel BC$, avem că $T_aA_1 \perp B_1C_1$ și T_aA_1 trece prin O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Analog, T_bB_1 trece prin O și T_cC_1 trece prin O, deci O este centru de ortologie.

Dacă notăm cu $A_2B_2C_2$ triunghiul ortic al triunghiului ABC, avem că perpendiculara dusă din A_1 pe B_2C_2 trece prin A_1, deoarece $B_2C_2 \parallel T_bT_c$ (ambele sunt antiparalele cu BC), avem că perpendiculara din O_9 pe T_bT_c trece prin O_9. Analog, rezultă că perpendicularele din B_1 și C_1, respectiv pe T_aT_c și T_aT_b trec prin O_9.

Nota 1

În lucrarea [1], *Propoziția 13* este prezentată drept *Teorema lui Cantor*.

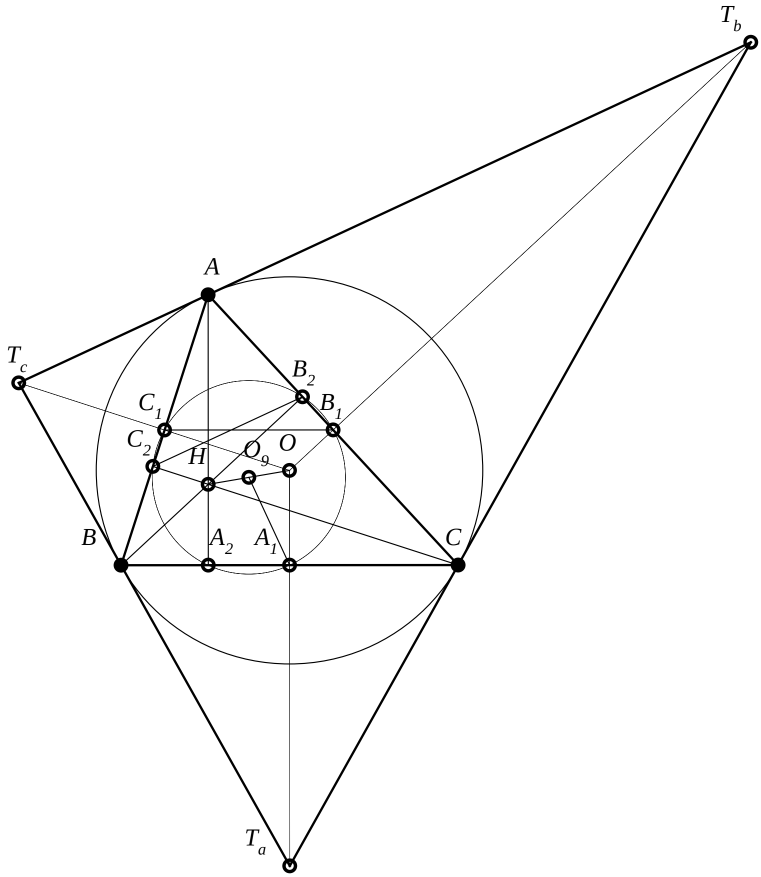


Figura 21

Propoziția 14

Triunghiul tangențial $T_aT_bT_c$ al unui triunghi ABC dat și triunghiul median al triunghiului ortic al triunghiului ABC sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt ortocentrul lui $T_aT_bT_c$ și centrul O_9 al cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC.

Demonstrație

Notăm $M_1M_2M_3$ triunghiul median al triunghiului ortic $A'B'C'$ corespunzător triunghiului ascuțitunghic dat ABC (vezi *Figura 22*).

Deoarece $O_9M_1 \perp B'C'$ și $B'C' \parallel T_bT_c$, rezultă că $O_9M_1 \perp T_bT_c$; analog, $O_9M_2 \perp T_aT_c$ și $O_9M_3 \perp T_aT_b$; prin urmare, triunghiurile $M_1M_2M_3$ și $T_aT_bT_c$ sunt ortologice, centrul de ortologie fiind O_9 – centrul cercului celor nouă puncte al trunghiului ABC. Triunghiurile $M_1M_2M_3$ și $T_aT_bT_c$ au laturile respective paralele. Dacă notăm cu H_T ortocentrul triunghiului tangențial, atunci T_aH_T va fi perpendiculară pe M_2M_3, deci H_T este centru de ortologie.

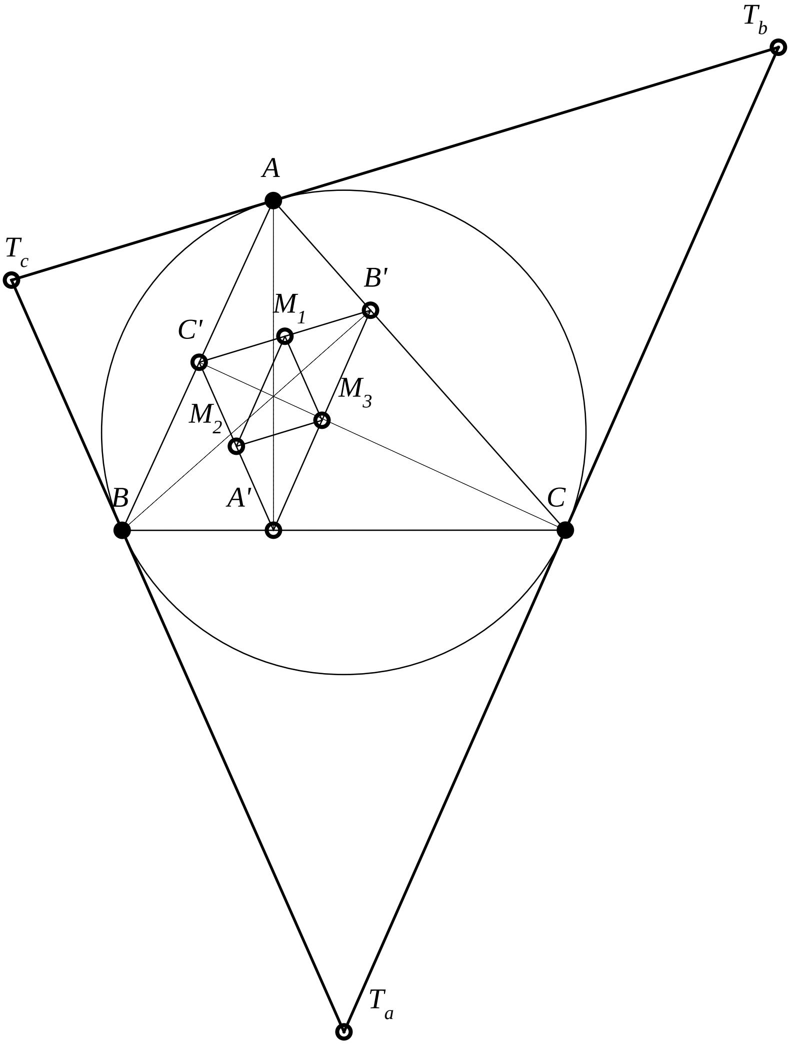


Figura 22

2.7 Un triunghi și triunghiul său cotangentic

Definiția 9

Se numește *triunghi cotangentic* al unui triunghi dat triunghiul determinat de contactele cercurilor exînscrise cu laturile triunghiului.

Observația 15

În *Figura23*, $J_aJ_bJ_c$ este triunghiul cotangentic al triunghiului ABC.

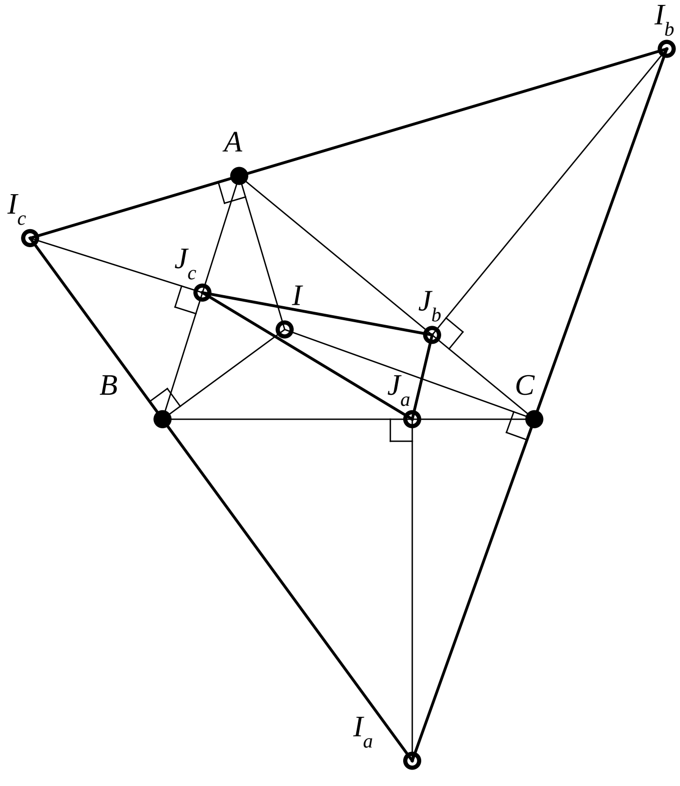


Figura 23

Propoziția 15

Un triunghi și triunghiul său cotangentic sunt triunghiuri ortologice.

Demonstrație

Se calculează fără dificultate: $AJ_b = p - c$,$AJ_c = p - b$, $BJ_c = p - a$,$BJ_a = p - c$,$CJ_a = p - b$,$CJ_b = p - a$.

Observăm că:

$AJ_c^2 + BJ_a^2 + CJ_b^2 = J_bA^2 + J_cB^2 + J_aC^2$.

Conform *Teoremei 2*, rezultă că triunghiurile ABC și $J_aJ_bJ_c$ sunt ortologice.

Definiția 10

Se numește *punctul lui Bevan* al triunghiului ABC intersecția perpendicularelor duse din centrele cercurilor exînscrise I_a, I_b, I_c respectiv pe BC, CA și AB.

Propoziția 16

Triunghiul cotangentic al unui triunghi dat și acel triunghi au ca centru de ortologie punctul lui Bevan.

Demonstrație

Din *Propoziția 15*, rezultă că perpendicularele duse din J_a, J_b, J_c pe BC, CA, AB sunt concurente. Punctele J_a, J_b, J_c fiind respectiv contactele cercurilor exînscrise cu laturile BC, CA, AB din unicitatea perpendicularei într-un punct pe o dreaptă, avem că perpendicularele duse în J_a pe BC, în J_b pe CA și în J_c pe AB trec respectiv prin I_a, I_b, I_c, deci *punctul lui Bevan* este centrul de ortologie al triunghiului cotangentic în raport cu triunghiul dat.

Observația 16

Triunghiul ABC și triunghiul său cotangentic $J_aJ_bJ_c$ sunt triunghiuri omologice. Centrul de omologie este *punctul lui Nagel* (vezi [24]).

Problema 6

Fie ABC un triunghi și $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$, astfel încât $AB_1 = BA_1$, $BC_1 = CB_1$ și $AC_1 = CA_1$.

Demonstrați că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

Ce puteți afirma despre triunghiul $A_1B_1C_1$?

Definiția 11

Numim *triunghi A-cotangentic adjunct* al triunghiului ABC triunghiul ce are ca vârfuri proiecțiile centrului cercului A-exînscris, I_a, pe laturile triunghiului ABC.
Analog se definesc triunghiurile cotangentice adjuncte corespunzătoare vârfurilor B și C.

Demonstrație

Notăm cu $I_a I_b' I_c'$ triunghiul A-cotangent adjunct al triunghiului ABC (vezi *Figura 24*). Evident, perpendicularele duse în contactele cercului A-exînscris pe laturile BC, CA, AB trec prin I_a.

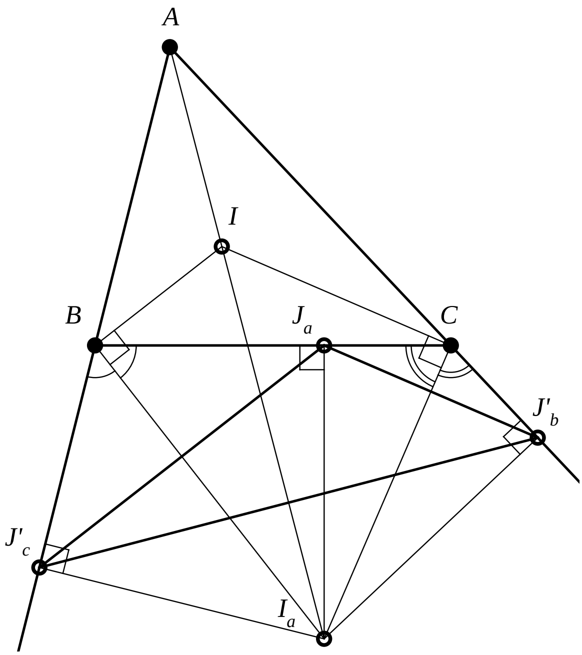


Figura 24

Propoziția 17

Un triunghi dat și un triunghi cotangentic adjunct al său sunt triunghiuri ortologice. Centrul comun de ortologie este centrul cercului ex-înscris corespunzător.

Demonstrație

Notăm cu $J_aJ_b'J_c'$ triunghiul A-cotangentă adjunct al triunghiului ABC (vezi *Figura 25*). Evident, perpendicularele duse în contactele cercului A-exînscris pe laturile BC, CA, AB trec prin I_a - centrul cercului A-exînscris; prin urmare, triunghiul $J_aJ_b'J_c'$ este ortologic în raport cu ABC. Deoarece $AJ_b' = AJ_c'$ (tangente duse din A la cercul A-exînscrise), rezultă că perpendiculara din A pe $J_b'J_c'$ este bisectoarea unghiului BAC, deci trece prin I_a; analog, perpendicularele duse din B și C pe J_aJ_c', respectiv pe J_aJ_b', sunt bisectoarele exterioare corespunzătoare unghiurilor B și C ale triunghiului ABC, deci trec prin I_a.

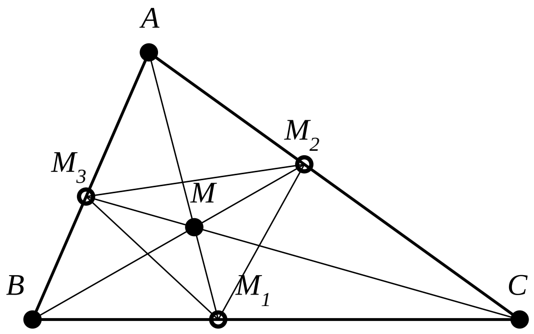


Figura 25

2.8 Un triunghi și triunghiul său antisuplementar

Definiția 12

Se numește triunghi antisuplementar al unui triunghi dat triunghiul determinat de bisectoarele exterioare ale acestui triunghi.

Observația 17

a) Triunghiul antisuplementar al triunghiului ABC este triunghiul $I_aI_bI_c$ cu vârfurile în centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC.

b) Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului său $I_aI_bI_c$.

Propoziția 18

Un triunghi și triunghiul său antisuplementar sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt centrul cercului înscris și *punctul lui Bevan* ale triunghiului dat.

Demonstrația acestei *Propoziții* rezultă din *Propozițiile 6* și *16*.

Observația 18

a) Centrul cercului înscris în triunghiul ABC, punctul I, este ortocentrul triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$.
b) *Punctul lui Bevan* al triunghiului ABC este centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$.
c) Axa de ortologie a unui triunghi și a antisuplementarului său este *dreapta lui Euler* a triunghiului antisuplementar.

Propoziția 19

Dacă ABC este un triunghi dat, I este centrul cercului său înscris, și $I_aI_bI_c$ triunghiul său antisuplementar, atunci perechile de triunghiuri $(I_aI_bI_c, II_bI_c)$, $(I_aI_bI_c, II_cI_a)$, $(I_aI_bI_c, II_aI_b)$ au același centru de ortologie. Centrul lor de ortologie este I.

Demonstrația acestei proprietăți este evidentă, deoarece înălțimile triunghiului antisuplementar sunt bisectoarele triunghiului dat.

Definiția 13

Se numește *triunghi pedal* al unui punct M din planul triunghiului ABC triunghiul care are ca vârfuri intersecțiile cevienelor AM, BM, CM, respectiv cu BC, CA și AB.

Observația 19

a) În *Figura 25*, triunghiul $M_1M_2M_3$ este triunghiul pedal al punctului M în raport cu triunghiul ABC. Vom spune despre triunghiul $M_1M_2M_3$ că este triunghiul M-pedal al triunghiului ABC.
b) Triunghiul ortic al triunghiului ABC este triunghiul H-pedal al acestuia.

Propoziția 20

Triunghiul antisuplementar al triunghiului ABC este ortologic cu triunghiul I-pedal al triunghiului ABC (I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC).

Demonstrație

Notăm $I_1I_2I_3$ triunghiul I-pedal al triunghiului ABC (vezi *Figura 26*).

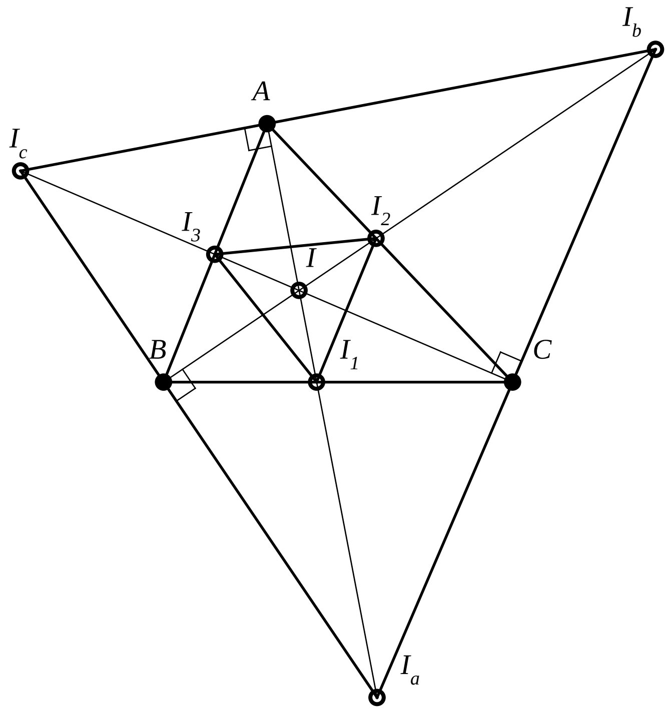


Figura 26

Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului său antisuplementar $I_aI_bI_c$, deci centrul de ortologie al triunghiului $I_1I_2I_3$ în raport cu $I_aI_bI_c$ este ortocentrul lui $I_aI_bI_c$, adică I.

Din *Teorema triunghiurilor ortologice*, rezultă că și perpendicularele duse din I_a, I_b, I_c respectiv pe I_2I_3, I_1I, I_1I_2 sunt concurente în al doilea centru de ortologie.

Problema 7

Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și $I_a I_b I_c$ antisuplementarul său. Arătați că triunghiul $I_a I_b I_c$ este ortologic în raport cu triunghiul I_a-pedal al triunghiului ABC.

2.9 Un triunghi și triunghiul său I-circumpedal

Definiția 14

Se numește *triunghi circumpedal* (sau *metaarmonic*) al unui punct M din planul unui triunghi ABC, triunghiul cu vârfurile în intersecțiile semidreptelor $(AM$, $(BM$, $(CM$ cu cercul circumscris triunghiului ABC.

Observația 20

În *Figura 27*, am notat $M_1M_2M_3$ triunghiul circumpedal al punctului M în raport cu triunghiul ABC. Vom spune despre $M_1M_2M_3$ că este triunghiul M-circumpedal.

Propoziția 21

Un triunghi ABCdat și triunghiul său I-circumpedal sunt ortologice. Centrele de ortologie sunt I și O – centrul cercului circumcris triunghiului ABC.

Demonstrație

Fie $I_1I_2I_3$ triunghiul I-circumpedal al triunghiului ABC (vezi *Figura 28*). Notăm $\{A'\} = I_2I_3 \cap AI_1$; observăm că $m(\sphericalangle I_1A'I_2) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AI_3}) + \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{CI_2}) + \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{CI_1}) = \frac{1}{2}[m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})] = 90^0$.

În consecință:$AI_1 \perp I_2I_3$, analog rezultă că $BI_2 \perp I_1I_3$ și $CI_3 \perp I_1I_2$, deci triunghiurile ABC și $I_1I_2I_3$ sunt ortologice, iar centrul de ortologie este I.

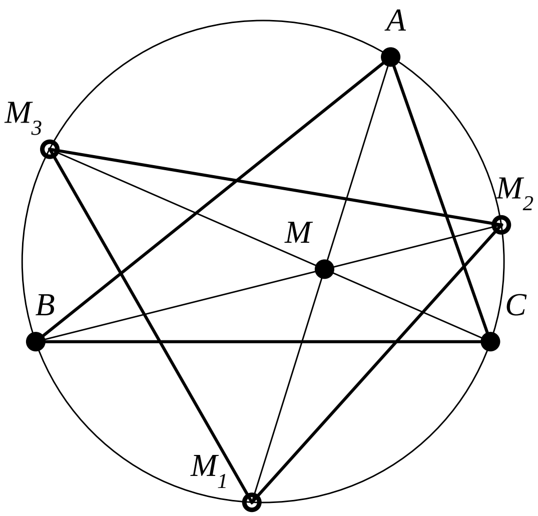


Figura 27

Deoarece I_1 este mijlocul arcului BC, înseamnă că perpendiculara din I_1 pe BC este mediatoarea lui BC, deci trece prin O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Acesta este al doilea centru de ortologie a triunghiurilor considerate.

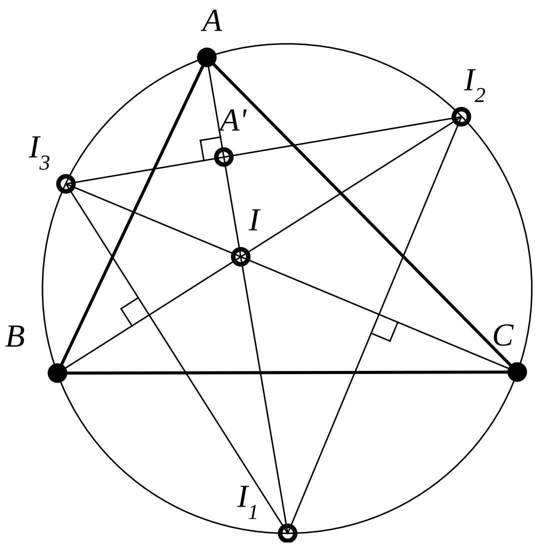


Figura 28

Observația 21

a) Centrul cercului înscris în triunghiul ABC este ortocentrul triunghiului I-circumpedal al triunghiului ABC.
b) Dreapta OI este dreapta lui Euler a triunghiului I-circumpedal.

Propoziția 22

Triunghiul I-circumpedal al triunghiului ABC și triunghiul $C_aC_bC_c$ de contact al triunghiului ABC sunt ortologice. Centrele de ortologie sunt punctele I și H' (ortocentrul triunghiului de contact).

Demonstrație

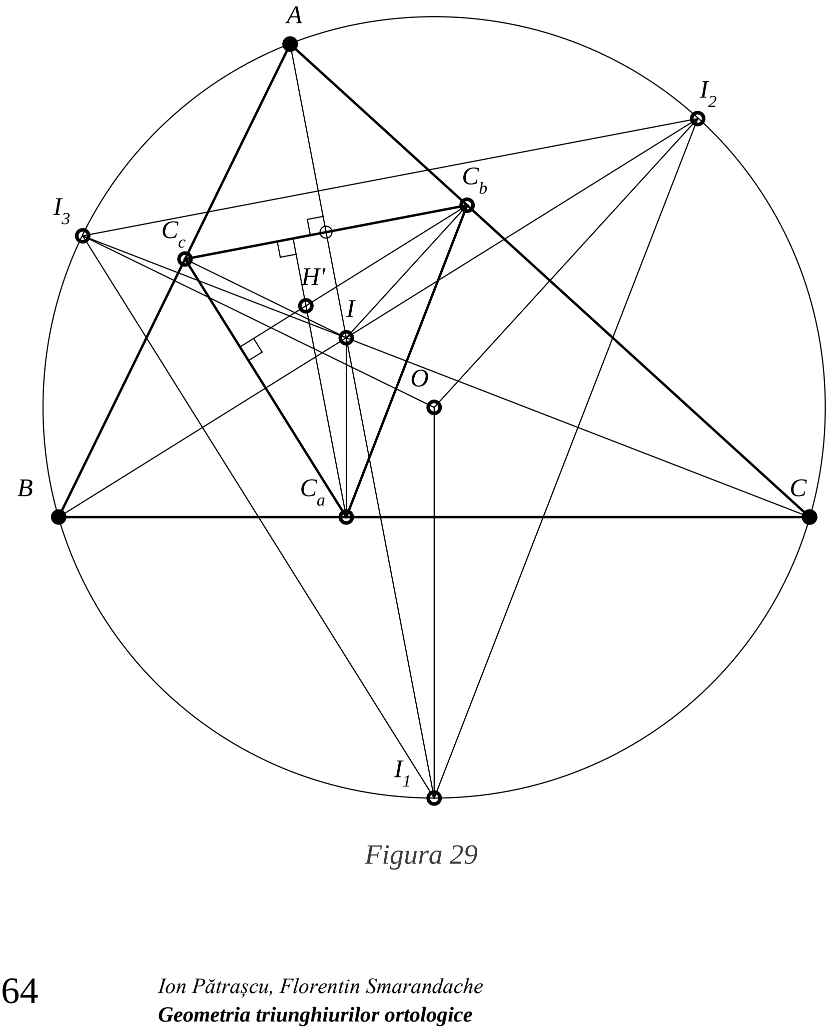


Figura 29

Avem $AI_1 \perp C_bC_c$, $BI_2 \perp C_cC_a$ și $CI_3 \perp C_aC_b$, deci triunghiul I-circumpedal $I_1I_2I_3$ și triunghiul de contact$C_aC_bC_c$ sunt ortologice.

Deoarece triunghiul de contact și triunghiul I-circumpedal sunt omotetice, rezultă că al doilea centru de ortologie al triunghiurilor $C_aC_bC_c$ și $I_1I_2I_3$ este ortocentrulH' al triunghiului de contact.

Remarca 6

1. Centrul omotetiei triunghiurilor $I_1I_2I_3$ și $C_aC_bC_c$ este izogonalul N' al punctului Nagel al triunghiului ABC (vezi [15], p. 290).
2. Izogonalul punctului Nagel al triunghiului ABC se găsește pe dreapta OI (vezi [24] și [15], p. 291).
3. Punctele N', H', I și O sunt coliniare.

2.10 Un triunghi și triunghiul său H-circumpedal

Propoziția 23

Un triunghi nedreptunghic ABC dat și triunghiul său H-circumpedal sunt ortologice. Centrele de ortologie sunt H și O (ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului ABC).

Demonstrație

Triunghiul H-circumpedal al triunghiului ABC este omoteticul triunghiului ortic al triunghiului ABC prin omotetia de centru H și raport 2 (vezi *Propoziția 6*). Deoarece triunghiul ortic al triunghiului ABC este ortologic cu acesta (vezi *Propoziția 6*), rezultă că perpendicularele duse din A, B, C pe laturile triunghiului H-circumpedal (paralele cu laturile triunghiului ortic) vor fi concurente în O. Celălalt centru de ortologie este evident ortocentrul H al triunghiului ABC.

2.11 Un triunghi și triunghiul său O-circumpedal

Definiția 15

Simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC față de centrul O al cercului său circumscris se numește *punctul lui Longchamps, L,* al triunghiului ABC.

Propoziția 24

Un triunghi ABC nedreptunghic și triunghiul său O-circumpedal sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt ortocentrul H și punctul lui Longchamps L al triunghiului ABC.

Demonstrație

Fie $O_1O_2O_3$ triunghiul O-circumpedal al triunghiului ascuțitunghic din *Figura 30*; acesta este simetricul triunghiului ABC față de O, prin urmare $O_2O_3 \parallel BC$, $O_3O_1 \parallel AC$ și $O_1O_2 \parallel AB$. Perpendicularele duse din A, B, C, respectiv pe O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 sunt chiar înălțimile triunghiului ABC, așa căH este centrul de ortologie.

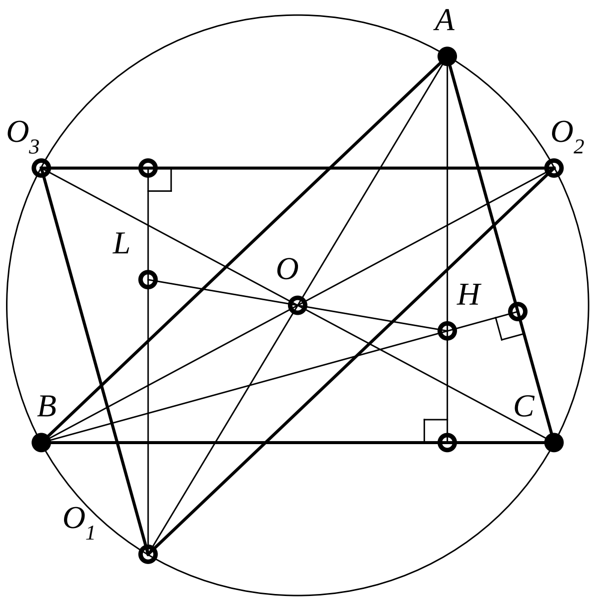


Figura 30

Din motive de simetrie, rezultă că celălalt centru de ortologie va fi simetricul lui H față de O, adică punctul lui Longchamps, L, al triunghiului ABC.

2.12 Un triunghi și triunghiul său I_a-circumpedal

Propoziția 25

Triunghiul I_a-circumpedal al unui triunghi ABC dat și triunghiul ABC sunt triunghiuri ortologice.

Demonstrație

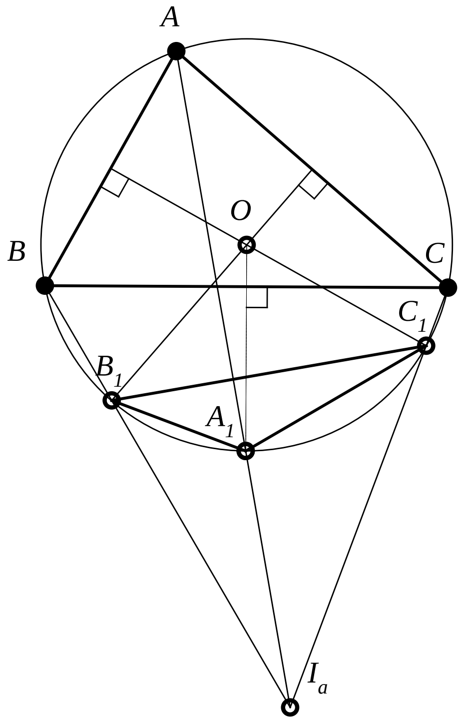


Figura 31

În *Figura 31*, am notat $A_1B_1C_1$ triunghiul I_a-circumpedal al centrului cercului A-exînscris al triunghiului ABC (cu $\hat{A} > \hat{C}$). Deoarece A_1 este mijlocul arcului BC, rezultă că perpendiculara dusă din A_1 pe BC este mediatoarea lui BC, deci trece prin O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstrăm că și perpendicularele duse din B_1 pe AC și din C_1 pe AB trec prin O.

Patrulaterul B_1BAC este înscris în cercul circumscris, deci $m\widehat{B_1AC} = m\widehat{B_1BC} = \frac{1}{2}m(\hat{A} + \hat{C})$; $m\widehat{B_1CA} = m(\hat{C}) + m\widehat{B_1CB}$. Dar $m\widehat{B_1CB} = m\widehat{BAB_1} = m(\hat{A}) - m\widehat{B_1AC} = m(\hat{A}) - \frac{1}{2}\, m(\hat{A} + \hat{C})$. Rezultă că $m\widehat{B_1CB} = \frac{1}{2}\, m(\hat{A} - \hat{C})$ și $\widehat{B_1CA} = m(\hat{C}) + \frac{1}{2}\, m(\hat{A} - \hat{C}) = \frac{1}{2}\, m(\hat{A} + \hat{C})$.

Prin urmare: $\widehat{B_1AC} \equiv \widehat{B_1CA}$, deci $B_1A = B_1C$ și, în consecință, perpendiculara dusă din B_1 pe AC trece prin O; analog se arată că $C_1A = C_1B$, deci și perpendiculara dusă din C_1 pe AB trece prin O.

Am arătat că triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic cu ABC și centrul de ortologie este O.

Observația 22

În demonstrația anterioară, am arătat că: *Intersecția bisectoarei exterioare a unghiului unui triunghi cu cercul circumscris acestuia este mijlocul arcului mare subîntins de latură opusă unghiului.*

2.13 Un triunghi și triunghiul său extangențial

Definiția 26

Fie ABC un triunghi nedreptunghic dat și cercurile exînscrise lui de centre I_a, I_b, I_c. Tangentele comune exterioare la cercurile exînscrise (care nu conțin laturile triunghiului ABC) determină un triunghi $E_aE_bE_c$ numit *triunghiul extangențial* al triunghiului ABC.

Observația 23

a) În *Figura 32* este reprezentat triunghiul extangențial $E_aE_bE_c$ al triunghiului ABC.

b) Dacă ABC este un triunghi dreptunghic, atunci nu se definește, pentru acest triunghi, triunghiul extrangențial. Într-adevăr, fie ABC un triunghi cu $m(\hat{A}) = 90^0$. Deoarece tangenta comună AB la cercurile A-exînscris și B-exînscris este perpendiculară pe tangenta comună interioară AC dusă din centrul de simetrie față de dreapta I_aI_b, tangenta comună exterioară cercurilor exînscrise (I_a), (I_b) va fi perpendiculară pe BC.

Analog, tangenta comună exterioară cercurilor (I_a), (I_b) va fi perpendiculară pe BC. Cum tangentele comune exterioare duse prin E_b și E_c din cercurile exînscrise sunt paralele, triunghiul extangențial nu este definit.

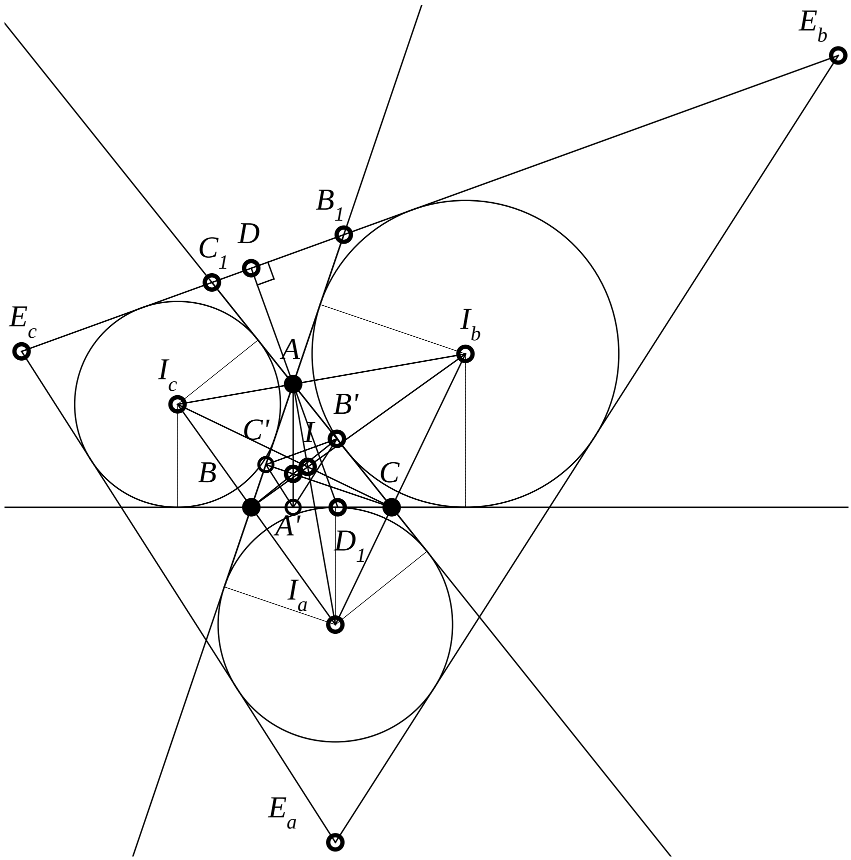


Figura 32

Propoziția 26

Un triunghi nedreptunghic dat și triunghiul său extangențial sunt triunghiuri ortologice. Centrul de ortologie al triunghiului dat și al extangențialului său este centrul cercului circumscris triunghiului dat.

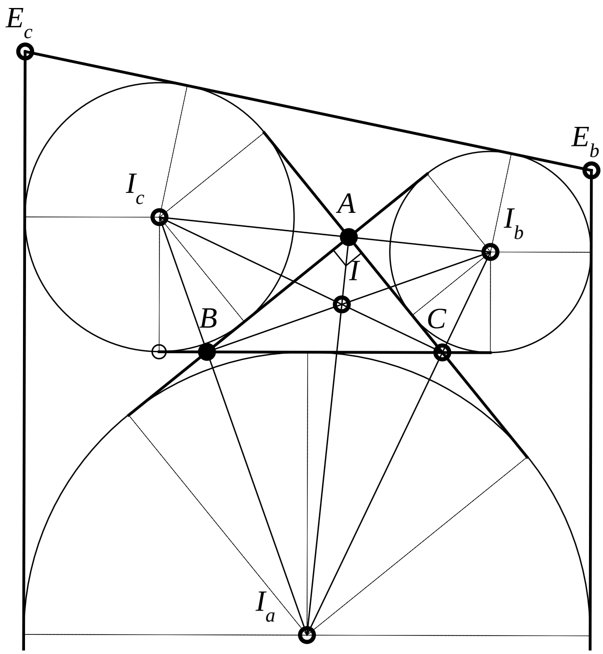


Figura 33

Demonstrația 1

Pentru demonstrație, facem mai întâi următoarele precizări:

Definiția 17

Două ceviene ale unui triunghi se numesc izogonale dacă sunt simetrice în raport cu bisectoarea triunghiului cu care au vârful comun.

Lema 3

Înălțimea dintr-un vârf al triunghiului și raza cercului circumscris corespunzătoare acelui vârf sunt ceviene izogonale.

Demonstrație

Fie AD înălțime în triunghiul ABC și O centrul cercului circumscris (vezi *Figura 34*). Avem: $m(\widehat{DAC}) = 90^0 - m(\hat{C})$, $m(\widehat{AOB}) = 2m(\hat{C})$.

Decim$\left(\widehat{BAO}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[180^0 - 2m\left(\hat{C}\right)\right] = m\left(\widehat{DAC}\right)$.

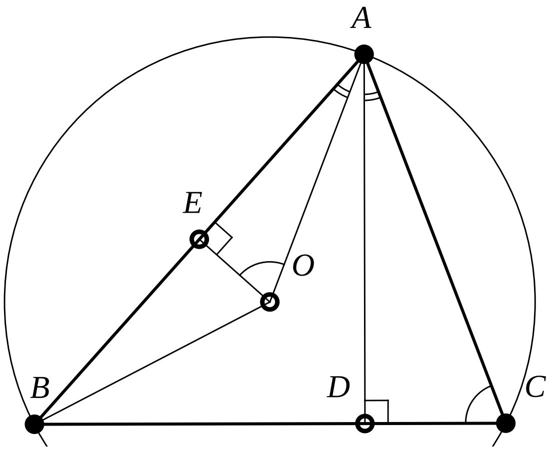


Figura 34

Sau (*soluție oferită de Mihai Miculița*):

$$\left.\begin{array}{r} m\left(\widehat{EOA}\right)=\dfrac{1}{2}.m\left(\widehat{AOB}\right)=m\left(\widehat{ACB}\right) \Rightarrow \widehat{EOA} \equiv \widehat{ACB} \\ \left.\begin{array}{r} OE \perp AB \\ AD \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AEO} \equiv \widehat{ADC} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{OAE} \equiv \widehat{CAD}$$

(Două triunghiuri care au două unghiuri respectiv congruente, au şi cel de al treilea unghi congruent).

Observația 24

a) Evident: $\sphericalangle AOE = \sphericalangle C$. Scriind în ΔAEO dreptunghic:
$\sin AOE = \frac{AE}{OA}$, găsim $\sin C = \frac{C}{2R}$, deci $\frac{C}{\sin C} = 2R$ – teorema sinusurilor.

b) Analog se demonstrează *Lema* în cazul triunghiului obtuzunghic sau dreptunghic.

Demonstrăm acum *Propoziția 26*. Notăm$\{B_1\} = AB \cap E_bE_c$ și $\{C_1\} = AC \cap E_bE_c$. Din motive de simetrie, dreapta I_bI_c este axă de simetrie a figurii formate din cercurile B-exînscris și C-exînscris și din tangentele lor comune exterioare și interioare. Rezultă că triunghiul ABC este congruent cu triunghiul AC_1B_1. Ducem $AD \perp B_1C_1$, $D \in B_1C_1$, notăm $\{D_1\} = AD \cap BC$, avem $\sphericalangle DAB_1 = \sphericalangle BAD_1$, ținând seama de *Lema 1* și de congruența triunghiurilor evidențiate, rezultă că AD_1 trece prin O, centrul circumscris triunghiului ABC. Analog, se arată că perpendiculara dusă din B pe E_aE_c trece prin O și că perpendiculara din C pe E_aE_b trece prin O.

Demonstrația 2

Folosim următoarea lemă:

Lema 4

Triunghiul extangențial al triunghiului nedreptunghic ABC și triunghiul ortic $A'B'C'$ al triunghiului ABC sunt triunghiuri omotetice.

Demonstrația lemei

Vom folosi *Figura 3*2, din congruența triunghiurilor ABC și AC_1B_1 rezultă că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AC_1B_1$. Pe de altă parte, $B'C'$ este antiparalelă la BC, deci $\sphericalangle AB'C' \equiv \sphericalangle ABC$. Relațiile precedente conduc la $\sphericalangle AB'C' \equiv \sphericalangle AC_1B_1$, ceea ce implică $E_bE_c \parallel B'C'$. Analog, se arată că $E_aE_b \parallel A'B'$ și $E_aE_c \parallel B'C'$. Triunghiul extangențial și triunghiul ortic, având laturile respectiv paralele, sunt prin urmare omotetice.

Observația 25

Centrul de omotetie al triunghiului ortic se numește *punctul lui Clawson*.

Suntem în măsură acum să finalizăm *Demonstrația 2* a *Propoziției 26*.

Am văzut (*Propoziția 6*) că triunghiul nedreptunghic *ABC* și triunghiul său ortic sunt ortologice. Perpendicularele duse din A, B, C pe laturile triunghiului ortic sunt concurente în centrul cercului circumscris O.

Deoarece laturile triunghiului ortic sunt paralele cu cele ale triunghiului extangențial $E_aE_bE_c$ rezultă că triunghiul ABC și extangențialul său sunt ortologice, centrul de ortologie fiind O.

2.14 Un triunghi și un triunghi podar alsău

Definiția 18

Se numește *triunghi podar* al unui punct din planul unui triunghi dat, triunghiul determinat de proiecțiile ortogonale ale punctului pe laturile triunghiului.

Observația 26

a) În *Figura 35*, triunghiul podar al punctului P este $A'B'C'$.
b) Triunghiul podar al ortocentrului unui triunghi nedreptunghic este triunghiul ortic al acelui triunghi.

Remarca 7

Pentru punctele M care aparțin cercului circumscris unui triunghi ABC nu se definește triunghiul podar deoarece proiecțiile punctului M pe laturi sunt puncte coliniare. Dreapta căreia îi aparțin aceste proiecții se numește *dreapta lui Simson*.

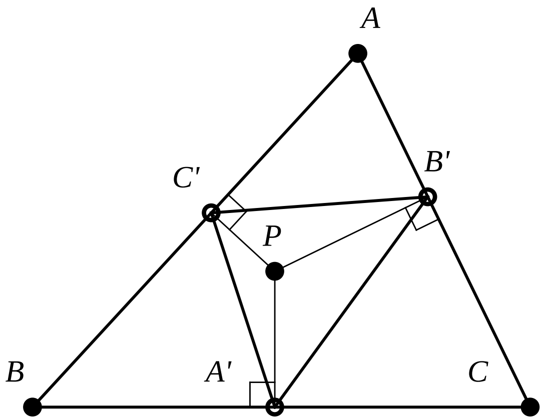


Figura 35

Definiția 19

Cercul circumscris triunghiului podar al unui punct se numește *cerc podar*.

Propoziția 28

Cevienele izogonale ale unor ceviene concurente într-un triunghi sunt concurente.

Definiția 2

Punctele P și P' de concurență a unor ceviene în triunghi și a izogonalelor lor se numesc puncte izogonale sau puncte conjugate izogonal.

Remarca 8

Centrul cercului circumscris unui triunghi și ortocentrul său sunt puncte izogonale.

Teorema 6

Triunghiul podar al unui punct din interiorul unui triunghi și triunghiul dat sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt punctul dat și izogonalul său.

Demonstrație

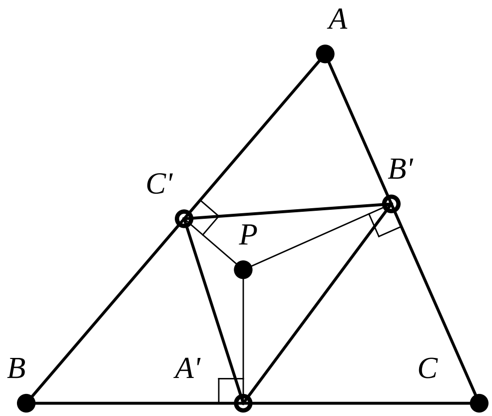


Figura 36

Fie $A'B'C'$ triunghiul podar al lui P în raport cu triunghiul ABC (vezi *Figura 36*). Evident, triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt ortologice și P este centru de ortologie. Din teorema triunghiurilor ortologice rezultă că și perpendicularele duse din A, B, C pe $B'C'$, $C'A'$ respectiv $A'B'$ sunt concurente într-un punct P'. Rămâne de arătat că punctele P și P' sunt izogonale.

Deoarece patrulaterul $AC'PB'$ este inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle AP'C' \equiv \sphericalangle AB'C'$. Aceste unghiuri congruente sunt complementele unghiurilor PAB respectiv $P'AC$.Congruența acestor ultime unghiuri arată că cevienele PA și $P'A$ sunt izogonale. Analog, rezultă că PB și $P'B$ sunt ceviene izogonale și PC și $P'C$ sunt ceviene izogonale, în consecință P și P' centrele de ortologie sunt conjugate izogonal.

Observația 28

a) *Teorema 6* este adevărată și pentru cazul punctului P situat în exteriorul triunghiului ABC.

b) *Teorema 6* generalizează *Propozițiile 1, 2, 6, 10.*

c) Din *Teorema 6*, rezultă:

Propoziția 29

Un triunghi dat și podarul centrului unui cerc exînscris al său sunt triunghiuri ortologice. Centrul comun de ortologie este centrul cercului exînscris în cauză.

Propoziția 30

Triunghiul podar al unui punct P din interiorul triughiului dat ABC și triunghiul complementar al lui ABC sunt triunghiuri ortologice.

Demonstrație

Fie$A'B'C'$ podarul punctului P și $A_1B_1C_1$ triunghiul complementar al triunghiului ABC (vezi *Figura 37*). Având $B_1C_1 \parallel BC$, perpendiculara din A' pe BC va fi perpendiculară de asemenea pe B_1C_1 și va trece prin P. Punctul P este centru de ortologie al triunghiului $A'B'C'$ în raport cu $A_1B_1C_1$.

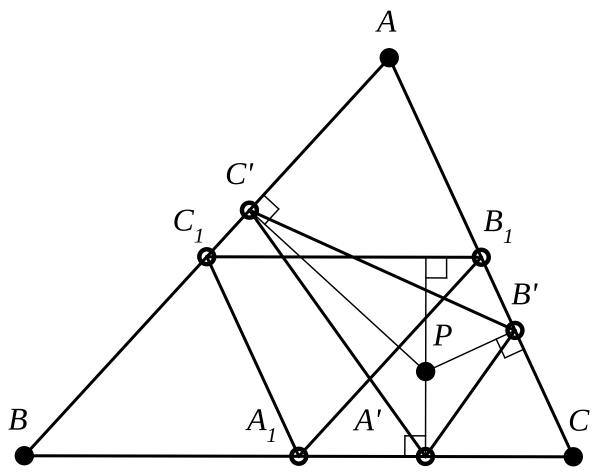


Figura 37

Observația 29

Propoziția precedentă este adevărată pentru orice punct P din exteriorul triunghiului ABC care nu aparține cercului circumscris al acestuia.

Definiția 20

Simetrica unei mediane a unui triunghi față de bisectoarea triunghiului cu originea în același vârf al triungiului se numește simediană.

Observația 30

a) Simedianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de concurență este numit centrul simedian al triunghiului sau *punctul Lemoine* al triunghiului.
b) Centrul simedian și centrul de greutate sunt puncte conjugate izogonal.

Propoziția 31

Triunghiul podar al centrului simedian și triunghiul median al unui triunghi median al unui triunghi dat sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt centrul simedian și centrul de greutate ale triunghiului dat.

Demonstrație

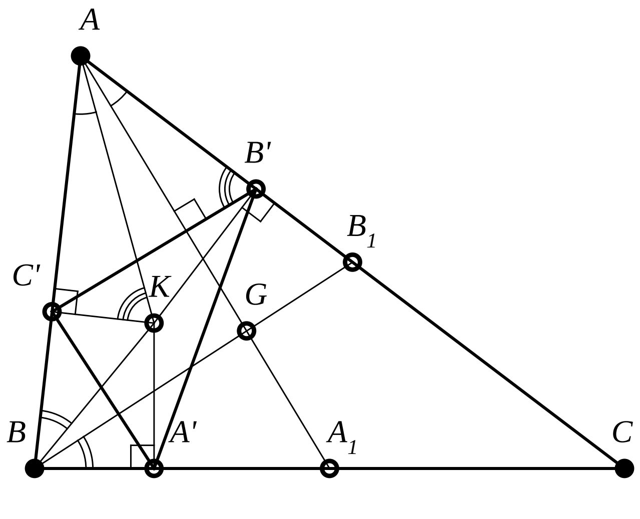


Figura 38

Fie $A'B'C'$ podarul centrului simedian K și $A_1B_1C_1$ triunghiul median al lui ABC (vezi *Figura 38*). Cevienele AK și AA' fiind izogonale avem că:

$\sphericalangle A_1AC \equiv \sphericalangle BAK.$ (1)

Patrulaterul $AC'KB'$este inscriptibil, deci:

$\sphericalangle C'KA \equiv \sphericalangle C'B'A.$ (2)

Deoarece $m(\widehat{BAK}) + m(\widehat{C'KA}) = 90^0,$ (3)

din (1) și (2) obținem că:

$m(\widehat{A_1AC}) + m(\widehat{C'B'A}) = 90^0.$ (4)

Această relație arată că $AA_1 \perp B'C'$, deci perpendiculara din A_1pe $B'C'$ este mediana AA_1. Analog, rezultă că $BB_1 \perp A'C'$ și $CC_1 \perp A'B'$, deci centrul de greutate $\{G\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$ este centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu $A'B'C'$.

Observația 31

Se poate demonstra *Propoziția 31* și folosind *Teorema 6*. Într-adevăr, podarul lui K și ABC sunt triunghiuri ortologice, deci perpendicularele din A, B, C pe laturile triunghiului $A'B'C'$ trec prin izogonalul lui K, adică prin centrul de greutate G. Aceste perpendiculare, fiind medianele triunghiului ABC, tren prin A_1, B_1, C_1. Unicitatea perpendicularei dusă dintr-un punct pe o dreaptă arată că G este centru de ortologie al triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și $A'B'C'$.

Teorema 7 (Cercul celor 6 puncte)

Dacă punctele P_1, P_2 sunt puncte conjugate izogonal, aflate în interiorul triunghiului ABC, iar $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ triunghiurile lor podare, atunci aceste triunghiuri au același cerc podar.

Demonstrație

Din *Teorema 6*, rezultă că:

$CP_1 \perp A_2B_2.$ (1)

Dacă notăm $m(\widehat{P_1B_1A_1}) = x$, cum PA_1CB_1 este inscriptibil, rezultă că:

$m(\widehat{P_1CA_1}) = x.$ (2)

Ținând seama de (1), avem că $m(\widehat{B_2A_2C}) = 90^0 - x$. Dar și $m(\widehat{A_1B_1C}) = 90^0 - x$, prim umare punctele A_1, A_2, B_1, B_2 (3) sunt conciclice (dreptele A_1B_1 și A_2B_2 sunt antiparalele (vezi *Figura 39*).

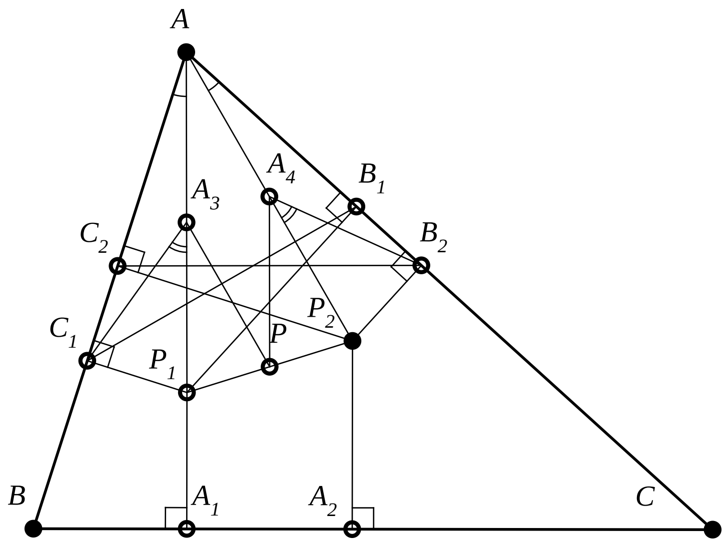


Figura 39

Deoarece mediatoarele segmentelor A_1A_2, B_1B_2 trec prin P mijlocul segmentului P_1P_2, rezultă că P este centrul cercului pe care se găsesc punctele de la (3). Analog, arătăm că punctele B_1, B_2, C_1, C_2 sunt conciclice și că P este centrul cercului lor (4).

Din (3) și (4) avem că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt la aceeași distaanță de P, deci sunt conciclice.

Observația 32

Cercul proiecțiilor pe laturile unui triunghi a două puncte conjugate izogonal din interiorul acestuia se numește cercul celor 6 puncte.

Teorema 8 (Reciproca teoremei 7)

Dacă P_1, P_2 sunt două puncte distincte în interiorul triunghiului ABC și cercurile lor podare coincid, atunci P_1, P_2 sunt conjugate izogonal.

Demonstrație

Vom folosi *Figura 39*; dacă A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt conciclice, atunci centrul acestui cerc va fi P mijlocul segmentului P_1P_2.

Fie A_3, A_4 mijloacele segmentelor P_1A respectiv P_2A. Din conciclitatea celor 6 puncte, avem că $PC_1 = PB_2$. Observăm că: $\Delta PC_1A_3 \equiv \Delta PA_1P_2$ (L.L.L.) - PA_3 este linie mijlocie în ΔAP_1P_2, deci $PA_3 = \frac{1}{2}P_2A$, iarB_2A_4 este mediană în triunghiul dreptunghic P_2B_2A, prin urmare$B_2A_4 = \frac{1}{2}P_2A$, așa că $PA_3 = B_2A_4$; analog, rezultă $C_1A_3 = PA_4$. Congruența triunghiurilor implică $\sphericalangle C_1A_3P \equiv \sphericalangle B_2A_4P$, iar de aici, ținând seama că $\sphericalangle P_1A_3P \equiv \sphericalangle P_2A_1P \equiv \sphericalangle P_1AP_2$, obținem că$\sphericalangle P_1A_3C_1 \equiv \sphericalangle P_2A_4B_2$. Aceste din urmă unghiuri sunt unghiuri exterioare triunghiurilor isoscele C_1A_3A, respectiv B_2A_4A, prin urmare $\sphericalangle P_1AC_1 \equiv \sphericalangle P_2AB_2$, și astfel rezultă că cevienele P_1A și P_2A sunt izogonale. Analog se arată că P_1B și P_2B sunt izogonale și că P_1C și P_2C sunt ceviene izogonale, prin urmare P_1 și P_2 sunt puncte conjugate izogonal.

Propoziția 32

Fie P_1 un punct în interiorul triunghiului ABC, iar $A_1B_1C_1$ triunghiul său podar; cercul podar al lui P_1 intersectează a doua oară (BC), (CA), respectiv (AB) în puncteleA_2, B_2, respectiv C_2. Atunci triunghiurile $A_2B_2C_2$ și ABC sunt ortologice. Centrele de ortologie sunt punctele P_1 și P_2, unde P_2 este izogonalul lui P_1.

Demonstrație

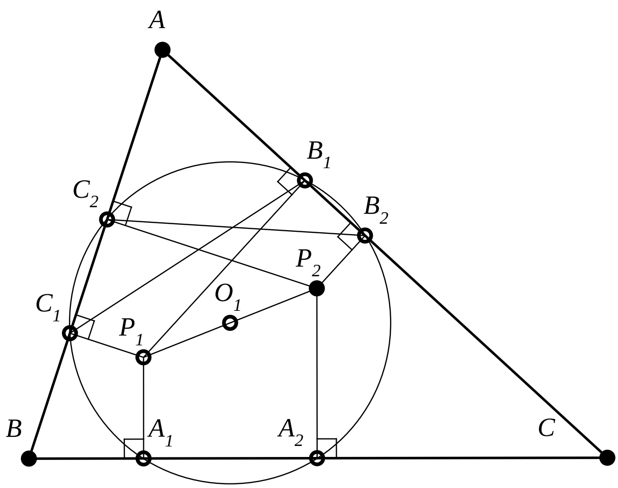


Figura 40

Notăm cu O_1 centrul cercului podar al punctului P_1 (vezi *Figura 40*). Mediatoarele segmentelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt evident concurente în O_1. Notăm cu P_2 simetricul punctului P_1 față de O_1. Simetrica dreptei P_1A_1 față de O_1 va fi P_2A_2 și P_2A_2 este perpendiculară pe BC; analog simetricele dreptelor P_1B_1 și P_2C_1 față de O_1 vor fi perpendiculare în B_2 și C_2 pe AC respectiv AB; acestea conțin de asemenea punctul P_2. Punctele P_1 și P_2 au același cerc podar, aplicând *Teorema 8*, rezultă că aceste puncte sunt izogonale.

Aplicând acum *Teorema 6*, obținem că punctul P_2 izogonalul lui P_1 este centru de ortologie al triunghiurilor ABC și $A_2B_2C_2$; tot de aici avem că P_1 este centru de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A_2B_2C_2$.

2.15 Un triunghi și un triunghi antipodar al său

Definiția 21

Se numește triunghi antipodar al punctului P din planul triunghiului ABC, triunghiul format de perpendicularele în A, B, C, respectiv AP, BP, CP.

Observația 33

a. În *Figura 41* este reprezentat triunghiul antipodar $A'B'C'$ al punctului P. Acest punct se numește punctul antipodar al triunghiului $A'B'C'$.
b. Triunghiul antipodar al centrului cercului circumscris unui triunghi este triunghiul tangențial al acestuia.
c. Triunghiul antipodar al ortocentrului unui triunghi este triunghiul anticomplementar al acestui triunghi.
d. Triunghiul antipodar al centrului cercului înscris într-un triunghi este triunghiul antisuplementar al acestui triunghi.
e. Pentru punctele care aparțin laturilor triunghiului dat nu se definește triunghiul antipodar.

Propoziția 33

Un triunghi și triunghiul său antipodar sunt triunghiuri ortologice.

Demonstrația acestei propoziții este evidentă, deoarece perpendicularele din A, B, C pe $B'C'$, $A'C'$ și $C'A'$ sunt concurente în P (vezi *Figura 38*).

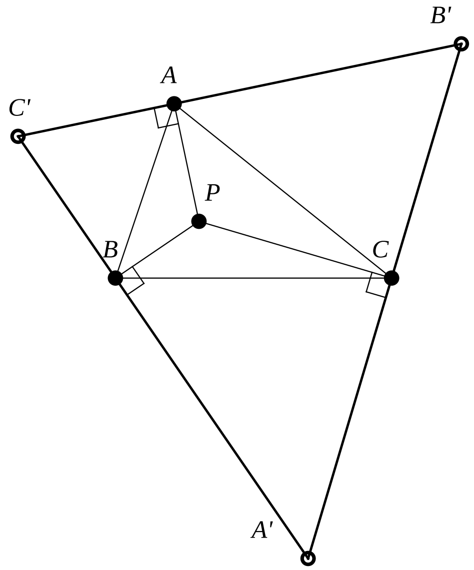


Figura 41

Observația 34

Centrele de ortologie ale triunghiului ABC și ale antipodarului său $A'B'C'$ sunt punctul P și conjugatul său izogonal P' în triunghiul antipodar, așa cum rezultă din *Teorema 6*.

Propoziția 34

Triunghiul antipodar al unui punct P este ortologic cu triunghiul P-pedal în triunghiul ABC.

Demonstrație

În *Figura 42*, fie $A'B'C'$ triunghiul antipodar al lui P și $A_1B_1C_1$ triunghiul P-pedal în ABC. Este evident că perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1, respectiv $B'C'$, $C'A'$ și $A'B'$ sunt concurente în P, deci $A_1B_1C_1$ este ortologic cu antipodarul $A'B'C'$, centrul de ortologie fiind P.

Observația 35

Această *Propoziție* generalizează *Propoziția 20*.

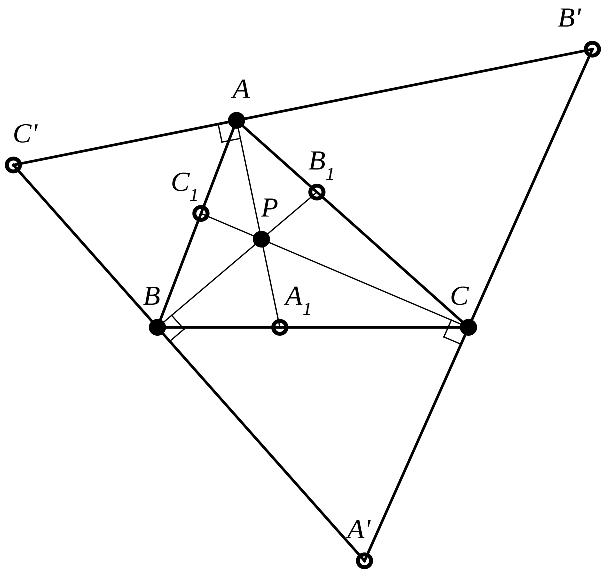


Figura 42

Propoziția 35

Triunghiul antipodar al ortocentrului unui triunghi nedreptunghic și triunghiul ortic al acestuia sunt triunghiuri ortologice. Centrul de ortologie este ortocentrul triunghiului dat, punct ce coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului antipodar.

Demonstrație

Triunghiul antipodar al ortocentrului H al triunghiului ABC este triunghiul anticomplementar al lui ABC; perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 pe $B'C'$, $C'A'$ și $A'B'$ sunt mediatoarele triunghiului antipodar $A'B'C'$ și ele sunt concurente în H ortocentrul triunghiului ABC.

Pe de altă parte, perpendiculara dusă din A' pe B_1C_1 ($A_1B_1C_1$ este triunghiul ortic al lui ABC, vezi *Figura 43*) este rază în cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ (*Propoziția 5*), deci trece prin centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, care am arătat că este H.

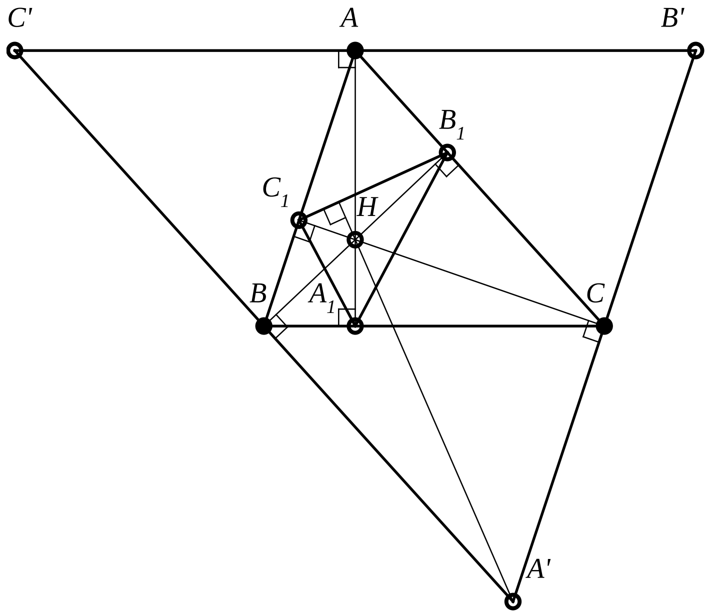


Figura 43

Remarca 9

Plecând de la *Teorema 6* și referindu-ne la *Figura 33* pe care o "completăm" cu triunghiul antipodar al punctului P', observăm că triunghiul antipodar al lui P' are laturile paralele cu triunghiul podar al lui P, deci este omotetic cu acesta.

Formulăm astfel:

Propoziția 36

Triunghiul antipodar al unui punct P din interiorul unui triunghi dat este omotetic cu triunghiul podar al conjugatului izogonal P' al lui P.

Observația 36

Triunghiul antipodar al unui punct P din interiorul unui triunghi dat și triunghiul podar al izogonalului său P' fiind omotetice sunt triunghiuri ortologice.

Propoziția 37

Triunghiul antipodar al unui punct P din interiorul triunghiului ABC ortologic cu triunghiul O-circumpedal al triunghiului ABC.

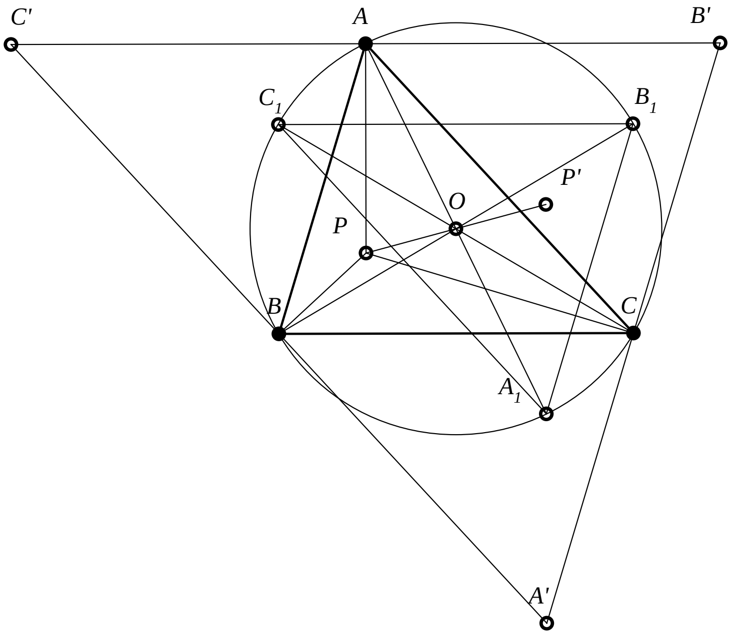


Figura 44

Demonstrație

În *Figura 44*, am notat cu $A'B'C'$ antipodarul lui P și cu $A_1B_1C_1$ triunghiul O-circumpedal al lui ABC.

Deoarece A_1, B_1, C_1 sunt simetricele lui A, B, C față de O, vom avea că $A_1B_1C_1$ are laturile paralele cu laturile triunghiului ABC. Cum ABC și antipodarul său sunt ortologice, perpendicularele din A', B', C' pe BC, CA, AB sunt concurente, dar aceste drepte sunt perpendiculare și pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, deci $A'B'C'$ și $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri ortologice.

Din motive de simetrie, centrul de ortologie al triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și $A'B'C'$ va fi simetricul P' al punctului P față de O.

(Într-adevăr, triunghiurile APO și $A_1P'O$ sunt congruente și cu $AP \parallel A_1P'$, rezultă că $A_1P' \perp B'C'$.)

Problema 8

Fie ABC un triunghi în care unghiurile au măsura mai mică decât 120^0; în acest triunghi există un punct T (numit centru izogon), astfel încât $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{BTC}) = m(\widehat{CTA}) = 120^0$. Demonstrați că triunghiul antipodar al punctului T este echilateral.

2.16 Un triunghi și un triunghi ciclocevian al său

Definiția 22

Fie P punctul de concurență a cevienelor AA', BB', CC' din triunghiulABC. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ intersectează a doua oară laturile triunghiului ABC în punctele A'', B'', C''. Triunghiul $A''B''C''$ se numește triunghiul ciclocevian al triunghiului ABC corespunzător punctului P.

Observația 37

În *Figura 45*, triunghiul $A''B''C''$ este triunghiul ciclocevian al triunghiului ABC, corespunzător punctului P, intersecția cevienelor AA', BB', CC'. Putem spune că cercul circumscris triunghiului P-pedal al unui punct intersectează laturile triunghiului în vârfurile triunghiului ciclocevian al punctului P – vom numi triunghiul $A''B''C''$ triunghiul P-ciclocevian al triunghiului ABC.

Definiția 23

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$se numesc *omologice* dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. Punctul de concurență se numește *centrul omologiei*.

Teorema 9 (Terquem – 1892)

Triunghiul ABC și triunghiul său P-ciclocevian sunt triunghiuri omologice.

Demonstrație

Vom folosi *Figura 45* pentru expunerea demonstrației. Cum AA', BB', CC' sunt concurente în P, din *Teorema lui Ceva* avem:

$A'B \cdot B'C \cdot C'A = A'C \cdot B'A \cdot C'B$. (1)

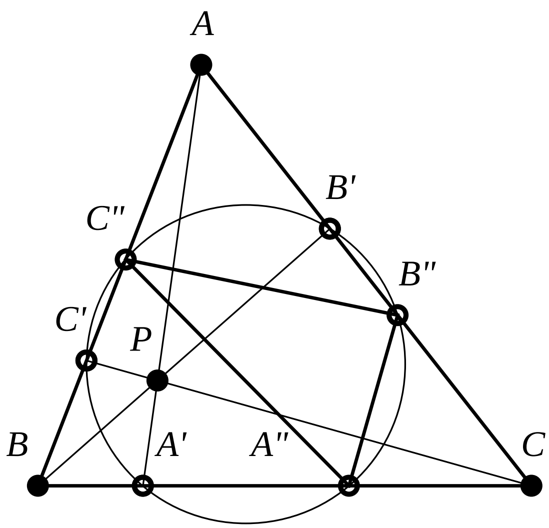


Figura 45

Considerând puterile vârfurilor triunghiului ABC față de cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$, avem:

$AC' \cdot AC'' = AB' \cdot AB''$, (2)

$BC' \cdot BC'' = BA' \cdot BA''$, (3)

$CA' \cdot CA'' = CB' \cdot CB''$. (4)

Înmulțind aceste ultime trei relații și ținând seama de relația (1), obținem:

$AC'' \cdot BA'' \cdot CB'' = AB'' \cdot BC'' \cdot CA''$, sau echivalent:

$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1.$ (5)

Relația (5) și *Teorema lui Ceva* arată că cevienele AA'', BB'', CC'' sunt concurente, în consecință triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt omologice.

Definiția 24

Punctul de concurență a dreptelor AA'', BB'', CC'' se numește ciclocevianul punctului P.

Observația 38

a) Ortocentrul H și centrul de greutate G ale unui triunghi sunt puncte cicloceviene, deoarece triunghiurile ortic și median sunt înscrise în cercul celor nouă puncte.

b) Triunghiul median este triunghiul H-ciclocevian al triunghiului ABC.
c) Triunghiul ortic este triunghiul G-ciclocevian.

Teorema 10

În triunghiul ABC, fie $A_1B_1C_1$ triunghiul P-pedal și $A_2B_2C_2$ triunghiul P-ciclocevian. Dacă triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt ortologice, iar Q_1 și Q_2 sunt centrele lor de ortologie, atunci:

i. Q_1 și Q_2 sunt puncte conjugate izogonal;
ii. Triunghiurile ABC și $A_2B_2C_2$ sunt ortologice;
iii. Centrele de ortologie ale triunghiurilor ABC și $A_2B_2C_2$ sunt punctele Q_1 și Q_2.

Demonstrație

i. FieQ_1 – centrul de ortologie al triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și ABC (triunghiul $A_1B_1C_1$ este triunghiul podar al punctului Q_1. Notăm Q_2 al doilea centru de ortologie al triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și ABC. Conform *Teoremei 6*, avem că punctele Q_1 și Q_2 sunt izogonale.

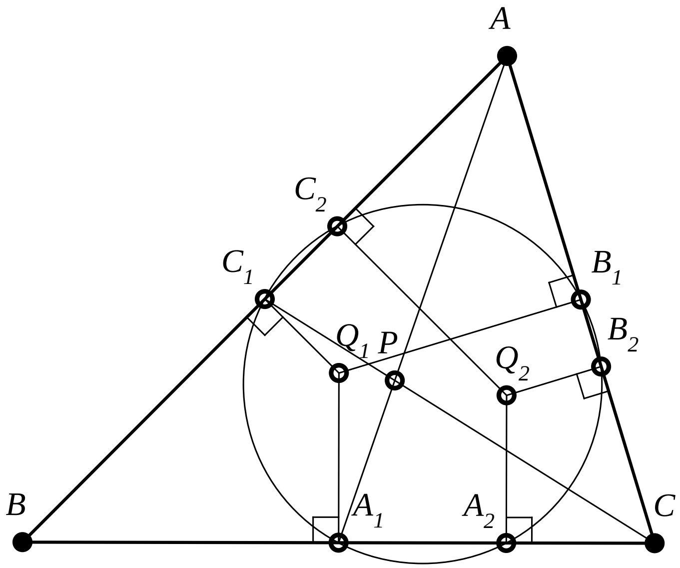


Figura 46

ii. Dacă notăm $A_2'B_2'C_2'$ triunghiul podar al lui Q_2 și ținem seama de *Teorema 9*, rezultă că punctele A_1, A_2', B_1, B_2', C_1, C_2' sunt conciclice. Deoarece, dacă două cercuri au în comun trei puncte, atunci ele coincid, rezultă că $A_2' = A_2$, $B_2' = B_2$, $C_2' = C_2$, deci triunghiul podar al lui Q_2 este triunghiul P-ciclocevian, adică $A_2B_2C_2$. Acest triunghi, fiind triunghi podar al lui ABC, este ortologic cu ABC (*Teorema 6*), centrul de ortologie fiind Q_a.

iii. Aplicând *Teorema 6*, avem că și perpendicularele duse din A, B, C pe B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 sunt concurente în izogonalul punctului Q_2, deci în punctul Q_1.

Definiția 25

Despre două triunghiuri care sunt simultan triunghiuri ortologice șitriunghiuri omologice vom spune că sunt *triunghiuri bilogice*.

Observația 39

Triunghiurile ABC și $A_2B_2C_2$ din *Teorema* precedentă sunt triunghiuri bilogice. Omologia rezultă din *Teorema 9*.

2.17 Un triunghi și triunghiul celor trei imagini al său

Definiția 26

Triunghiul care are ca vârfuri simetricele vârfurilor unui triunghi dat față de laturile sale opuse se numește triunghiul celor trei imagini al triunghiului dat.

Observația 40

a) În *Figura 47*, triunghiul $A''B''C''$ este triunghiul celor trei imagini al triunghiului ABC.
b) Triunghiul celor trei imagini nu este de făcut pentru un triunghi dreptunghic.

Propoziția 28

Un triunghi nedreptunghic dat și triunghiul celor trei imagini al său sunt triunghiuri bilogice.

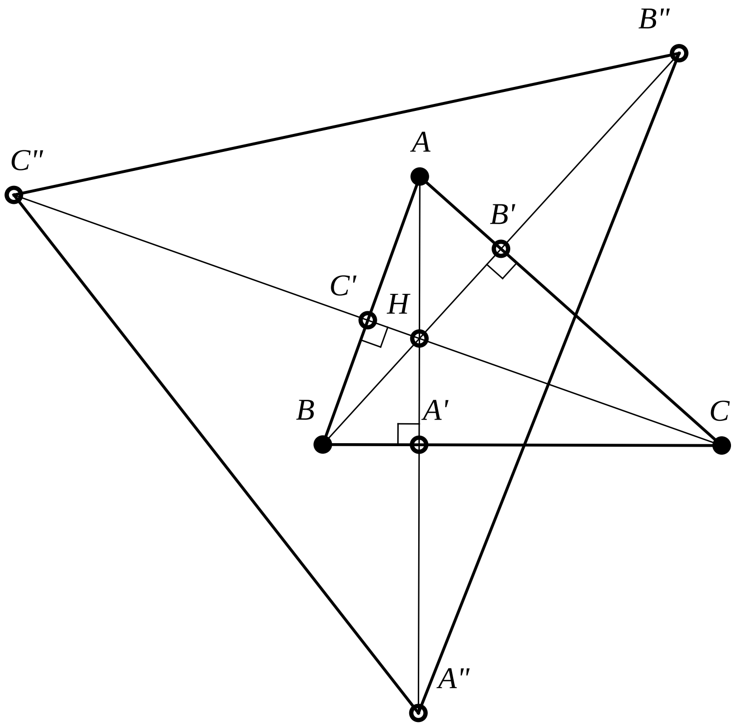


Figura 47

Demonstrație

Evident, AA'', BB'', CC'' (vezi *Figura 43*) sunt concurente în H, ortocentrul triunghiului ABC, punct ce este centrul omologiei triunghiurilor ABC și $A''B''C''$. Perpendicularele duse din A'', B'', C'' pe BC, CA, AB sunt "înălțimi" în ABC, deci ortocentrul este și centru de ortologie al triunghiurilor $A''B''C''$ și ABC.

Teorema 11 (V. Thébault – 1947)

Triunghiul celor trei imagini al unui triunghi dat este omotetic cu triunghiul podar al centrului cercului celor nouă puncte corespunzător triunghiului dat.

Demonstrație

Fie H ortocentrul triughiului ABC, $A_1B_1C_1$ triunghiul median al lui ABC și $A_2B_2C_2$ triunghiul O_9-podar în ABC (vezi *Figura 48*). Notăm cu H_1 simetricul lui H față de BC, adică intersecția semidreptei $(HA'$ cu cercul circumscris triunghiului ABC. Deoarece O_9 este mijlocul segmentului OH, rezultă că în trapezul dreptunghic $HA'A_1O$ avem O_9A_2 linie mijlocie, deci $2O_9A_2 = OA_1 + HA'$.

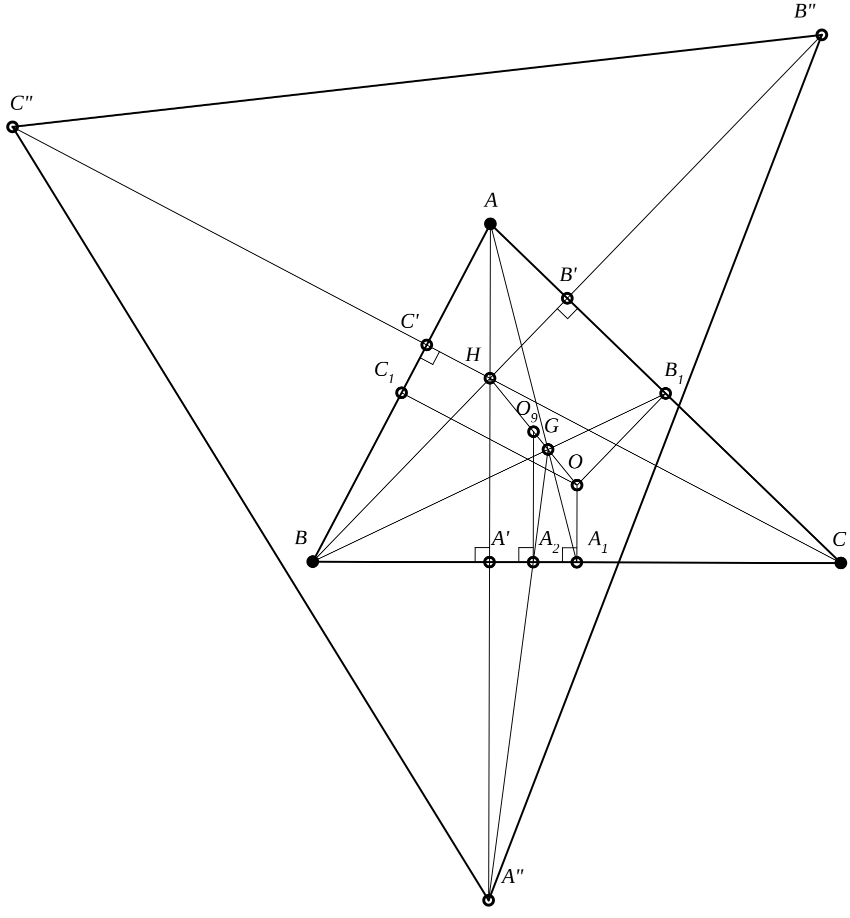


Figura 48

Ținând seama că $2OA_1 = AH$, avem: $4O_9A_2 = 2OA_1 + 2HA'$, adică: $4O_9A_2 = HH_1 + A''H_1 = HA''$.

Pe de altă parte, $4O_9G = GH$ (G-centrul de greutate), obținem din ultimele relații că: $\frac{O_9A_2}{HA''} = \frac{O_9G}{HG} = \frac{1}{4}$. Deoarece H, O_9, G sunt coliniare și $O_9A_2 \parallel HA'$, avem că triunghiurile O_9GA_2 și HGA'' sunt asemenea, deci punctele G, A_2, A'' sunt coliniare.

În consecință, avem că: $\frac{GA_2}{GA''} = \frac{1}{4}$. Analog, găsim că G, B_2, B'' și G, C_2, C'' sunt coliniare și: $\frac{GB_2}{GB''} = \frac{GC_2}{GC''} = \frac{1}{4}$. Relațiile obținute arată că triunghiurile $A_2B_2C_2$ (podarul lui O_9) și $A''B''C''$ triunghiul celor 3 imagini sunt omotetice prin omotetia $h\left(G; \frac{1}{4}\right)$.

Propoziția 39

Triunghiul celor trei imagini al unui triunghi dat și triunghiul podar al centrului cercului celor nouă puncte sunt triunghiuri ortologice.

Demonstrația acestei propoziții rezultă din *Teorema 11* și din faptul că dacă două triunghiuri sunt omotetice, ele sunt ortologice.

2.18 Un triunghi și triunghiul Carnot al său

Definiția 27

Numim cercuri Carnot ale triunghiului ABC, nedreptunghic, dat, de ortocentru H, cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, CHA, AHB.

Definiția 28

Triunghiul $O_aO_bO_c$ determinat de centrele cercurilor Carnot ale triunghiului ABC se numește triunghiul Carnot al triunghiului ABC.

Propoziția 40

Un triunghi dat și triunghiul Carnot al său sunt triunghiuri ortologice. Centrele de ortologie sunt ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului dat.

Demonstrație

În *Figura 49*, am considerat ABC un triunghi ascuțitunghic de ortocentru H. Deoarece O_bO_c este mediatoarea segmentului AH (coardă comună în cercurile Carnot (O_b), (O_c)) și $AH \perp BC$, rezultă că$O_bO_c \parallel BC$. Analog,$O_aO_b \parallel AB$ și $O_aO_c \parallel AC$, prin urmare triunghiurile ABC și $O_aO_bO_c$ au laturile respectiv paralele, deci sunt omotetice și, în consecință, ortologice.

Centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $O_aO_bO_c$ este H, deoarece perpendicularele duse din A, B, C pe laturile triunghiului $O_aO_bO_c$ sunt înălțimile triunghiului ABC. Perpendicularele din O_a, O_b, O_c pe BC, CA, AB sunt chiar mediatoarele triunghiului ABC, deci al doilea centru de ortologie este O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

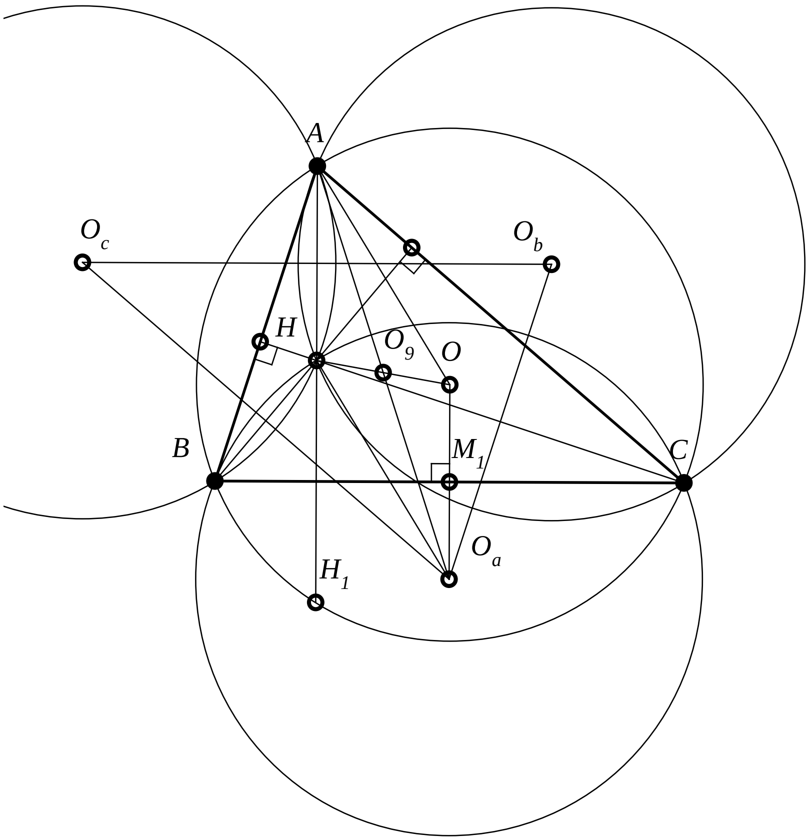


Figura 49

Propoziția 41

Cercurile Carnot ale unui triunghi sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului.

Demonstrație

Notăm cu H_1 simetricul lui H față de BC; conform *Propoziției 8*, acesta aparține cercului circumscris triunghiului ABC, prin urmare simetricul triunghiului BHC față de BC este triunghiul BH_1C și ca atare simetricul cercului Carnot (O_a) față de BC este cercul circumscris triunghiului ABC, deci aceste cercuri sunt congruente.

Observația 41

Propozițiile 40, 41 se demonstrează analog și dacă ABC este triunghi obtuzunghic.

Propoziția 42

Triunghiul lui Carnot $O_aO_bO_c$ este congruent cu triunghiul ABC.

Demonstrație

Fie M_1 mijlocului lui (BC); avem $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, și cum M_1 este mijlocul lui (OO_a), rezultă că patrulaterul AHO_aO este paralelogram. Centrul acestui paralelogram este mijlocul O_9 al segmentului OH, în consecință AO_a trece prin O_9. Se observă că $\Delta OO_aO_b \equiv \Delta HAB$ (L.U.L.), prin urmare $(AB) = (O_aO_b)$, analog găsim că $(BC) = (O_bO_c)$ și $(CA) = (O_aO_c)$. Triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC sunt congruente; avem de asemenea că triunghiul lui Carnot este omoteticul triunghiului ABC prin omotetia $h(O_9, -1)$ sau echivalent triunghiul lui Carnot este simetricul față de O_9 al triunghiului ABC.

Observația 42

Propoziția 42 se demonstrează analog și în cazul triunghiului obtuzunghic.

Definiția 29

Un cvartet de puncte (un patrupunct) astfel încât oricare dintre ele este ortocentrul triunghiului determinat de celelalte trei puncte se numește *patrupunct ortocentric*.

Remarca 10

Patrupunctul format din vârfurile unui triunghi nedreptunghic și din ortocentrul său este un patrupunct ortocentric.

Propoziția 43

Dacă ABC este un triunghi nedreptunghic de ortocentru H și centrul cercului circumscris notat O, iar $O_aO_bO_c$ este triunghiul lui Carnot, atunci triunghiurile BHC și OO_bO_c, CHA și OO_aO_c, AHB și OO_aO_b sunt ortologice.

Demonstrația propoziției rezultă din *Propoziția 40*. Centrele de ortologie ale fiecărei perechi de triunghiuri din ipoteză sunt punctele O și H.

Observația 43

Triunghiurile din perechile care apar în propoziția precedentă sunt simetrice față de O_9 – centrul cercului celor nouă puncte ale triunghiului ABC.

2.19 Un triunghi și triunghiul Fuhrmann al său

Definiția 30

Se numește *triunghiul lui Fuhrmann* al triunghiului ABC triunghiul al cărui vârfuri sunt simetricele mijloacelor arcelor mici $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ ale cercului circumscris față de laturile BC, CA, respectiv AB.

Observația 43

În *Figura 46, triunghiul lui Fuhrmann* a fost notat $F_aF_bF_c$. Cercul circumscris triunghiului lui Fuhrmann se numește *cercul lui Fuhrmann*.

Propoziția 44

Un triunghi dat și *triunghiul Fuhrmann* al său sunt triunghiuri ortologice.

Demonstrație

În *Figura 50*, am notat A', B', C' mijloacele arcelor mici $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$. Dreptele $A'F_a$, $B'F_b$, $C'F_c$ sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC prin urmare sunt concurente în O centrul cercului circumscris deci triunghiurile

$F_aF_bF_c$ și ABC sunt ortologice, iar O este centru de ortologie. Celălalt centru de ortologie îl vom nota cu P. Demonstrăm în continuare câteva proprietăți care ne vor ajuta să definim P plecând de la triunghiul Fuhrmann $F_aF_bF_c$ al triunghiului ABC.

Propoziția 45

Într-un triunghi ABC dreptele determinate de ortocentrul H și de vârfurile *triunghiului Fuhrmann* sunt respectiv perpendiculare pe bisectoarele AI, BI, CI.

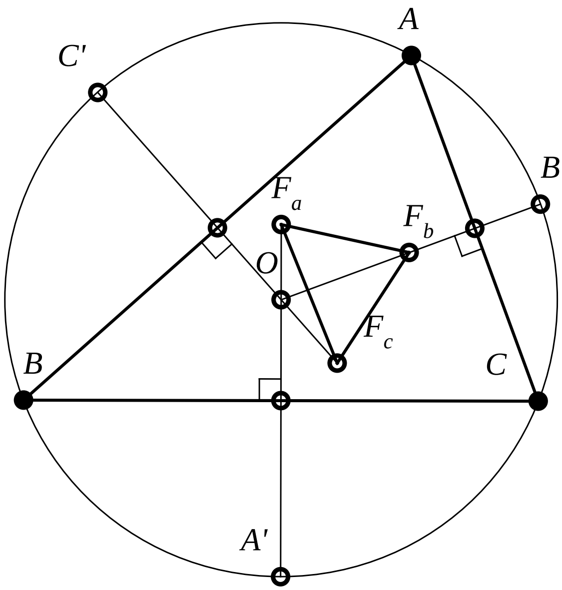


Figura 50

Demonstrație

În *Figura 51*, am considerat un triunghi ascuțitunghic în care bisectoarea AI intersectează cercul circumscris triunghiului în $A^{'}$, iar AH intersectează același cerc în H_1. Notăm cu $A^{''}$ diametrul lui $A^{'}$ în cercul circumscris.

Avem că $AH \parallel A'A''$ (aceasta din urmă fiind mediatoarea lui BC), deci coardele $A^{'}A^{''}$ și $H_1A^{'}$ sunt congruente.

Pe de altă parte, H_1 fiind simetricul lui H față de BC și A' simetricul lui F_a față de BC, avem că patrulaterul H_1AF_aA' este trapez isoscel, în consecință $HF_a = H_1A'$. Din $AA'' = H_1A'$ și relația precedentă, obținem că $AA'' = HF_a$ și aceasta împreună cu $AH \parallel A''F_a$ conduc la AHF_aA'' paralelogram. Deoarece $A''A \perp AA'$, rezultă că $HF_a \perp AI$.

Analog, demonstrăm celelelate perpendicularități.

Observația 44

Paralelismul $AA'' \parallel HF_a$se poate deduce, și astfel: AA''este antiparalelă cu H_1A'; HF_aeste antiparalelă cu H_1A', prin urmare, AA'' și HF_a sunt paralele (vezi *Propoziția 3*).

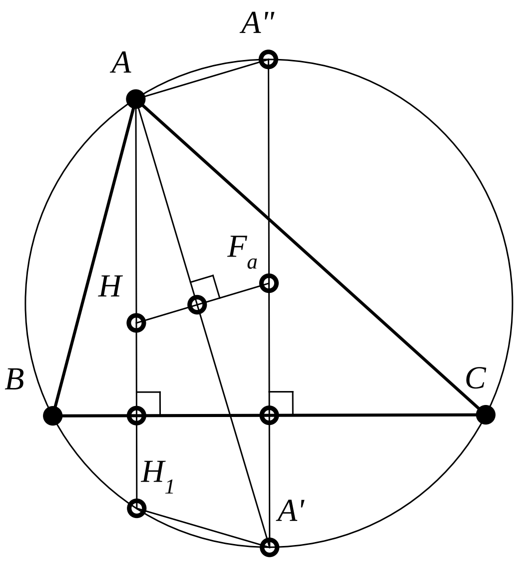


Figura 51

Teorema 12 (Dreapta lui Housel)

Într-un triunghi, centrul cercului înscris, centrul de greutate și *punctul lui Nagel* sunt coliniare, iar $GN = 2IG$.

Demonstrație 1

Notăm cu C_a proiecția lui I pe BC și cu I'_a piciorul cevienei AN. Punctul I'_a este proiecția pe BC a centrului cercului A-exînscris I_a, de asemenea notăm A' piciorul înălțimii din A (vezi *Figura 52*).

Vom demonstra că triunghiurile $AA'I'_a$ și IC_aA_1 sunt asemenea (CA_1 este mijlocul lui BC).

Deoarece punctele C_a și I'_a sunt izotomice, avem: $BC_a = CI'_a = p - b$. Calculăm:

$I'_aA' = a - BA' - I'_aC = a - c\cos B - (p - b)$.

Deoarece $c\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ se obține $I'_aA' = \frac{p(b-c)}{a}$. Avem: $C_aA_1 = \frac{1}{2}(b-c)$, $IC_a = r = \frac{S}{p}$, $AA' = \frac{2S}{a}$. Rezultă: $\frac{I'_aA'}{A_1C_a} = \frac{AA'}{IC_a} = \frac{2p}{a}$.

Triunghiurile evidențiate sunt asemenea și în consecință: $IA_1 \parallel AH$.

Aplicând*Teorema lui Menelaus* în triunghiul AI'_aC pentru transversale B-N-I'_b se găsește că $\frac{AN}{AI'_a} = \frac{p}{a}$ (I'_b - piciorul cevienei Nagel BN). Notăm $\{G'\} = IN \cap AA_1$, avem: $\frac{IG'}{G'N} = \frac{IA_1}{AN} = \frac{1}{2}$, aceasta arată că G' împarte mediana AA_1 în raportul $\frac{2}{1}$, prin urmare $G' = G$ – centrul de greutate al triunghiului ABC și $2IG = GN$.

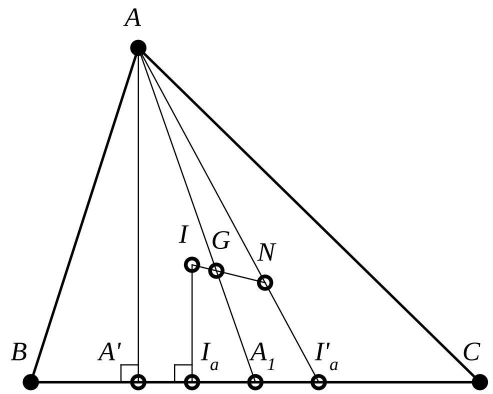


Figura 52

Demonstrație 2

Fie P un punct în planul triunghiului ABC; deoarece $\frac{BI'_a}{I'_aC} = \frac{p-c}{p-b}$, avem:

$\overrightarrow{PI'_a} = \frac{\overrightarrow{PB}+\frac{p-c}{p-b}\cdot\overrightarrow{PC}}{1+\frac{p-c}{p-b}}$. Obținem: $\overrightarrow{PI'_a} = \frac{p-b}{a}\cdot\overrightarrow{PB} + \frac{p-c}{a}\overrightarrow{PC}$. Având $\frac{AN}{NI'_a} = \frac{Q}{p-a}$, rezultă $\overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{PA}+\frac{a}{p-a}\cdot\overrightarrow{PI'_a}}{1+\frac{a}{p-a}}$, deci vectorul de poziție al punctului Nagel este:

$\overrightarrow{PN} = \frac{p-a}{p}\cdot\overrightarrow{PA} + \frac{p-b}{p}\cdot\overrightarrow{PB} + \frac{p-c}{p}\cdot\overrightarrow{PC}$.

Considerând în această relație $P = G$ (centrul de greutate) și ținând seama că $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, obținem:

$$\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{p}\left(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}\right). \quad (1)$$

Se știe că vectorul de poziție al centrului cercului înscris I este:

$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2r}\left(a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}\right)$, luând $P = G$, avem:

$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2p}\left(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}\right). \quad (2)$$

Relațiile (1) și (2) arată că I, G, H sunt coliniare și că $2IG = GH$.

Propoziția 46

Cercul lui Fuhrmann al triunghiului ABC are ca diametru segmentul HN determinat de ortocentru și de *punctul lui Nagel*.

Demonstrație

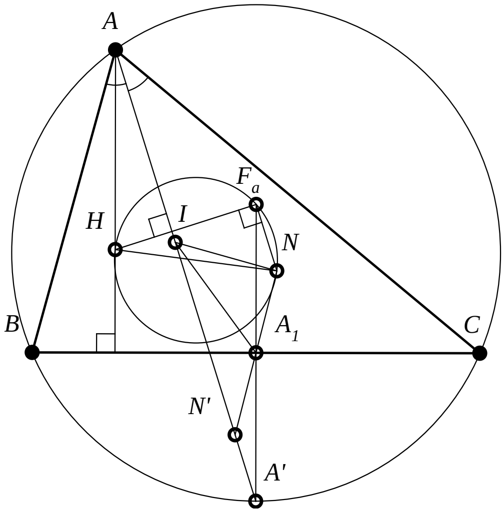


Figura 53

În *Figura 53*, am considerat un triunghi ascuțitunghic de ortocentru H. Din *Teorema 11*, rezultă că $IA_1 \parallel AN$ și $2IA_1 = AN$ (A_1, mijlocul lui BC). Construim N' intersecția dreptei NA_1 cu AI, deoarece în triunghiul $N'AN$ avem $IA_1 \parallel AN$ și $2IA_1 = AN$, rezultă că IA_1 este linie mijlocie în triunghiul $N'NA$, deci $N'A_1 = A_1N$, având și $A'A_1 = A_1F_a$, obținem că patrulaterul $NF_aN'A'$ este paralelogram, în consecință $NF_a \parallel AI$. Am demonstrat că $HF_a \perp AI$, rezultă deci că $m(\widehat{HF_aN}) = 90^0$, adică F_a aparține cercului de diametru HN. Analog, se demonstrează că F_b, F_c sunt pe cercul de diametru HN și analog se demonstrează propoziția în cazul triunghiului obtuzunghic.

Propoziția 47

Măsurile unghiurilor *triunghiului lui Fuhrmann* al triunghiului ABC sunt $90^0 - \frac{A}{2}$, $90^0 - \frac{B}{2}$, $90^0 - \frac{C}{2}$.

Demonstrație

HF_a este perpendiculară pe bisectoarea AI, iar HF_b este perpendiculară pe bisectoarea BI. Deoarece $m(\widehat{AIB}) = 90^0 + \frac{C}{2}$, iar unghiul $\widehat{F_aNF_b}$ este suplementul său; acesta are măsura $90^0 - \frac{C}{2}$. Pe de altă parte, $\widehat{F_aHF_b} \equiv \widehat{F_aF_cF_b}$, deci $m(\widehat{F_aF_cF_b}) = 90^0 - \frac{C}{2}$. Analog, rezultă $m(\widehat{F_bF_aF_b}) = 90^0 - \frac{A}{2}$ și $m(\widehat{F_cF_bF_a}) = 90^0 - \frac{B}{2}$.

Propoziția 48

Al doilea centru de ortologie, P, al triunghiului ABC și al triunghiului său Fuhrmann, $F_aF_bF_c$, este intersecția cercurilor: $\mathcal{C}(F_a; F_aB)$, $\mathcal{C}(F_b; F_bC)$, $\mathcal{C}(F_c; F_cA)$.

Demonstrație

Notăm cu T intersecția perpendicularei dusă din C pe F_aF_b cu dreapta F_aF_c (vezi *Figura 54*). Deoarece $m(\widehat{F_bF_aF_c}) = 90^0 - \frac{A}{2}$, rezultă că $m(\widehat{F_cBC}) = \frac{A}{2}$, cum și $m(\widehat{F_aBC}) = \frac{A}{2}$, obținem că punctul T este pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Dacă P este centru de ortologie al triunghiurilor ABC și $F_aF_bF_a$, se observă că$\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle TF_aF_b$ (unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare), de asemenea, avem $\sphericalangle TF_aB \equiv \sphericalangle BCT$ (patrulaterul BCF_aT este inscriptibil). Unghiurile BCT și $F_bF_aA_1$ sunt de asemenea congruente (au laturile respectiv perpendiculare); obținem că: $\sphericalangle TF_aB \equiv \sphericalangle F_bF_aA_1$ și apoi că $\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle BF_aA_1$ sau că: $\sphericalangle BPC = \frac{1}{2}\sphericalangle BF_aC$. Această ultimă relație arată că punctul P este pe cercul cu centru F_a și care trece prin B și C. În același mod, demonstrăm că P aparține cercurilor: $\mathcal{C}(F_b, F_bC)$, $\mathcal{C}(F_c, F_cA)$.

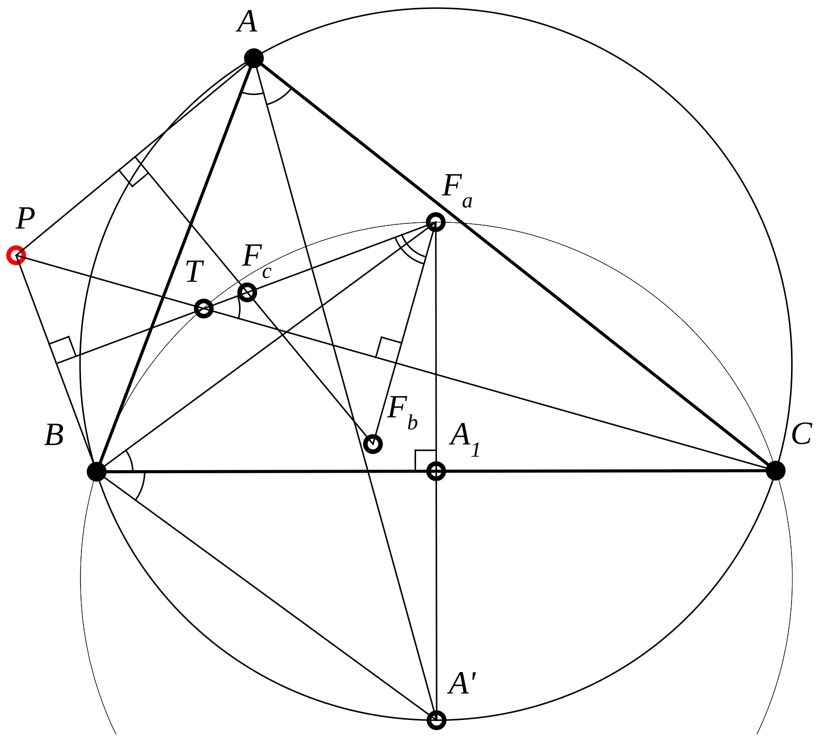


Figura 54

Propoziția 49

Simetricele vârfurilor unui triunghi ascuțitunghic dat față de laturile triunghiului său H-circumpedal sunt vârfurile triunghiului lui Fuhrmann al triunghiului său H-circumpedal.

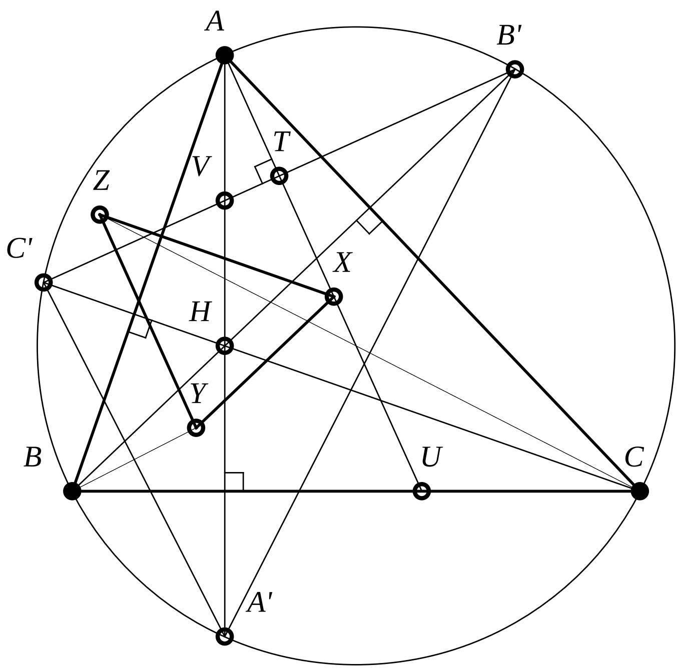


Figura 55

Demonstrație

În *Figura 55*, am notat cu $A'B'C'$ triunghiul H-circumpedal al lui ABC și cu X, Y, Z simetricele punctelor A, B, C față de $B'C'$, $C'A'$, respectiv $A'B'$. Am văzut că triunghiul H-circumpedal al lui ABC este omotetic cu triunghiul ortic al lui ABC. De asemenea, triunghiul ABC și triunghiul său ortic sunt ortologice și O, centrul cercului circumscris, este centru de ortologie.

Deoarece perpendiculara dusă din A pe $B'C'$ trece prin O, înseamnă că aceasta este mediatoarea laturii $B'C'$; prin urmare, A este mijlocul arcului $\overset{\frown}{B'C'}$ și X este vârf al *triunghiului Fuhrmann* al triunghiului$A'B'C'$.

Demonstrație analoagă pentru celelalte vârfuri.

Teorema 13 (M. Stevanovic – 2002)

Într-un triunghi ascuțitunghic, ortocentrul triunghiului lui Fuhrmann coincide cu centrul cercului înscris în triunghiul dat.

Demonstrație

Vom folosi *Figura 51*, în care am văzut că XYZ este *triunghiul Fuhrmann* al triunghiului $A'B'C'$ (H-circumpedalul lui ABC). Este suficient să demonstrăm că H, ortocentrul lui ABC și centrul cercului înscris în $A'B'C'$, este ortocentrul lui XYZ. Vom demonstra că $XH \perp YZ$, arătând că $\overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} = 0$.

Avem:

$\overrightarrow{XH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AX}$, (1)

$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CZ}$. (2)

Deoarece Y și Z sunt simetricele lui B, respectiv C, față de $A'C'$, respectiv $A'B'$, cu regula paralelogramului, avem: $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'}$; înlocuind în (2) aceste relații, rezultă:

$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{BA'} - \overrightarrow{BC'}$. (3)

Dar$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'B} = 0$, deci:

$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{C'B}$. (4)

Deoarece:

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$, (5)

obținem: $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C'B'}$. Evaluăm: $\overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} = \left(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AX}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{C'B'}\right)$, rezultă că $\overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{C'B'}$.

Dar $AH \perp CB$, deci $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ și $AX \perp C'B'$, deci $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{C'B'} = 0$; astfel:

$\overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC}$. (6)

Notăm $\{U\} = AX \cap BC$ și $\{V\} = AH \cap B'C'$, avem $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC} = AX \cdot BC \cdot \cos \widehat{AX, BC} = AX \cdot BC \cdot \cos \widehat{AUC}$, $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{C'B'} = AN \cdot C'B' \cdot \cos \widehat{AH, B'C'} = AH \cdot C'B' \cdot \cos\left(\widehat{AYC'}\right)$.

Observăm că $\sphericalangle AUC \equiv \sphericalangle AYC'$ (au laturile respectiv perpendiculare). Punctul B' este simetricul lui H față de AC, deci $\sphericalangle HAC \equiv \sphericalangle CAB'$; analog, se obține $\sphericalangle HAB \equiv \sphericalangle BAC'$ și din aceste două relații: $\sphericalangle B'AC' = 2\hat{A}$.

Teorema sinusurilor în triunghiurile $AB'C'$ și ABC furnizează relațiile $B'C' = 2R \sin 2A$, $BC = 2R \sin 2A$ (R – raza cercului circumscris).

Vom arăta că $AX \cdot BC = AH \cdot B'C'$ este echivalentă cu $AX \cdot 2R \sin A = AH \cdot 2R \sin 2A$, adică cu $AX = 2AH \cdot \cos A$. Din $\sphericalangle B'AC' = 2\hat{A}$ și $AX \perp B'C'$, rezultă că $\sphericalangle TAC' = \hat{A}$. Pe de altă parte, $AC' = AH$ (pentru că $AH = AB'$ și $AB' = AC'$). Cum $AT = \frac{1}{2}AX$ și $AT = AC'\cos A = AH \cdot \cos A$, rezultă că $AX = 2AH\cos A$. Unghiurile dreptelor $\sphericalangle(AH, C'B')$ și $\sphericalangle(AX, BC)$ sunt suplementare, deci obținem din (6) că $\overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} = 0$

Analog, demonstrăm că $YH \perp XZ$, așadar H este ortocentrul *triunghiului lui Fuhrmann*XYZ.

Propoziția 50

Triunghiul lui Fuhrmann și *triunghiul lui Carnot* corespunzătoare unui triunghi dat sunt ortologice.

Demonstrația acestei proprietăți este imediată dacă observăm că O_ași F_a aparțin mediatoarei laturii BC. Centrul de ortologie al *triunghiului Carnot* $O_aO_bO_c$ în raport cu *triunghiul Fuhrmann* $F_aF_bF_c$ este O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

3

TRIUNGHIURI ORTOLOGICE DEGENERATE

În această secțiune a lucrării, vom defini noțiunea de ortopol al unei drepte în raport cu un triunghi și vom stabili conexiuni între această noțiune și triunghiurile ortologice.

3.1 Triunghiuri degenerate, ortopolul unei drepte

Definiția 31

Un triplet de puncte coliniare distincte, unite între ele prin segmente, vom spune că este un *triunghi degenerat* de laturi $(\boldsymbol{AB}), (\boldsymbol{BC}), (\boldsymbol{CA})$ și de vârfuri $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.
Vom admite că orice două drepte paralele sunt "concurente" într-un punct "aruncat la infinit"; putem formula:

Propoziția 51

Două triunghiuri degenerate ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

Un caz important este atunci când considerăm ABC un triunghi oarecare și triunghiul $A_1B_1C_1$ triunghi degenerat.

Teorema 14 (Teorema ortopolului; Soons – 1886)

Dacă ABC este un triunghi dat, d este o dreaptă oarecare, iar A_1, B_1, C_1 sunt proiecțiile ortogonale ale vârfurilor A, B, C pe d, atunci perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA și AB sunt concurente într-un punct numit *ortopolul drepteid* în raport cu triunghiul ABC.

Demonstrația 1(Niculae Blaha, 1949)

Considerăm că A_1, B_1, C_1 sunt vârfurile unui triunghi degenerat. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1, fiind perpendiculare pe d, sunt concurente la infinit, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt deci ortologice. În virtutea teoremei triunghiurilor ortologice, vom avea că și perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA și AB sunt concurente.

Demonstrația 2

Notăm cu A', B', C' proiecțiile ortogonale ale punctelor A_1,B_1, C_1 respectiv pe BC, CA și AB (vezi *Figura 56*).

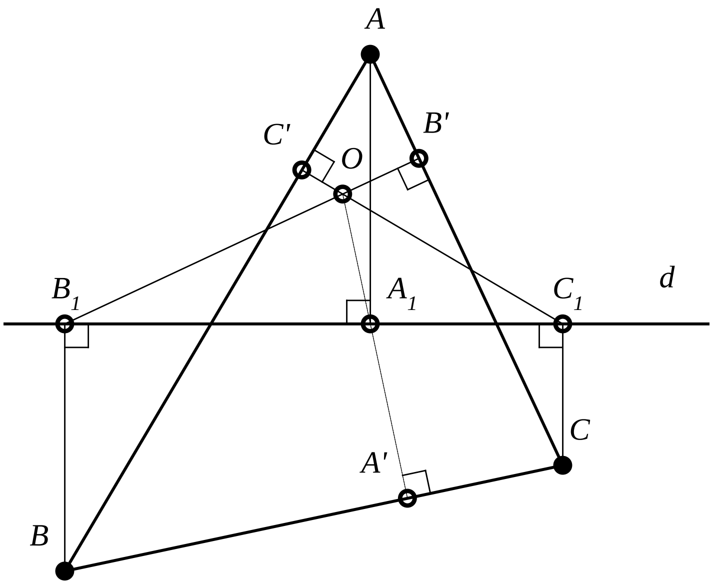


Figura 56

Avem că:

$$A'B^2 - A'C^2 = A_1B^2 - A_1C^2 = BB_1^2 + B_1A_1^2 - CC_1^2 - C_1A_1^2$$
$$B'C^2 - B'A^2 = B_1C^2 - B_1A^2 = CC_1^2 + B_1C_1^2 - AA_1^2 - B_1A_1^2$$
$$C'A^2 - C'B^2 = C_1A^2 - C_1B^2 = AA_1^2 + A_1C_1^2 - BB_1^2 - B_1C_1^2$$

Din cele trei relații anterioare, obținem că:

$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$.

Conform *Teoremei lui Carnot*, rezultă concurența dreptelor $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$.

Demonstrația 3 (Traian Lalescu – 1915)

Punctele B_1 și C_1 sunt egal depărtate de mijlocul M_a al laturii BC pentru că perpendiculara dusă din M_a pe d este mediatoarea segmentului $B_1C_{i_0}$.

Analog, A_1 și C_1 sunt egal depărtate de M_b - mijlocul lui AC, iar A_1 și B_1 sunt egal depărtate de M_c (vezi *Figura 57*).

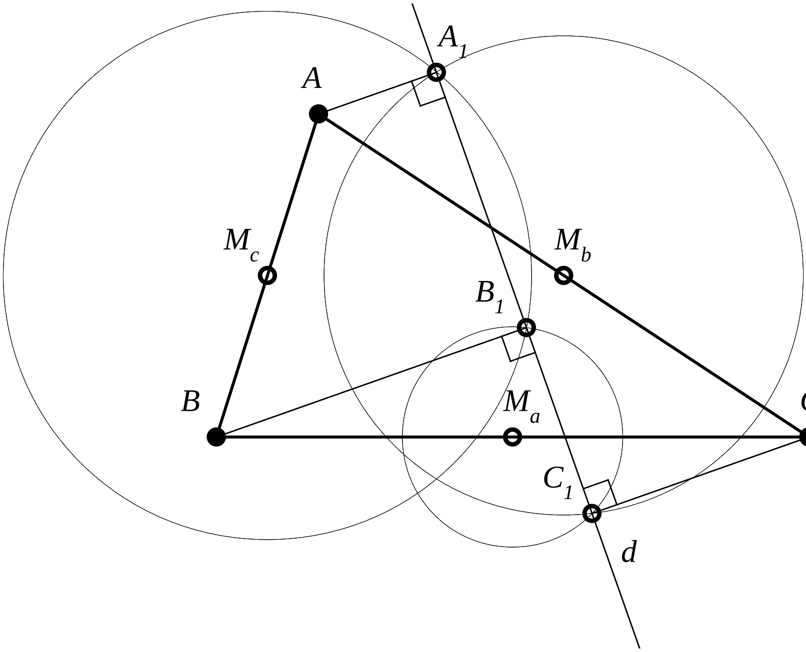


Figura 57

Considerăm cercurile $\mathcal{C}(M_a, M_aB_1)$, $\mathcal{C}(M_b, M_bC_1)$, $\mathcal{C}(M_c, M_cA_1)$. Primele două cercuri, având în comun punctul C_1, mai au încă un punct comun, iar coarda lor comună este perpendiculară pe M_aM_b (linia centrelor), cum M_aM_b este paralelă cu AB, ceea ce înseamnă că coarda comună este perpendiculară pe AB.

Analog, cercurile cu centrele M_b și M_c au în comun o coardă ce are extremitatea A_1 și fiind perpendiculară pe M_bM_c este perpendiculară și pe BC.

În fine, cercurile cu centrele M_a și M_c au în comun o coardă ce are extremitatea B_1 și este perpendiculară pe AB.

Cele trei cercuri având două câte două o coardă comună și centrele lor fiind necoliniare conform unei teoreme rezultă că aceste coarde sunt concurente.

Punctul lor de concurență, adică centrul radical al cercurilor considerate este ortopolul dreptei d în raport cu triunghiul ABC.

Definiția 32

DacăABC este un triunghi și A_1, B_1, C_1 sunt proiecțiile vârfurilor sale pe o dreaptă d, iar O este ortopolul dreptei d, atunci cercurile circumscrise triunghiurior OA_1B_1, OB_1C_1, OC_1A_1 se numesc *cercuri ortopolare* ale triunghiului ABC.

Observația 45

Din această definiție și din *Demonstrația 3* a teoremei precedente, rezultă că centrele cercurilor ortopolare sunt mijloacele laturilor triunghiului dat.

3.2 Dreapta lui Simson

Teorema 15 (Wallace, 1799)

Proiecțiile unui punct ce aparține cercului circumscris unui triunghi pe laturile triunghiului sunt puncte coliniare.

Demonstrație

Fie$M$ punct pe cercul circumscris triunghiului ABC și $A_1B_1C_1$ proiecțiile ortogonale ale lui BC, CA, respectiv AB (vezi *Figura 58*).

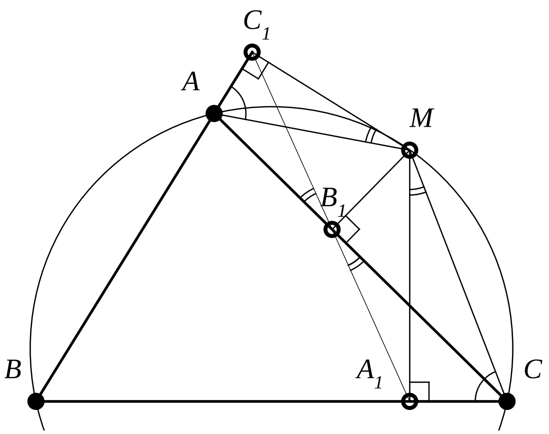


Figura 58

Din patrulaterul inscriptibil $ABMC$ rezultă că: $\sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle MAC_1$, iar din această relație obținem că:

$\sphericalangle CMA_1 \equiv \sphericalangle C_1MA$, (1)

fiind complementele unghiurilor anterioare.

Patrulaterele MB_1A_1C și MB_1AC_1 sunt inscriptibile, prin urmare:

$\sphericalangle A_1B_1C \equiv \sphericalangle A_1MC$, (2)

$\sphericalangle C_1BA \equiv \sphericalangle C_1MA$. (3)

Relațiile (1), (2) și (3) implică $\sphericalangle A_1B_1C \equiv \sphericalangle AB_1C_1$, în consecință punctele A_1, B_1 și C_1 sunt coliniare.

Observația 46

a) Dreapta punctelor A_1, B_1, C_1 se numește *dreapta lui Simson* a punctului M față de triunghiul ABC.

b) Dacă $A_1B_1C_1$ este *dreapta lui Simson* a triunghiului ABC în raport cu punctul M, putem considera $A_1B_1C_1$ un triunghi degenerat. Acest triunghi este ortologic cu triunghiul ABC, punctul M fiind un centru de ortologie, celălalt centru de ortologie fiind "aruncat la infinit".

Teorema 16 (Reciproca *Teoremei Simson-Wallace*)

Fie ABC un triunghi dat și $A_1B_1C_1$ un triunghi degenerat, cu $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu ABC este un punct ce aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație

Deoarece ABC este ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$ (centrul de ortologie este aruncat la infinit), rezultă că $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu ABC, fie M centrul de ortologie (vezi *Figura 59*).

Deoarece $A_1B_1C_1$ este triunghi degenerat, avem:

$\sphericalangle A_1B_1C \equiv \sphericalangle C_1B_1A$. (1)

Pe de altă parte, din patrulaterele inscriptibile MB_1AC_1 și MB_1A_1C, reținem că:

$\sphericalangle A_1B_1C \equiv \sphericalangle A_1MC$, (2)

$\sphericalangle C_1B_1A \equiv \sphericalangle AMC_1$. (3)

Din relațiile (1), (2) și (3), obținem:

$\sphericalangle A_1MC \equiv \sphericalangle C_1MA$. (4)

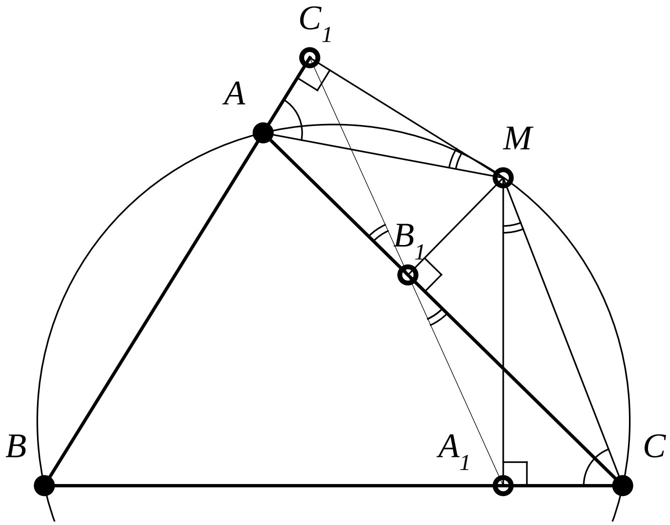


Figura 59

Unghiurile din relația (4) sunt complemente ale unghiurilor $\sphericalangle MCA_1$ și $\sphericalangle MAC_1$, în consecință:

$\sphericalangle MCA_1 \equiv \sphericalangle MAC_1$. (5)

Relația (5) arată că patrulaterul $MABC$ este inscriptibil, deci M aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

Propoziția 52

În triunghiul ABC, punctul M aparține cercului circumscris triunghiului. Notăm cu M' a doua intersecție a perpendicularei MA_1 dusă din M pe BC cu cercul $(A_1 \in BC)$. Atunci *dreapta lui Simson* a punctului M este paralelă cu AM'.

Demonstrație

Patrulaterul MB_1A_1C este inscriptibil (B_1 și C_1 sunt picioarele perpendicularelor duse din M pe AC respectiv AB, vezi *Figura 60*); rezultă că $\sphericalangle B_1A_1M \equiv \sphericalangle B_1CM$ (1).

Dar $\sphericalangle B_1A_1M \equiv \sphericalangle AM'M$ (2) (au aceeași măsură $\frac{1}{2}m\left(\widehat{AM'}\right)$.

Rezultă că $\sphericalangle AM'M \equiv \sphericalangle B_1A_1M$ și, prin urmare, $A_1B_1 \parallel AM'$.

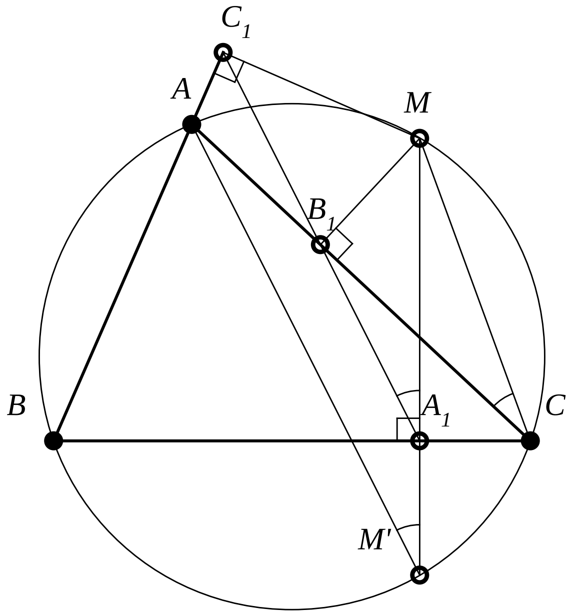


Figura 60

Observația 47

Analog se demonstrează că *dreapta lui Simson* a punctului M' este paralelă cu AM.

Propoziția 53

Dreptele Simson a două puncte diametral opuse în cercul circumscris triunghiului ABC sunt perpendiculare.

Demonstrație

Fie M și M' două puncte diametral opuse în cercul circumscris triunghiului ABC (vezi *Figura 61*). Notăm cu M_1 a doua intersecție cu cercul a perpendicularei MA_1 dusă pe BC și cu M_1' a doua intersecție a perpendicularei $M'A_1'$ dusă pe BC cu cercul.

Din *Propoziția 52*, rezultă că *dreapta lui Simson* a punctului M este paralelă cu dreapta AM_1, iar *dreapta Simson* a lui M' este paralelă cu dreaptaMA_1', deoarece dreptele AM_1 și AM_1' sunt perpendiculare, obținem că *dreptele Simson* amintite sunt perpendiculare.

Într-adevăr, patrulaterul $MM_1M'M_1'$ este un dreptunghi pentru că punctele M, M' fiind diametral opuse; rezultă că A_1 și A_1', proiecțiile lor ortogonale, sunt egal depărtate de centrul O al cercului circumscris și, prin urmare, coardele MM_1 și $M_1'M'$ sunt paralele și, fiind egal depărtate de O, sunt congruente. Punctele M_1, O, M_1' sunt coliniare și ca atare $M_1A \perp M_1'A$.

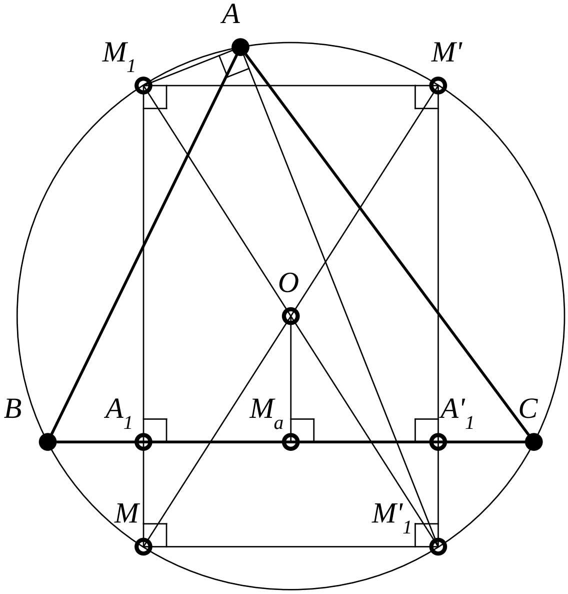


Figura 61

Observația 48

Dreptele Simson ale extremităților unui diametru sunt transversale izotomice. Într-adevăr, punctele A_1 și A'_1 și analoagele sunt puncte izotomice.

Teorema 17 (J. Steiner)

Dreapta lui Simson a unui punct M ce aparține cercului circumscris al triunghiului ABC conține mijlocul segmentului determinat de M și de ortocentrul H al triunghiului ABC.

Demonstrație

Construim simetricul cercului circumscris triunghiului ABC față de laturile BC. Notăm cu A_1 proiecția punctului M pe BC și cu M' intersecția lui MA_1 cu cercul circumscris triunghiului ABC, de asemenea, notăm cu M'' intersecția coardei (MM') cu cercul simetric cercului circumscris triunghiului ABC (vezi *Figura 62*).

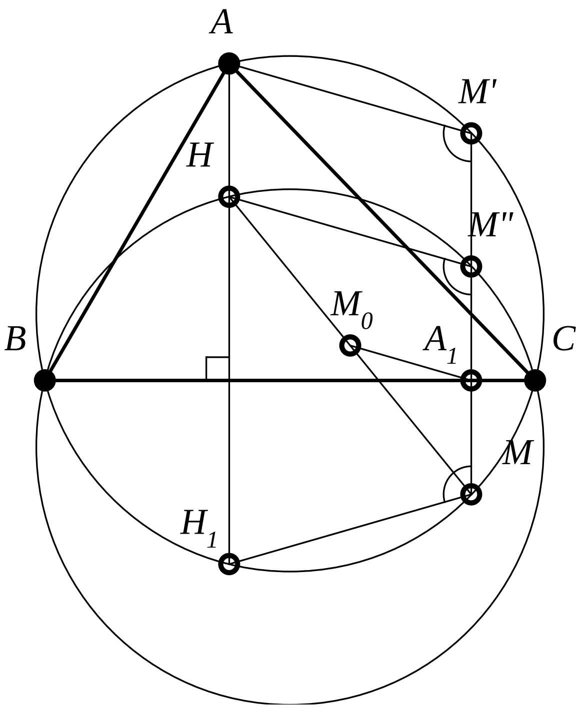


Figura 62

De asemenea, notăm cu H_1 a doua intersecție a înălțimii AH cu cercul circumscris triunghiului ABC. Din *Propoziția 52*, avem că *dreapta lui Simson* a punctului M este paralela dusă prin A_1 la AM'.

Pe de altă parte, avem că patrulaterele AH_1MM' și $H_1MM''H$ sunt trapeze isoscele; primul, deoarece $AH_1 \parallel MM'$, iar al doilea pentru că $HH_1 \parallel MM''$și H_1 este simetricul lui H față de BC (vezi *Propoziția 7*) și, de asemenea, M'' este simetricul lui M față de BC datorită construcției efectuate.

Din trapezele isoscele considerate, obținem că $MM'' \parallel AM'$, așa că *dreapta lui Simson* a punctului M este paralelă HM'', deoarece A_1 este mijlocul segmentului $[MM'']$, rezultă că *dreapta lui Simson* a punctului M este linie mijlocie în triunghiul $MM''H$ și ca atare trece prin mijlocul segmentului MH.

Propoziția 54

Mijlocul segmentului determinat de punctul M ce aparține cercului circumscris triunghiului ABC și de ortocentrul H al triunghiului aparține cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC.

Demonstrație

Fie O centrul cercului circumscris și fie O_9 centrul cercului celor nouă puncte (adică mijlocul segmentului (OH), vezi *Figura 63*). Dacă P este mijlocul segmentului $[HM]$, atunci în triunghiul HOM, PO_9 este linie mijlocie, deci $PO_9 = \frac{OM}{2}$; în consecință, $PO_9 = \frac{R}{2}$, ceea ce arată că punctul P aparține cercului celor nouă puncte.

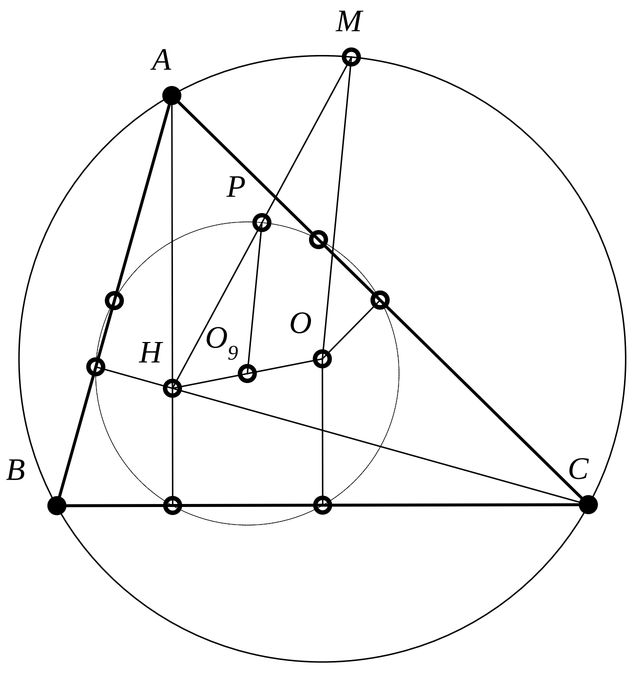


Figura 63

Remarca 11

Această propoziție arată că cercul celor nouă puncte este omoteticul cercului circumscris triunghiului ABC prin omotetia de centru H și raport $\frac{1}{2}$.

Teorema 18

Fie ABC un triunghi dat și $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ triunghiuri degenerate, cu $A_i \in BC$, $B_i \in CA$, $C_i \in AB$, $i \in \{1,2\}$, dar centrele de ortologie ale acestora din urmă în raport cu ABC sunt M_1, M_2. Notăm $\{Q\} = A_1B_1 \cap A_2B_2$, atunci Q este ortopolul dreptei M_1M_2 în raport cu triunghiul ABC.

Demonstrație

Notăm B' și C' proiecțiile punctelor B și C pe dreapta M_1M_2 (vezi *Figura 64*). Demonstrăm că patrulaterul $A_1B'C'A_2$ este inscriptibil.

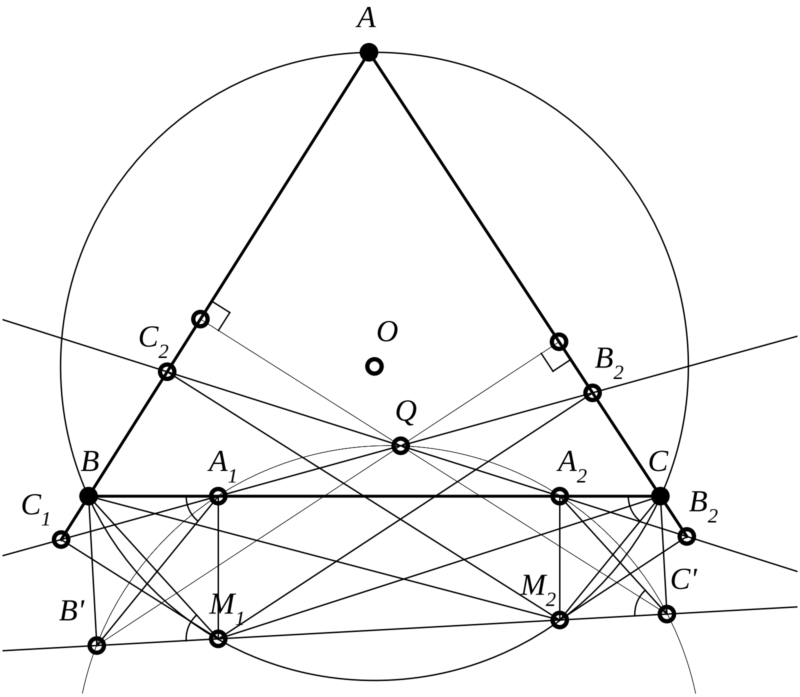


Figura 64

Într-adevăr, din patrulaterul inscriptibil M_2A_2CC', reținem:

$\sphericalangle M_2C'A_2 \equiv \sphericalangle M_2CA_2$. (1)

Din patrulaterul inscriptibil BM_1M_2C, avem:

$\sphericalangle M_2CB \equiv \sphericalangle BM_1B'$. (2)

Patrulaterul inscriptibil $B'BA_1M_1$ conduce la:

$\sphericalangle BM_1B' \equiv \sphericalangle B'A_1B$. (3)

Din relațiile (1), (2) și (3), obținem că: $\sphericalangle M_2C'A_2 \equiv \sphericalangle B'A_1B$, deci punctele B', A_1, A_2, C' sunt conciclice.

Notăm Q' ortopolul dreptei M_1M_2 în raport cu triunghiul ABC. Având $B'Q' \perp AC$ și $C'Q' \perp AB$, rezultă că $m\left(\widehat{B'Q'C'}\right) = 180^0 - A$. Demonstrăm că Q' este pe cercul punctelorB', A_1, A_2, C'. Este suficient să arătăm că $m\widehat{B'A_2}C' = 180^0 - A$. Avem: $m\widehat{B'A_2}C' = 180^0 - \left[m\widehat{B'A_2}B + m\widehat{C'A_2}C\right]$.

Din patrulaterul inscriptibil BA_2M_2B', reținem că $\widehat{B'A_2}B \equiv \widehat{B'M_2}B$. Pe de altă parte, M_1 și M_2 sunt pe cercul circumscris triunghiului ABC, avem: $\sphericalangle B'M_2B \equiv \sphericalangle BAM_1$, deci $\sphericalangle B'A_2B \equiv \sphericalangle BAM_1$. Analog, găsim că $\widehat{C'A_2}C \equiv \widehat{M_1AC}$. Obținem că $\sphericalangle B'A_2B + \sphericalangle C'A_2C = \sphericalangle A$ și, în consecință, $m(\sphericalangle B'A_2C') = 180^0 - A$.

Să arătăm că $Q' \equiv Q$. Este suficient să demonstrăm că $Q' \in A_1C_1$ și $Q' \in A_2B_2$. Pentru ca $Q' \in A_1C_1$, este necesar să demonstrăm că $\sphericalangle Q'A_1A_2 \equiv \sphericalangle C_1A_1B$. Dar $\sphericalangle Q'A_1A_2 \equiv \sphericalangle C_2C'Q'$. De asemenea, $BM_1 \parallel A_2C'$ (deoarece $\sphericalangle BM_1B' \equiv \sphericalangle BCM_2 \equiv \sphericalangle A_2C'M_2$), $M_1C_1 \parallel C'Q'$ (fiind perpendiculare pe AB). Rezultă astfel că $\sphericalangle A_2C'Q' \equiv \sphericalangle C_2M_1B$.

Deoarece patrulaterul $BC_1M_1A_1$ este inscriptibil, $\sphericalangle C_1MB \equiv \sphericalangle C_1A_1B$. Astfel, avem că $\sphericalangle Q'A_1A_2 \equiv \sphericalangle BA_1C_1$, ca atare Q' este pe *dreapta Simson* a punctului M_1. Analog, se arată că $Q' \in A_2B_2$, deci $Q' \equiv Q$.

Remarca 12

1. Teorema arată că ortopolul dreptei M_1M_2 care intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în M_1 și M_2 este intersecția *dreptelor Simson* ale punctelor M_1 și M_2 în raport cu ABC.

2. Din teoremă, rezultă că, dacă o dreaptă d se "rotește" în jurul unui punct M de pe cercul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci ortopolul dreptei d aparține *dreptei Simson* a punctului M în raport cu triunghiul ABC.

3. De asemenea, din această teoremă, obținem că:

Ortopolul unui diametru al cercului circumscris unui triunghi în raport cu acest triunghi aparține cercului celor nouă puncte ale triunghiului.

Propoziția 55

Cercurile ortopolare ale unui triunghi relative la o tangentă dusă la cercul circumscris triunghiului sunt tangente laturilor triunghiului. Punctele de tangență sunt coliniare, iar dreapta lor conține ortopolul tangentei.

Demonstrație

Fie M punctul de tangentă cu cercul al tangentei d (vezi *Figura 65*). Notăm cu A', B', C' proiecțiile vârfurilor triunghiului pe dreapta$d$ și cu A_1, B_1, C_1 proiecțiile lui M pe laturile triunghiului ABC. De asemenea, notăm cu Q ortopolul tangentei d și cu Q_a centrul cercului ortopolar circumscris triunghiului $B'QC'$.

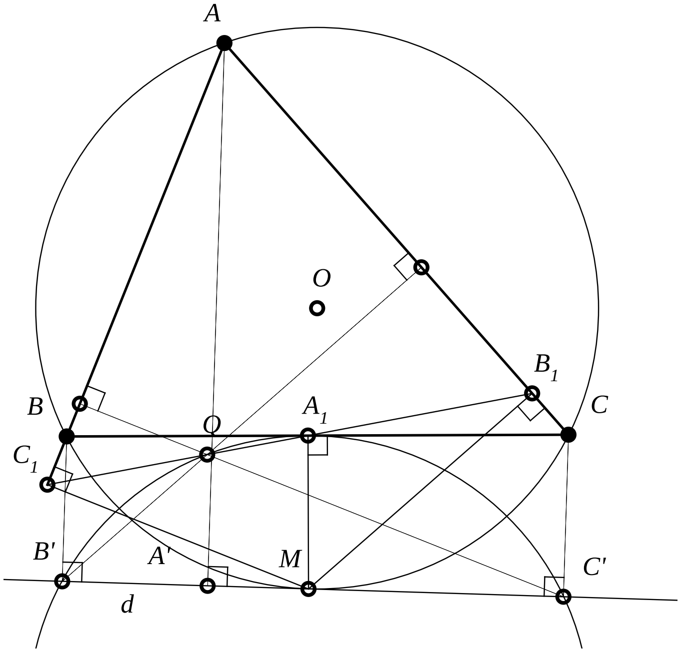


Figura 65

Demonstrăm că A_1 aparține acestui cerc.

Avem $m(\widehat{B'QC'}) = 180^0 - A$. (1)

Demonstrăm că și $m(\widehat{B'A_1C'}) = 180^0 - A$. (2)

Patrulaterul $A_1MB'B$ și $A_1MC'C$ sunt inscriptibile, reținem de aici că:

$\sphericalangle B'A_1B \equiv \sphericalangle B'MB$, (3)

$\sphericalangle C'A_1C \equiv \sphericalangle C'MC$. (4)

Deoarece d este tangentă cercului circumscris triunghiului ABC, avem:

$\sphericalangle B'MB \equiv \sphericalangle BAM$, (5)

$\sphericalangle C'MB \equiv \sphericalangle CAM$. (6)

Dar: $\sphericalangle BAM + \sphericalangle CAM = \sphericalangle A$. (7)

Și: $m(\sphericalangle B'A_1C') = 180^0 - m(\sphericalangle B'A_1B) + m(\sphericalangle C'A_1C)$, așa că obținem relația (2), care, împreună cu (1), demonstrează conciclicitatea punctelor B', Q, A_1, C'.

Demonstrăm că cercul ortopolar (Q_a) este tangent în A_1 dreptei BC.

Din patrulaterul inscriptibil $A_1MC'C$, avem relația (4), care, împreună cu $\sphericalangle CMC' \equiv \sphericalangle$MBC (consecință a faptului că $B'C'$ este tangentă la cercul circumscris) și cu $\sphericalangle MBA_1 \equiv \sphericalangle A_1B'$M (patrulaterul $A_1MB'B$ este inscriptibil) conduc la $\sphericalangle A_1B'M \equiv \sphericalangle C'A_1C$, ceea ce arată că BC este tangentă cercului ortopolar (Q_a). Analog, se arată că B_1 și C_1 sunt puncte de contact cu AC respectiv AB ale cercurilor ortopolare (Q_b) și (Q_c). Punctele A_1, B_1, C_1 aparțin*dreptei Simson* a punctului M. Demonstrăm că Q aparține acestei *drepte Simson*. Este suficient să arătăm că:

$\sphericalangle B_1A_1C \equiv \sphericalangle$Q$A_1B$. (8)

Din patrulaterul inscriptibil A_1MCB_1, reținem:

$\sphericalangle B_1A_1C \equiv \sphericalangle B_1MC$. (9)

Dreapta d este tangentă cercului circumscris, deci:

$\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle$M$B'A_1$. (10)

Din (8) și (9), rezultă că: $B'A_1 \parallel MC$. (11)

Cum $B'Q$ și MB_1 sunt paralele, găsim că:

$\sphericalangle QB'A_1 \equiv \sphericalangle B_1MC$. (12)

Dreapta BC este tangentă în A_1 cercului ortopolar (Q_c), în consecință:

$\sphericalangle QB'A_1 \equiv \sphericalangle$Q$A_1B$. (13)

Relațiile (9), (12) și (13) conduc la relația (8).

Remarca 13

Această propoziție poate fi considerată un caz particular al *Teoremei 18*. Într-adevăr, dacă considerăm tangenta în M la poziția "limită" a unei secante M_1M_2 cu M_1 tinzând să se confunde cu M_2, atunci și proiecțiileA_1, A_2 pe BC se vor confunda, iar cercul circumscris patrulaterului $B'A_1A_2C'$ devine tangent în A_1 la BC, de asemenea s-a văzut că Q aparține acestui cerc și, cum Q se găsește la intersecția *dreptelor Simson* ale punctelor M_1, M_2, el va fi pe *dreapta Simson* corespunzătoare punctului de tangentă M.

Propoziția 56

Un triunghi dat și triunghiul format de centrele cercurilor ortopolare corespunzătoare ortopolului unei secante la cerc sunt triunghiuri ortologice.

Demonstrație

Centrul cercului (Q_a) este centrul cercului circumscris patrulaterului $B'A_1A_2C'$ (vezi *Figura* 64). Perpendiculara din Q_a pe $B'C'$ trece prin mijlocul lui $(B'C')$. Această perpendiculară este paralelă cu BB' și cu CC' și prin urmare trece și prin mijlocul M_a al laturii (BC). Dacă notăm cu P mijlocul coardei M_1M_2 a cercului circumscris triunghiului ABC, avem$QP \perp M_1M_2$, așa că$QP \perp Q_aM_a$. Mediatoarea lui (A_1A_2) trece prin P și prin Q_a (este paralelă cu M_1A_1 și este linie mijlocie în trapezul $M_1A_1A_2M_2$), prin urmare Q_aP este paralelă cu OM_a. Patrulaterul Q_aPOM_a este paralelogram. Cum $OM_a \perp BC$, rezultă că perpendiculara dusă din Q_a pe BC trece prin P.

Analog, se arată că perpendicularele din Q_b și din Q_c pe AC, respectiv AB, trec prin mijlocului P al coardei $[M_1M_2]$, punct ce este centru de ortologie al triunghiului $Q_aQ_bQ_c$ în raport cu ABC.

Am arătat că Q_aM_a este paralelă și congruentă cu OP, analog rezultă că Q_bM_b și Q_cM_c sunt paralele și congruente cu OP și se obține că triunghiul $Q_aQ_bQ_c$ este congruent cu $M_aM_bM_c$ și au laturile paralele cu ale acestuia, practic triunghiul $Q_aQ_bQ_c$ este translatatul triunghiului median $M_aM_bM_c$ prin translația de vector $\overrightarrow{OP}$.

Triunghiurile ABC și $M_aM_bM_c$ sunt ortologice și centrul de ortologie este ortocentrul H al triunghiului ABC; rezultă că H este și centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $Q_aQ_bQ_c$.

Observația 48

Centrele de ortologie ale triunghiurilor $Q_aQ_bQ_c$ și ABC sunt ortocentrele acestor triunghiuri. Într-adevăr, perpendicularele duse din Q_a, Q_b, Q_c pe BC, CA respectiv AB sunt concurente în P, însă BC este paralelă cu M_bM_c, iar M_bM_c este paralelă la Q_bQ_c, prin urmare perpendiculara din Q_a pe BC este perpendiculară și pe Q_bQ_c, așa că P aparține înălțimii din Q_a a triunghiului $Q_aQ_bQ_c$, analog obținem că P aparține și înălțimii din Q_b a aceluiași triunghi, deci P este ortocentrul triunghiului $Q_aQ_bQ_c$

Propoziția 57

Fie ABC și $A'BC$ două triunghiuri înscrise în același cerc astfel încât punctele A și A' sunt diametral-opuse. Dreptele lui Simson ale unui punct N, ce aparține cercului în raport cu triunghiurile ABC și $A'BC$sunt ortogonale, iar punctul lor de intersecție este proiecția ortogonală pe BC a punctului N.

Demonstrație

Dreapta lui Simson a punctului N, notată A_1C_1 în *Figura 66,* în raport cu triunghiul ABC, este paralelă cu AN_1 (*Propoziția 52*). Cu N_1 am notat intersecția perpendicularei dusă din N pe BC cu cercul.De asemenea, *dreapta lui Simson* a lui N în raport cu triunghiul $A'BC$, notată $A_1B_1{}'$ este paralelă cu $A'N_1$. Deoarece unghiul AN_1A' este drept, rezultă că și *dreptele Simson* sunt perpendiculare. Ele trec evident prin proiecția A_1 a lui N pe BC.

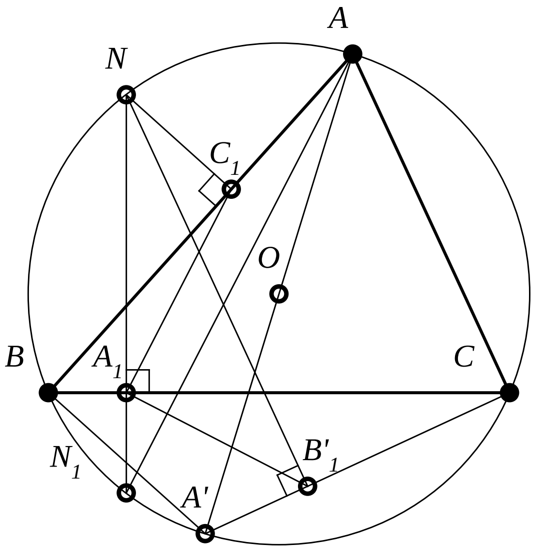


Figura 66

Propoziția 58

Într-un triunghi, ortopolul unui diametru al cercului circumscris este simetricul proiecției unui vârf al triunghiului pe acest diametru, în raport cu latura triunghiului median opusă acelui vârf.

Demonstrație

Fie A' proiecția vârfului Ape ABC pe diametrul d (vezi *Figura 67*). Punctul A' aparține evident cercului circumscris triunghiului AM_bM_c (am notat $M_aM_bM_c$ triunghiul median al lui ABC).

Acest cerc are ca diametru raza AO a cercului circumscris și este simetricul față de M_bM_c al cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC.

Știm că ortopolul Q al lui d aparține acestui din urmă cerc, pe de altă parte Q aparține perpendicularei dusă din A' din M_bM_c așa că Q este simetricul lui A' față de M_bM_c.

Observația 49

Propoziția aceasta poate fi formulată și astfel: Proiecțiile vârfurilor unui triunghi pe un diametru al cercului circumscris sunt vârfurile unui triunghi degenerat ortologic cu triunghiul median al triunghiului dat și având ca centru de ortologie ortopolul diametrului în raport cu triunghiul dat.

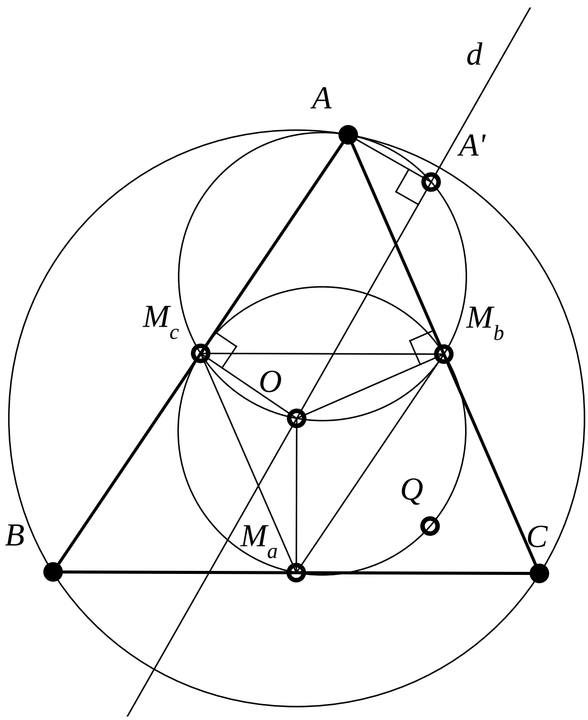


Figura 67

Propoziția 59

Fie ABC un triunghi înscris în cercul de centru O și d o dreaptă care trece prin O. Notăm cu A_1, B_1, C_1 simetricele vârfurilor triunghiului ABC față de d și cu A_2, B_2, C_2simetricele punctelor A_1, B_1, C_1 respectiv față de BC, CA și AB.

Atunci:

i. Triunghiul ABC și triunghiul $A_2B_2C_2$ sunt simetrice față de ortopolul Q al dreptei d în raport cu triunghiul ABC.

ii. Triunghiurile ABC și $A_2B_2C_2$ sunt ortologice. Centrele lor de ortologie sunt ortocentrele acestor triunghiuri H și H_2, iar dreapta HH_2 trece prin ortopolul Q al dreptei d.

Demonstrație

Fie A' proiecția lui A pe dreapta d ce trece prin O. Acest punct este pe cercul cu centru în O_1, mijlocul lui OA (vezi *Figura 68*).

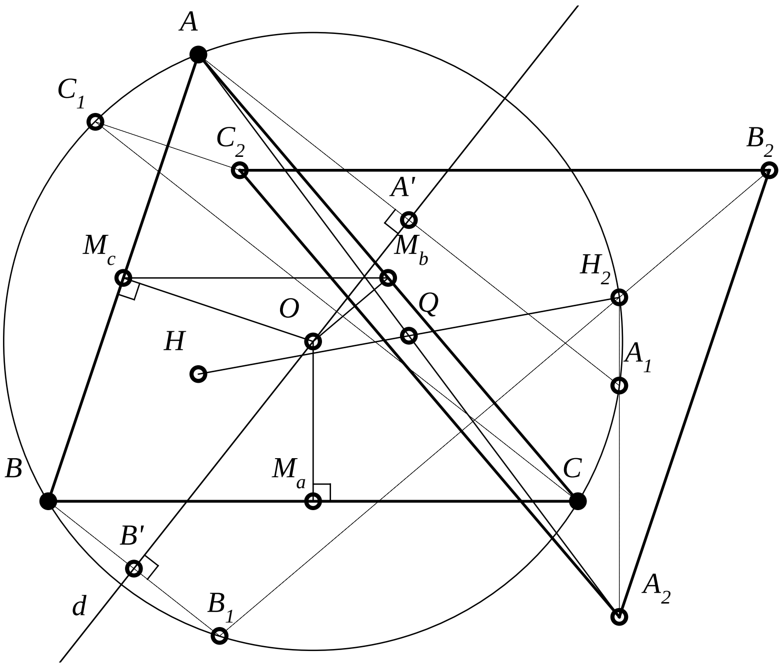


Figura 68

Acest cerc este omoteticul cercului circumscris triunghiului ABC prin omotetia de centru A și raport $\frac{1}{2}$. Simetricul lui A față de dreapta d este A_1, iar simetricul lui A' față de M_bM_c este,după cum am demonstrat în *Propoziția* anterioară, Q. Simetricul lui A_1 față de BC este A_2, iar $A'Q \parallel A_1A_2$, prin urmare A, Q, A_2 sunt coliniare și A_1, A_2 sunt simetrice față de Q.

Analog, demonstrăm că B_1, B_2 și C_1, C_2 sunt simetrice față de Q.

Triunghiurile ABC și $A_2B_2C_2$ au laturile omoloage paralele și congruente. Este clar că perpendicularele duse din A, B, C pe BC, CA respectiv AB (înălțimile triunghiului) vor fi perpendiculare și pe B_2C_2, C_2A_2 respectiv A_2B_2și concurente în H. Analog, H_2, ortocentrul triunghiului $A_2B_2C_2$ în raport cu ABC, mai mult, H și H_2 sunt simetrice în raport cu Q, ortopolul dreptei d în raport cu triunghiul ABC.

4

TRIUNGHIURI $\mathcal{S}$ SAU TRIUNGHIURI ORTOPOLARE

Triunghiurile $\mathcal{S}$ au fost introduse în geometrie de către ilustrul matematician român Traian Lalescu. În cele ce urmează, vom prezenta această noțiune, teoreme în legătură cu ea și vom stabili conexiuni cu triunghiurile ortologice.

4.1 Triunghiuri $\mathcal{S}$. Definiție, construcție, proprietăți

Definiția 33

Spunem că triunghiul $A_1B_1C_1$ este triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu triunghiul ABC dacă aceste triunghiuri sunt înscrise în același cerc și dacă dreapta lui Simson a unui vârf al triunghiului $A_1B_1C_1$ (în raport cu triunghiul ABC) este perpendiculară pe latura opusă acelui vârf al triunghiului $A_1B_1C_1$.

Construcția triunghiurilor $\mathcal{S}$

Arătăm cum putem construi fiind dat un triunghi ABC înscris într-un cerc (O) un alt triunghi $A_1B_1C_1$ care să fie triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu ABC.

Prezentăm două moduri de realizare a construcției (vezi *Figura 69*).

I. 1. Fixăm un punct A_1 pe cercul (O).
2. Construim dreapta lui Simson A'-B'-C'.
3. Construim coarda (B_1C_1) în cercul (O), perpendiculară pe dreapta Simson$A'B'$.

Triunghiul $A_1B_1C_1$este triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu triunghiul ABC.

II. 1. Fixăm punctele B_1 și C_1 pe cercul circumscris triunghiului ABC.
2. Construim coarda (AA''), perpendiculară pe B_1C_1.

3. Construim coarda $(A''A_1)$, perpendiculară pe BC.

Triunghiul $A_1B_1C_1$ este triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu triunghiulABC.

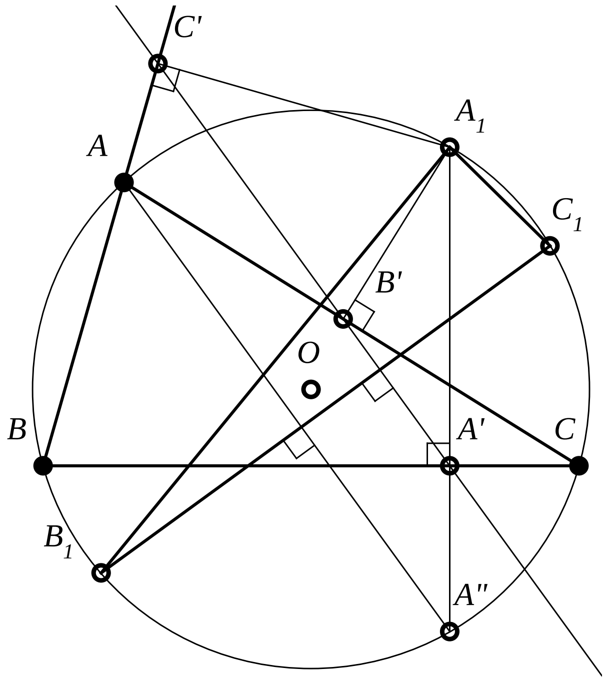


Figura 69

Figura 69 a fost efectuată pentru a ilustra ambele construcții de mai sus. Construcția II are la bază rezultatul *Propoziției 52*.

Observația 50

1. Din construcția I, rezultă că, fiind fixat punctul A pe cercul circumscris triunghiului ABC, putem construi o infinitate de triunghiuri $A_1B_1C_1$ care să fie triunghiuri $\mathcal{S}$ în raport cu ABC. Aceste triunghiuri au latura B_1C_1 de direcție fixă (aceea a perpendicularei pe dreapta lui Simson a punctului A_1).

Putem formula:

Propoziția 60

Dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ este triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu triunghiul ABC, atunci orice triunghi $A'_1B'_1C'_1$, unde $B'_1C'_1$ este o coardă paralelă cu BCîn cercul circumscris triunghiului ABC,este triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu ABC.

2. Ambele construcții furnizează o infinitate de triunghiuri $\mathcal{S}$ în raport cu *ABC*.

Teorema 19 (Traian Lalescu, 1915)

Dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ este triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu triunghiul ABC, atunci:

1. Suma algebrică a măsurilor arcelor $\overset{\smile}{AA_1}$, $\overset{\smile}{BB_1}$, $\overset{\smile}{CC_1}$ considerate pe cercul circumscris triunghiului ABC pe care s-a fixat un sens pozitiv de parcurgere este egală cu zero.

2. *Dreptele Simson* ale vârfurilor triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC sunt perpendiculare respectiv pe laturile opuse ale triunghiului $A_1B_1C_1$.

3. *Dreptele Simson* ale vârfurilor triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC sunt concurente.

4. Triunghiul ABC este triunghi$\mathcal{S}$ în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

5. Cele șase *drepte Simson* ale vârfurilor triunghilor $A_1B_1C_1$ și ABC sunt concurente în mijlocul segmentului determinat de ortocentrele acestor triunghiuri.

Demonstrație

1) Ne referim la *Figura 70*. Presupunem că pe cercul circumscris al triunghiului ABC a fost fixat sensul trigonometric de parcurgere a arcelor. Știm că dreapta lui Simson a punctului A_1 este perpendiculară pe B_1C_1. Notăm $\{X\} = BC \cap B_1C_1$, avem: $\widehat{CXC_1} \equiv \widehat{AA''A_1}$ (ca unghiuri cu laturile perpendiculare), unde A'' este intersecția cu cercul a perpendicularei A_1A' pe BC.

Avem:

$m(\widehat{CXC_1}) = \frac{1}{2}[m(\overset{\smile}{BB_1}) + m(\overset{\smile}{C_1C})]$,

$m(\widehat{AA''A_1}) = \frac{1}{2}m(\overset{\smile}{A_1A})$.

Din $m(\overset{\smile}{A_1A}) = m(\overset{\smile}{BB_1}) + m(\overset{\smile}{CC_1})$, rezultă:

$m(\overset{\smile}{A_1A}) + m(\overset{\smile}{B_1B}) + m(\overset{\smile}{CC_1}) = 0$.

2) Demonstrăm că *dreapta Simson* a vârfului B_1 în raport cu triunghiul ABC este perpendiculară pe A_1C_1.

Ducem perpendiculara din B pe A_1C_1 și notăm cu B'' intersecția acesteia cu cercul. Unim B'' cu B_1 și notăm $\{Y\} = AC \cap A_1C_1$. Avem:

$m(\widehat{AYA_1}) = \frac{1}{2}\left[m(\overset{\smile}{A_1A}) - m(\overset{\smile}{CC_1})\right]$,
$m(\widehat{BB''B_1}) = \frac{1}{2}m(\overset{\smile}{B_1B})$.
Deoarece $m(\overset{\smile}{A_1A}) + m(\overset{\smile}{B_1B}) + m(\overset{\smile}{C_1C}) = 0$, rezultă că
$\sphericalangle AYA_1 \equiv \sphericalangle BB''B_1$.

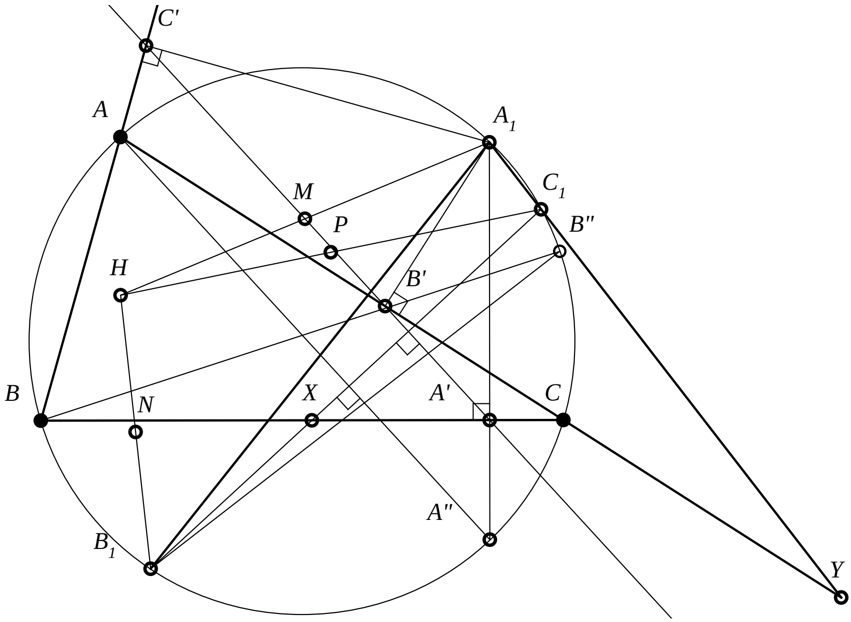


Figura 70

Aceste unghiuri, având $BB'' \perp A_1Y$ și fiind ascuțite, înseamnă că au și $B_1B'' \perp AC$, deci dreapta lui Simson a vârfului B_1 este paralelă cu BB'' și ca atare este perpendiculară pe A_1C_1. Analog, se demonstrează că dreapta lui Simson a vârfului C_1 este perpendiculară pe A_1B_1.

Remarca 14

Practic condiția $m(\overset{\smile}{AA_1}) + m(\overset{\smile}{BB_1}) + m(\overset{\smile}{CC_1}) = 0(\text{mod } 360^0)$ este necesară și suficientă ca triunghiul $A_1B_1C_1$ să fie triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu triunghiul ABC.

3. Notăm cu$M$, N, P respectiv mijloacele segmentelor HA_1, HB_1, HC_1, unde H este ortocentrul lui ABC. Din teorema lui Steiner rezultă că dreptele Simson ale vârfurilor A_1, B_1, C_1trec respectiv prin M, N respectiv P și, pe de altă parte, aceste drepte simson sunt perpendiculare pe B_1C_1, C_1A_1 respectiv A_1B_1, drepte respectiv

paralele cu NP, PM și MN. Obținem astfel că dreptele Simson ale vârfurilor A_1, B_1, C_1 sunt înălțimile triunghiului MNP, deci sunt concurente.

4. Rezultă din $m\left(\widetilde{A_1A}\right) + m\left(\widetilde{B_1B}\right) + m\left(\widetilde{C_1C}\right) = 0$(mod 360^0).

5. Triunghiul MNP este omoteticul triunghiului $A_1B_1C_1$ prin omotetie de centru H și de raport $\frac{1}{2}$. Rezultă că ortocentrul său va fi mijlocul segmentului determinat de centrul omotetiei H și de punctul omolog H_1, ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$. Am văzut că prin acest punct trec dreptele Simson ale vârfurilor triunghiului $A_1B_1C_1$. Relația între triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC fiind simetrică, vom avea că și dreptele Simson ale vârfurilor triunghiului ABC în raport cu $A_1B_1C_1$ sunt concurente în același punct, mijlocul segmentului $[HH_1]$.

Notăm:

1. $\Delta A_1B_1C_1\mathcal{S}\Delta ABC$ și citim: triunghiul $A_1B_1C_1$ este în relația "$\mathcal{S}$" cu triunghiul ABC.
2. $\mathcal{T}_{\boxed{\Delta}}$ - mulțimea triunghiurilor înscrise într-un cerc dat.

4.2 Relația de echivalență $\mathcal{S}$ în mulțimea triunghiurilor înscrise în același cerc

Definiția 34

Vom spune că triunghiul $A_1B_1C_1$ este în relația $\mathcal{S}$ cu triunghiul ABC dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ este triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu triunghiul ABC.

Propoziția 61

Relația $\mathcal{S}$ în mulțimea $\mathcal{T}_{\boxed{\Delta}}$ este o relație de echivalență.

Demonstrație

Trebuie să demonstrăm că relația $\mathcal{S}$ are proprietățile: *reflexivitate, simetrie* și *tranzitivitate.*

Reflexivitatea

Oricare ar fi triunghiul ABC din mulțimea $\mathcal{T}_{\boxed{\Delta}}$, avem: $\Delta A_1B_1C_1\mathcal{S}\Delta ABC$. Într-adevăr, dreapta lui Simson a vârfului A în raport cu ABC este chiar înălțimea din A a triunghiului ABC, aceasta fiind perpendiculară pe BC; obținem că ABC este triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu el însuși.

Altă demonstrație: $m(\overset{\frown}{AA}) + m(\overset{\frown}{BB}) + m(\overset{\frown}{CC}) = 0$ (mod 360^0).

Deci: $\Delta ABC\mathcal{S}\Delta ABC$.

Simetria

Dacă $\Delta A_1B_1C_1\mathcal{S}\Delta ABC$, s-a demonstrat în Teorema T. Lalescu că și $\Delta ABC\mathcal{S}\Delta A_1B_1C_1$, deci relația "$\mathcal{S}$" este simetrică.

Tranzitivitatea

Considerăm în mulțimea $\mathcal{T}_{\boxed{\Delta}}$ triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, astfel încât: $\Delta ABC\mathcal{S}\Delta A_1B_1C_1$ și $A_1B_1C_1\mathcal{S}\Delta A_2B_2C_2$.

Să demonstrăm că: $\Delta ABC\mathcal{S}\Delta A_2B_2C_2$.

Din $\Delta ABC\mathcal{S}\Delta A_1B_1C_1$, avem că:

$m(\overset{\frown}{AA_1}) + m(\overset{\frown}{BB_1}) + m(\overset{\frown}{CC_1}) = 0$ (mod 360^0).

Din $A_1B_1C_1\mathcal{S}\Delta A_2B_2C_2$, avem că:

$m(\overset{\frown}{A_1A_2}) + m(\overset{\frown}{B_1B_2}) + m(\overset{\frown}{C_1C_2}) = 0$ (mod 360^0).

Adunând membru cu membru cu relațiile precedente, obținem că:

$m(\overset{\frown}{AA_2}) + m(\overset{\frown}{BB_2}) + m(\overset{\frown}{CC_2}) = 0$ (mod 360^0),

prin urmare: $\Delta ABC\mathcal{S}\Delta A_2B_2C_2$.

Dacă ABC este un triunghi fixat din $\mathcal{T}_{\boxed{\Delta}}$, definim mulțimea:

$\mathcal{S}^{\Delta ABC} = \{\Delta A'B'C' \in \mathcal{T}_{\boxed{\Delta}} \,/\, \Delta ABC\mathcal{S}\Delta A'B'C'\}$.

Mulțimea $\mathcal{S}^{\Delta ABC}$ este o clasă de echivalență modulo "$\mathcal{S}$" a mulțimii $\mathcal{T}_{\boxed{\Delta}}$.

Propoziția 62

Dreapta lui Simson a unui punct ce aparține cercului circumscris triunghiurilor dintr-o aceeași clasă de echivalență are direcția fixă în raport cu aceste triunghiuri.

Demonstrație

Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC și d o dreaptă ce determină împreună cu M un triunghi $\mathcal{S}$ în raport cu ABC. Deoarece *dreapta lui Simson* a lui M în raport cu ABC sau cu orice alt triunghi din $\mathcal{S}\Delta ABC$ este perpendiculară pe d, ea va avea o direcție fixă.

Remarca 15

Denumirea triunghiurilor $\mathcal{S}$ ale triunghiurilor ortopolare este justificată de faptul că două triunghiuri $\mathcal{S}$ în raport cu o dreaptă au același ortopol.

Într-adevăr, fie ABC un triunghi și d o dreaptă. Proiecțiile vârfurilor triunghiului ABC pe d sunt A_1, B_1, C_1 ; iar perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA respectiv AB sunt concurente cu O, ortopolul dreptei d în raport cu ABC. Acest punct O este intersecția *dreptelor Simson* ale punctelor de intersecție cu cercul (ale dreptei d) circumscris triunghiului ABC. Practic, aceste perpendiculare sunt *drepte Simson* ale triunghiului $\mathcal{S}$ în raport cu triunghiul $\mathcal{S}$ ce are una dintre laturi dreapta *d*.

Propoziția 63

În două triunghiuri $\mathcal{S}$, ortopolii laturilor unuia în raport cu celălalt coincid cu mjlocul segmentului determinat de ortocentrele lor.

Demonstrație

Orotopolul O al unei drepte d în raport cu un triunghi oarecare este punctul de intersecție al *dreptelor Simson*, ale punctelor de intersecție a dreptei d cu cercul. Din *Teorema lui T. Lalescu*, cele șase drepte Simson ale vârfurilor unui triunghi în raport cu celălalt triunghi sunt drepte concurente în mijlocul segmentului determinat de ortocentrele lor.

4.3 Triunghiuri simultan ortologice și ortopolare

Lema 5

Dacă triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ înscrise în același cerc cu $AA_1 \parallel BC$, $BB_1 \parallel CA$, $CC_1 \parallel AB$, atunci: B_1C_1 și BC sunt antiparalele în raport cu AB și AC, B_1A_1 și BA sunt antiparalele în raport cu CB și CA; A_1C_1 și AC sunt antiparalele în raport cu BC și BA.

Demonstrație

B_1C_1 și BC formează patrulaterul înscris BB_1CC_1, deci ele sunt antiparalele în raport cu BB_1 și CC_1, cum $BB_1 \parallel CA$ și $CC_1 \parallel AB$, avem că B_1C_1 și BC sunt antiparalele în raport cu AB și AC. Analog, se demonstrează celelalte cerințe.

Teorema 19

Dacă triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ înscrise în același cerc au $AA_1 \parallel BC$, $BB_1 \parallel CA$, $CC_1 \parallel AB$, atunci triunghiurile sunt simultan ortologice și ortopolare.

Demonstrație

Demonstrăm mai întâi că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice. Într-adevăr, perpendiculara din A pe B_1C_1 care este antiparalelă cu B va trece prin O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC (*Propoziția 4*). Analog, perpendicularele din B și C pe C_1A_1 respectiv A_1B_1 trec prin O, deci O este centru de ortologie. Demonstrăm că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri S. Vom arăta că:

$m(\overset{\frown}{AA_1}) + m(\overset{\frown}{BB_1}) + m(\overset{\frown}{CC_1}) = 0$ (mod360^0). (1)

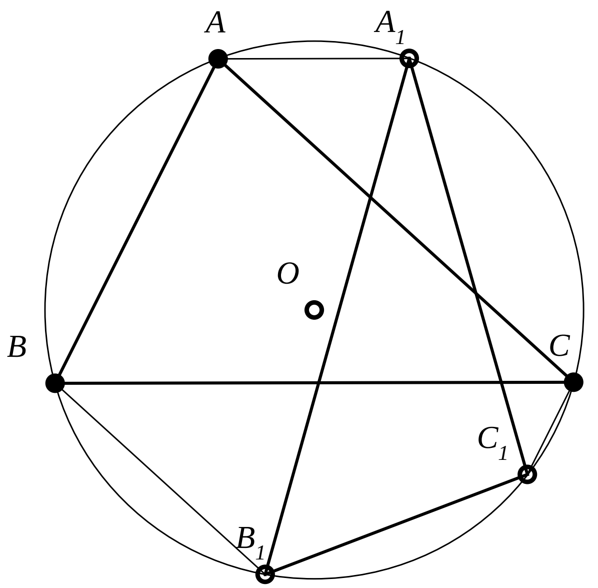


Figura 71

Folosim *Figura 71*; avem că patrulaterul AA_1CB este trapez isoscel, deci:

$m(\overset{\frown}{AA_1}) = 360^0 - 4m(\hat{C}) - 2m(\hat{A})$. (2)

Patrulaterul BB_1CA este de asemenea trapez isoscel; avem:

$m(\overset{\frown}{BB_1}) = 360^0 - 4m(\hat{C}) - 2m(\hat{B})$. (3)

Patrulaterul CC_1AB este trapez isoscel; rezultă că:

$m(\overset{\frown}{CC_1}) = 360^0 - 4m(\hat{A}) - 2m(\hat{C})$. (4)

Ținând seama că în relația (1) arcele trebuie parcurse în același sens, vom avea că:

$m(\overset{\frown}{AA_1}) = 4m(\hat{C}) + 2m(\hat{A})$.

Atunci:

$$m(\overset{\frown}{AA_1}) + m(\overset{\frown}{BB_1}) + m(\overset{\frown}{CC_1}) = 4m(\hat{C}) + 2m(\hat{A}) + 360^0 - 4m(\hat{C}) - 2m(\hat{B}) + 360^0 - 4m(\hat{A}) - 2m(\hat{C}).$$

Rezultă:

$$m(\overset{\frown}{AA_1}) + m(\overset{\frown}{BB_1}) + m(\overset{\frown}{CC_1}) = 720^0 - 2[m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})].$$

Deci:

$$m(\overset{\frown}{AA_1}) + m(\overset{\frown}{BB_1}) + m(\overset{\frown}{CC_1}) = 360^0,$$

și, în consecință, relația (1) este adevărată, deci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri $\mathcal{S}$.

Propoziția 64

Triunghiul median și triunghiul ortic al unui triunghi nedreptunghic dat sunt simultan triunghiuri ortopolare și triunghiuri ortologice.

Demonstrația acestei proprietăți rezultă ca o consecință a *Teoremei 5*. Faptul că triunghiul median și cel ortic sunt ortologice a fost stabilit și prin *Propoziția 9*.

Propoziția 65

Un triunghi ABC dat și triunghiul $A_0B_0C_0$ determinat de intesecțiile bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A, B, C cu cercul circumscris triunghiului ABC sunt triunghiuri simultan ortopolare și ortologice.

Demonstrația acestei proprietăți rezultă din faptul că triunghiul ABC și triunghiul $A_0B_0C_0$ sunt respectiv triunghi ortic și triunghi median în triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ al triunghiului ABC.

5

TRIUNGHIURI ORTOLOGICE CU ACELAȘI CENTRU DE ORTOLOGIE

În acest capitol, vom demonstra câteva teoreme importante relative la triunghiurile ortologice cu centru comun de ortologie și vom aborda câteva chestiuni legate de triunghiurile biortologice.

5.1 Teoreme privind triunghiurile ortologice cu același centru de ortologie

Teorema 20

Două triunghiuri ortologice cu centrul de ortologie comun sunt triunghiuri omologice.

În demonstrația acestei teoreme, vom folosi:

Teorema 21 (N. Dergiades, 2003)

Fie $\mathcal{C}_1(O_1, R_1)$, $\mathcal{C}_2(O_2, R_2)$, $\mathcal{C}_3(O_3, R_3)$ trei cercuri care trec respectiv prin vârfurile B și C, C și A, A și B ale unui triunghi ABC. Notăm cu D, E, F al doilea punct de intersecție respectiv dintre $(\mathcal{C}_2)$ și $(\mathcal{C}_3)$, $(\mathcal{C}_3)$ și $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_1)$ și $(\mathcal{C}_1)$. Perpendicularele duse la punctele D, E, F pe AD, BE respectiv CF intersectează laturile BC, CA, AB în punctele X, Y, Z. Punctele X, Y și Z sunt coliniare.

Demonstrație (Ion Pătrașcu)

Fie $A_1B_2C_3$ triunghiul median al triunghiului ABC (vezi *Figura 72*). Vom folosi în demonstrație reciproca *Teoremei lui Menelaus*.

Avem:

$$\frac{XB}{XC} = \frac{Aria(XDB)}{Aria(XDC)} = \frac{DB \cdot \sin(XDB)}{DC \cdot \sin(XDC)} = \frac{DB \cdot \cos(ADB)}{DC \cdot \cos(ADC)}.$$

Analog, găsim:
$\frac{YC}{YA} = \frac{EC}{EA} \cdot \frac{\cos(BEC)}{\cos(BEA)}, \frac{ZA}{ZB} = \frac{FA}{FB} \cdot \frac{\cos(CFA)}{\cos(CFB)}.$
Din patrulaterele înscrise $ADEB$, $BEFC$ și $CFDA$, reținem că:
$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BEA, \sphericalangle BEC = \sphericalangle CFB, \sphericalangle CFA = \sphericalangle ADC.$

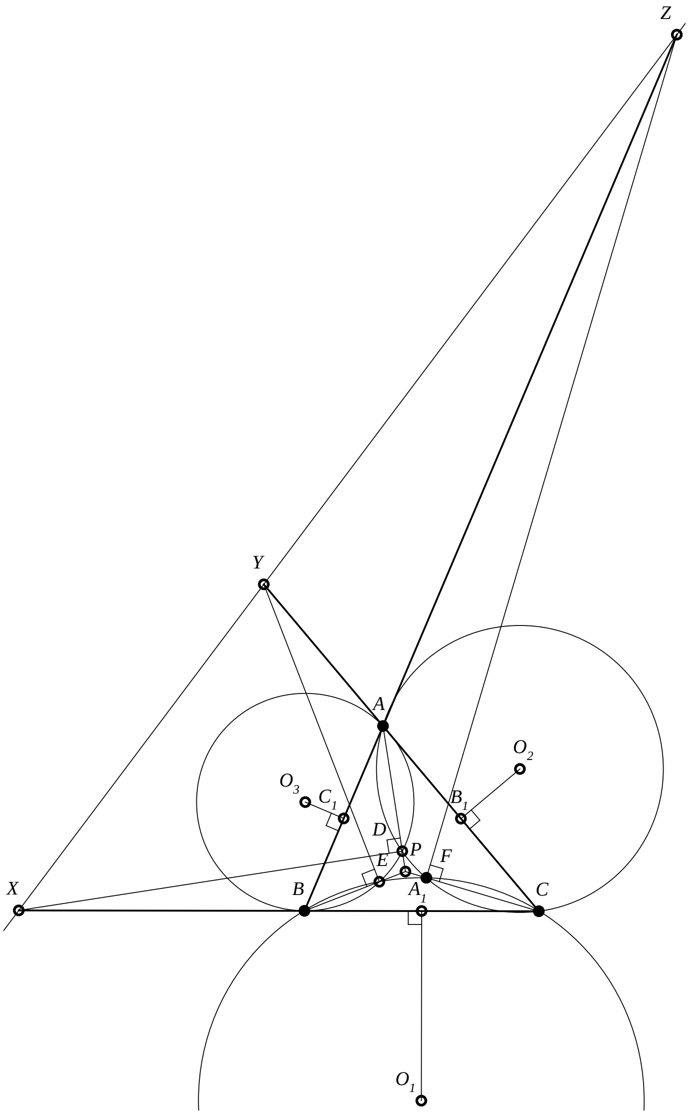


Figura 72

În consecință:

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}. \quad (1)$$

Pe de altă parte,

$DB = 2R_3 \sin(BAD)$,

$EA = 2R_3 \sin(ABE)$,

$DC = 2R_2 \sin(CAD)$,

$FA = 2R_2 \sin(ACF)$,

$FB = 2R_1 \sin(BCF)$,

$EC = 2R_1 \sin(CBE)$.

Revenind în relația (1), obținem:

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{\sin(BAD)}{\sin(CAD)}\cdot\frac{\sin(CBE)}{\sin(ABE)}\cdot\frac{\sin(ACF)}{\sin(BCF)}. \quad (2)$$

Conform unei *Teoreme a lui Carnot*, coardele comune ale cercurilor $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ sunt concurente, adică $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$ (P este centrul radical al acestor cercuri).

Cevienele AD, BE, CF fiind concurente, putem scrie forma trigonometrică a *Teoremei lui Ceva*, de unde găsim:

$$\frac{\sin(BAD)}{\sin(CAD)}\cdot\frac{\sin(CBE)}{\sin(ABE)}\cdot\frac{\sin(ACF)}{\sin(BCF)}=1.$$

Cu această relație, din (2) obținem că:

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1,$$

Ceea ce arată coliniaritatea punctelor X, Y, Z.

Pentru demonstrarea *Teoremei 2*0, avem nevoie de:

Lema 6

Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri ortologice având acelaşi centru de ortologie *O*. Dacă E şi F sunt proiecţiile ortogonale ale vârfurilor Bşi C pe dreptele suport ale laturilor $[A'C']$ şi respectiv $[A'B']$, atunci punctele B, C, E și F sunt patru puncte conciclice.

Demonstrația 1

Fie O centrul de ortologie comun al triunghiurilor date; notăm cu E, F proiecțiile lui B și C pe $A'C'$ respectiv pe $A'B'$, de asemenea notăm: $\{B''\} = EO \cap A'B'$, $\{C''\} = FO \cap A'C'$ (vezi *Figura 73*).

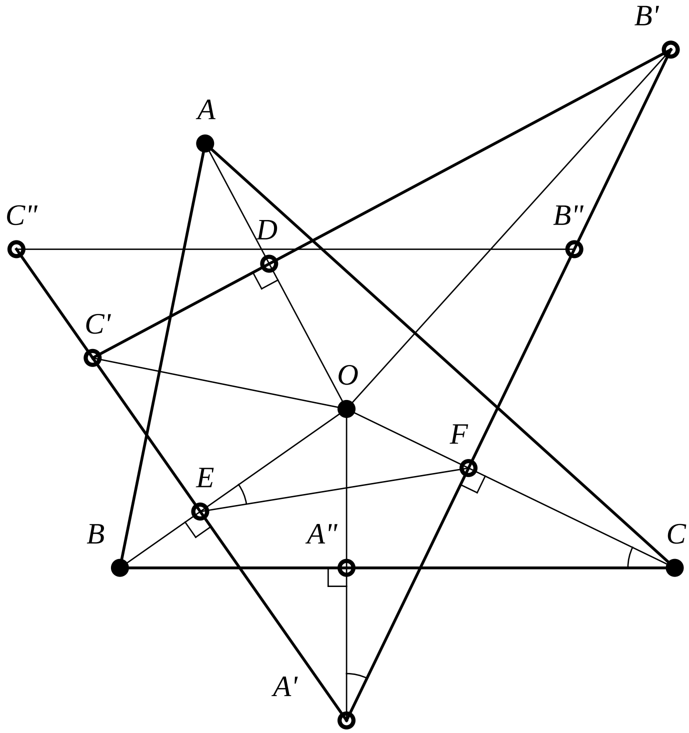


Figura 73

În triunghiul $A'B''C''$, O este ortocentrul, rezultă deci că$A'O \perp B''C''$. Deoarece EF este antiparalelă cu $B''C''$, din *Propoziția 4* rezultă că EF este antiparalelă cu BC, ceea ce arată că patrulaterul $BCFE$ este inscriptibil.

Observația 51

Analog, dacă D este proiecția lui A pe $B'C'$, rezultă că punctele A, D, F, C și A, D, E, B sunt conciclice.

Demonstrația 2 (Ion Pătrașcu)

Notăm $\{A''\} = A'O \cap BC$. Patrulaterele $BEA''A'$, $A'A''FC$ sunt inscriptibile. Puterea punctului O față de cercurile circumscrise acestor patrulatere furnizează relațiile: $OA'' \cdot OA' = OF \cdot OC$ și $OA'' \cdot OA' = OE \cdot OB$.

Obținem din acestea că: $OE \cdot OB = OF \cdot OC$, prin urmare punctele B, C, F, E sunt conciclice.

Demonstrația 3 (Mihai Miculița)

Notând $\{A''\} = A'O \cap BC = pr_{BC}(A')$ (vezi *Figura 73*), avem:

$$\left.\begin{array}{r} BO \perp A'C'' \\ A'O \perp BC \\ CO \perp A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} OEAF - \text{inscriptibil} \Rightarrow \sphericalangle \mathrm{OEF} \equiv \sphericalangle \mathrm{O}A'\mathrm{F} \\ A''A'CO - \text{inscriptibil} \Rightarrow \sphericalangle \mathrm{O}A'\mathrm{F} \equiv \sphericalangle \mathrm{BCO} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \sphericalangle \mathrm{OEF} \equiv \sphericalangle BCO \Rightarrow BCFE -$ inscriptibil.

Demonstrația *Teoremei 20*

Vom folosi configurația din *Figura 73*. Patrulaterele $BCFE$, $CFDA$, $ADEB$ fiind inscriptibile, observăm că cercurile lor circumscrise satisfac ipotezele din *Teorema 21*. Aplicând această teoremă, rezultă că dreptele $B'C'$ și BC, $C'A'$ și CA, $A'B'$ și ABse intersectează respectiv în punctele X, Y, Z, care sunt coliniare. Folosind *Teorema lui Desargues* (vezi [24]), rezultă că AA', BB' și CC' sunt concurente și, prin urmare, triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt omologice.

Remarca 16

a) Triunghiurile $O_1O_2O_3$ (format de centrele cercurilor circumscrise patrulaterelor $BCFE$, $CFDA$ respectiv $ADFB$) și ABC sunt ortologice. Centrele de ortologie sunt punctele P – centrul radical al cercurilor de centre O_1, O_2, O_3; și O– centrul cercului circumscris lui ABC.

b) Triunghiurile $O_1O_2O_3$ și DEF format de proiecțiile vârfurilor triunghiului ABC pe laturile lui $A'B'C'$ sunt ortologice. Centrele de ortologie sunt: centrul cercului circumscris triunghiului DEF și P – centrul cercului radical al cercurilor de centre O_1, O_2, O_3. Într-adevăr, perpendicularele duse din O_1, O_2, O_3 pe EF, FD respectiv DE sunt mediatoare ale acestor segmente, deci sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului DEF, iar perpendicularele duse din D, E, F pe laturile triunghiului $O_1O_2O_3$, fiind coardele comune AD, BE, CF, vor fi concurente în punctul P.

Teorema 22

Dacă O este un punct în interiorul triunghiului ABC dat, $A_1B_1C_1$ este triunghiul său podar și punctele A', B', C' sunt astfel încât:

i. $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA'}$ sunt vectori coliniari; $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB'}$ sunt vectori coliniari; $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC'}$ sunt vectori coliniari;

ii. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OC'}$, atunci triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice cu centru comun de ortologie O.

Demonstrație

Construim cercul de diametru AC' și notăm cu D al doilea punct de intersecție al său cu AO. Obținem (vezi *Figura 74*) că$C'D \perp AO$ (1)și$OC_1 \cdot OC' = OD \cdot OA$ (2). Deoarece $OC_1 \cdot OC' = OB_1 \cdot OB'$ (3), din relațiile *i)* și *ii)*, obținem că $OD \cdot OA = OB_1 \cdot OB'$. Această relație arată că punctele B_1, B', A, D sunt conciclice.

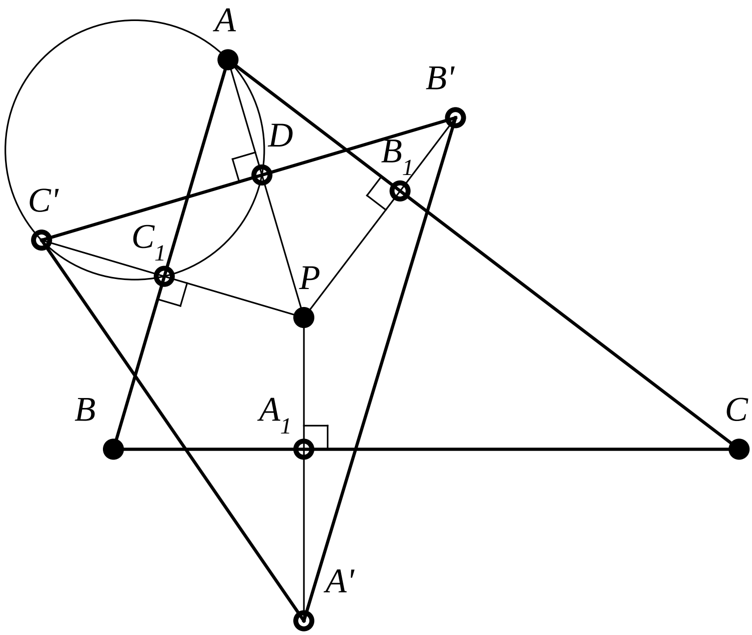


Figura 74

Unghiul AB_1B' este drept, rezultă că și $\sphericalangle ADB'$ este drept, prin urmare $B'D \perp AO$ (4). Relațiile (1) și (4) arată că punctele B', D, C' sunt coliniare și că $AO \perp B'C'$. Analog, deducem că $BO \perp A'C'$ și că $CO \perp A'B'$, deci triunghiul ABC și triunghiul $A'B'C'$ sunt ortologice de centru comun O.

Observația 52

Este adevărată și teorema reciprocă a *Teoremei 22*, iar demonstrația acesteia se face fără dificultate.

Propoziția 66

Dacă ABC și $A'B'C'$ sunt două triunghiuri ortologice de centru comun de ortologie O și omologie cu axa de omologie XYZ, atunci OX, OY, OZ sunt respectiv perpendiculare pe AA', BB', CC'.

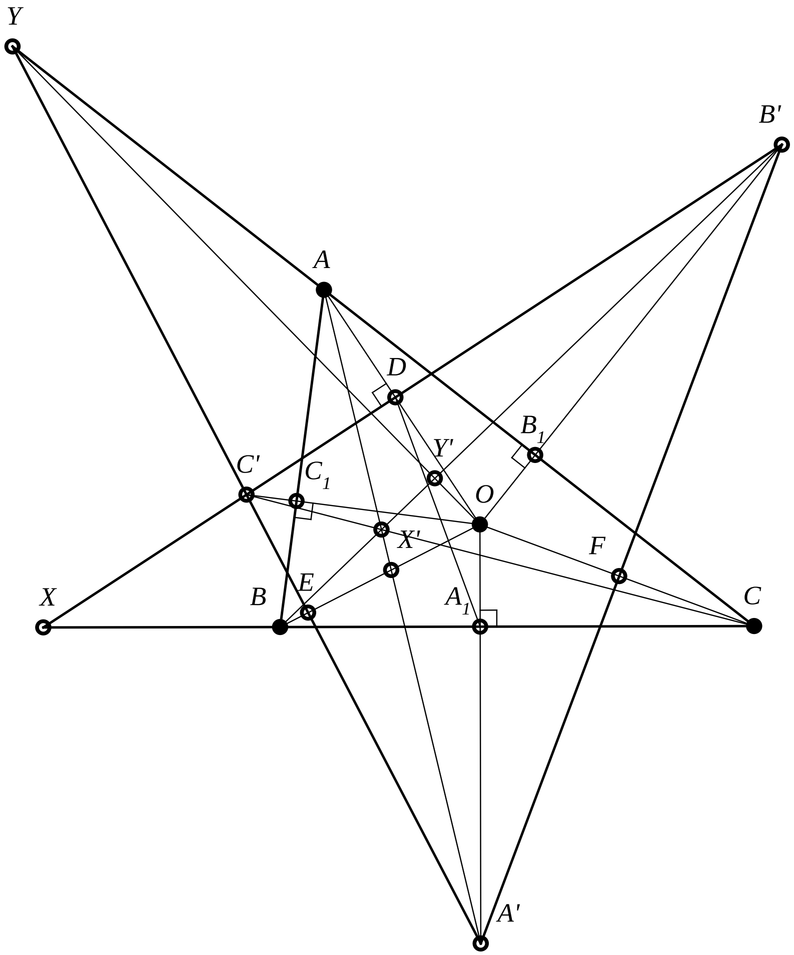


Figura 75

Demonstrație

Notăm D', E', F' proiecțiile ortogonaleale lui O pe laturile BC, CA respectiv AB, și cu D, E, F proiecțiile ortogonale ale lui O pe $B'C'$, $C'A'$, respectiv $A'B'$.

Aplicând *Lema 6*, rezultă că punctele A', B', E', D' sunt conciclice (vezi *Figura 75*).

Considerând puterea punctului O față de cercul punctelor anterioare, scriem:

$OD' \cdot OA' = OE' \cdot OB'$. (1)

Punctele F și E' sunt pe cercul de diametru CB'; considerând puterea lui O față de acest cerc, rezultă că:

$OF \cdot OC = OE' \cdot OB'$. (2)

Tot din *Lema 6*, reținem că punctele A, C, F, D sunt conciclice; puterea lui O față de cercul acestor puncte implică:

$OF \cdot OC = OD \cdot OA$. (3)

Din relațiile (1), (2), (3), obținem:

$OD' \cdot OA' = OD \cdot OA$. (4)

Relația (4) arată că punctele A, A', D', D sunt conciclice, deci:

$\sphericalangle DD'O \equiv \sphericalangle A'AO$. (5)

Punctele O, D, X, D' aparțin cercului de diametru (OX), deci avem:

$\sphericalangle DXO \equiv \sphericalangle D'DO$. (6)

Relațiile (5) și (6) conduc la:

$\sphericalangle D'DO \equiv \sphericalangle A'AO$. (7)

Această relație, împreună cu $OA \perp B'C'$ și cu teorema reciprocă a unghiurilor cu laturile perpendiculare, obținem că $AA' \perp OX$. Analog, demonstrăm că $BB' \perp OY$ și $CC' \perp OZ$.

Propoziția 67

Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice de centru comun O și omologice cu P și XY respectiv centrul lor de omologie și axa de omologie, atunci: $OP \perp XY$.

Demonstrație

Din propoziția anterioară, am reținut că $OX \perp AA'$, $OY \perp BB'$, $OZ \perp CC'$.

Notăm $\{X'\} = OX \cap AA'$, $\{Y'\} = OY \cap BB'$, $\{Z'\} = OZ \cap CC'$ (vezi *Figura 75*). Patrulaterul $XX'O'A'$ este inscriptibil; considerând puterea punctului O față de cercul său circumscris, scriem:

$OX' \cdot OX = OD' \cdot OA'$. (1)

Pe de altă parte:

$OA_1 \cdot OA' = OB_1 \cdot OB'$.

Punctele B', B_1, Y', Y sunt pe cercul de diametru YB'; scriind puterea lui O față de acest cerc, rezultă:

$OB_1 \cdot OB' = OY' \cdot OY$. (2)

Relațiile (1), (2), (3) conduc la:

$OX' \cdot OX = OY' \cdot OY$, (3)

relație ce arată că punctele X', X, Y, Y' sunt conciclice, prin urmare $X'Y'$ este antiparalelă cu XY în raport cu OX și OY. De asemenea, $X'Y'$ este antiparalelă cu tangenta dusă în O la cercul de diametru OP. În consecință, tangenta la cerc este paralelă cu XY și cum OP este perpendiculară pe tangentă, avem că $OP \perp XY$.

5.2 Triunghiuri polar reciproce

Definiția 34

Două triunghiuri se numesc *polar reciproce* în raport cu un cerc dat dacă laturile unuia sunt polarele vârfurilor celuilalt față de un cerc.

Cercul față de care cele două triunghiuri sunt polare reciproce se numește *cerc director*.

Teorema 23

Două triunghiuri polar reciproce în raport cu un cerc dat sunt triunghiuri ortologice, având drept centru comun de ortologie centrul cercului.

Demonstrație

Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri polar reciproce în raport cu cercul director de centru O (vezi *Figura 76*).

Deoarece polara lui A, adică $B'C'$, este perpendiculară pe dreapta determinată de punctul A și de centrul cercului O, avem că $OA \perp B'C'$, analog $OB \perp A'C'$ și $OC \perp A'B'$.

De asemenea, polara lui A' față de cerc, adică BC, este perndiculară pe $A'O$ și analog $B'O \perp AC$ și $C'O \perp AB$, deci ABC și $A'B'C'$ sunt triunghiuri ortologice având centru de ortologie comun punctul O.

Punctele A_0, B_0, C_0 sunt inversele punctelor A, B, C – față de cercul de inversiune, având centrul în O.

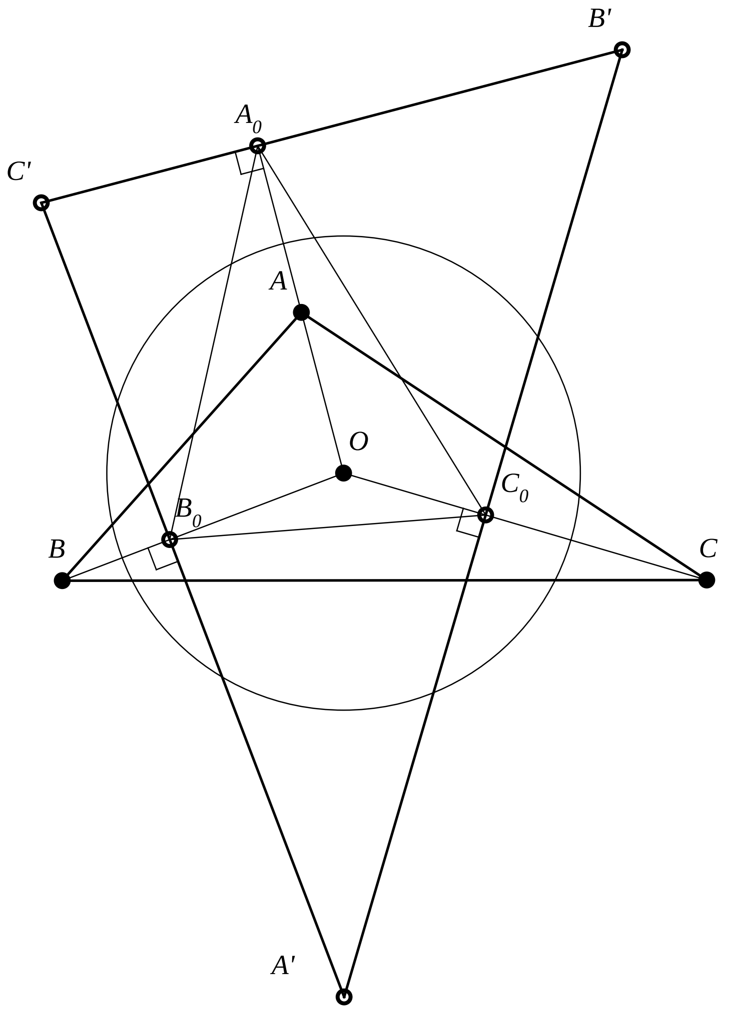


Figura 76

Remarca 17

Un triunghi ABC și triunghiul său tangențial sunt triunghiuri polar reciproce în raport cu cercul circumscris triunghiului ABC, deci ele sunt triunghiuri ortologice cu centrul comun de ortologie în cadrul cercului circumscris triunghiului ABC.

5.3 Alte triunghiuri ortologice remarcabile cu același centru de ortologie

În capitolul 2, am evidențiat câteva perechi de triunghiuri ortologice cu un singur centru de ortologie, și anume un triunghi dat și triunghiul său de contact; triunghiul dat şi triunghiul său tangențial.

În cele ce urmează, vom investiga o altă pereche de triunghiuri ortologice care au același centru de ortologie.

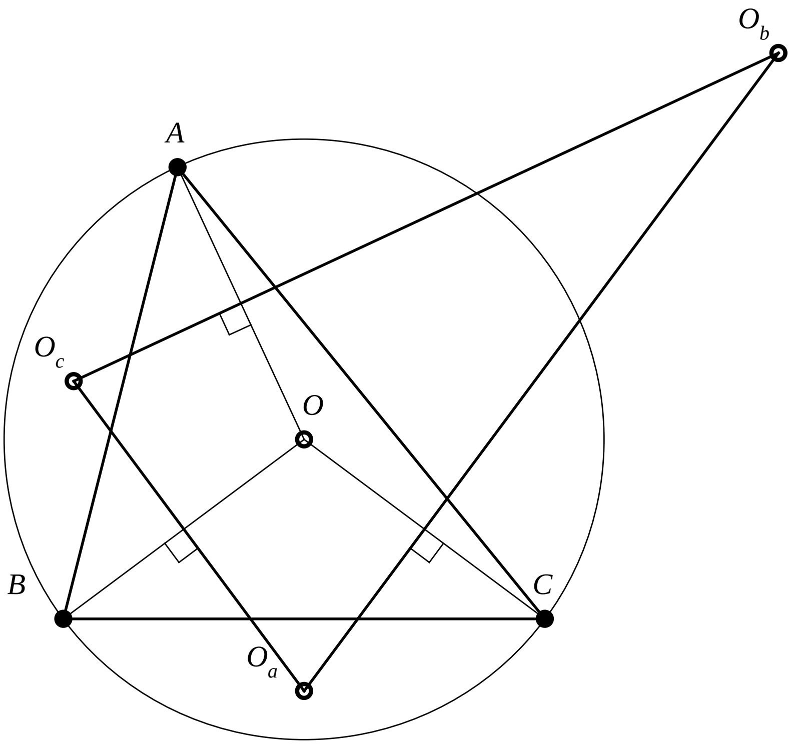


Figura 77

Definiția 35

Fiind dat un triunghi ABC nedreptunghic, se numește *triunghiul lui Coșniță* al său triunghiul cu vârfurile în centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor OBC, OCA, OAB, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Observația 53

În *Figura 77*, *triunghiul Coșniță* al triunghiului ABC a fost notat $O_aO_bO_c$.

Propoziția 68

Un triunghi nedreptunghic dat și *triunghiul său Coșniță* sunt triunghiuri ortologice cu centrul comun de ortologie O – centrul cercului circumscris triunghiului dat.

Demonstrație

Evident, perpendicularele duse din O_a, O_b, O_c pe BC, CA, AB sunt mediatoarele triunghiului ABC, deci sunt concurente în O. Pe de altă parte, AO este coardă comună în cercurile circumscrise triunghiurilor AOB și AOC, prin urmare $AO \perp O_bO_c$. Analog, rezultă că perpendicularele din B și C respectiv pe O_aO_c și O_aO_b trec prin punctul O.

Remarca 18

1. În [24], am demonstrat că triunghiurile ABC și $O_aO_bO_c$ sunt omologice (cu ajutorul teoremei lui Ceva); acest rezultat se poate obține acum cu ajutorul *Teoremei 20*. Amintim că centrul de omologie se numește *punctul lui Coșniță* și că acesta este conjugatul izogonal al centrului cercului celor nouă puncte; de asemenea, axa de omologie este numită *dreapta lui Coșniță*.
2. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic și $A_1B_1C_1$ este triunghiul podar al centrului cercului circumscris O, iar $O_aO_bO_c$ este *triunghiul lui Coșniță*, se poate arăta că:
   $OA_1 \cdot OO_a = OB_1 \cdot OO_b = OC_1 \cdot OO_c = \frac{1}{2}R^2.$

Dacă considerăm A', B', C' aparținând respectiv dreptelor A_1O_a, B_1O_b, C_1O_c, astfel încât $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OC'}$, atunci, din *Teorema 22*, obținem că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice. Din *Teorema 20*, obținem despre aceste triunghiuri că sunt omologice. În [21], am denumit centrul de omologie al acestor triunghiuri – *punctul generalizat al lui Coșniță*, iar axa de omologie a acestor triunghiuri am numit-o *dreapta generalizată a lui Coșniță*. Vom denumi triunghiul $A'B'C'$ *triunghiul generalizat al lui Coșniță*.

Având în vedere *Propoziția 68*, putem enunța: *Dreapta determinată de centrul cercului circumscris unui triunghi și punctul generalizat al lui Coșniță este perpendiculară pe dreapta generalizată a lui Coșniță.*

5.4. Triunghiuri biortologice

Definiția 36

Dacă triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul $A_1B_1C_1$ și cu triunghiul $B_1C_1A_1$, spunem că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt biortologice.

Observația 54

În *Figura 78*, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt biortologice. Am notat cu O_1 centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ și cu O_2 centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $B_1C_1A_1$.

Teorema 24 (A. Pantazi, 1896 – 1948)

Dacă triunghiul ABC este simultan ortologic în raport cu triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $B_1C_1A_1$, atunci triunghiul ABC este ortologic în triunghiul $C_1A_1B_1$.

Demonstrația 1

Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ fiind ortologice, avem:

$$AB_1^2 - AC_1^2 + BC_1^2 - BA_1^2 + CA_1^2 - CB_1^2 = 0. \quad (1)$$

Triunghiurile ABC și $B_1C_1A_1$ fiind ortologice, putem scrie:

$$AC_1^2 - AA_1^2 + BA_1^2 - BB_1^2 + CB_1^2 - CC_1^2 = 0. \quad (2)$$

Adunând membru cu membru relațiile (1) și (2), obținem:

$$AB_1^2 - AA_1^2 + BC_1^2 - BB_1^2 + CA_1^2 - CC_1^2 = 0. \quad (3)$$

Relația (3) exprimă condiția necesară și suficientă ca triunghiurile ABC și $C_1A_1B_1$ să fie ortologice.

Demonstrația 2

Fie triunghiul ABC simultan ortologic cu triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $B_1C_1A_1$.

Utilizând *Teorema 3*, avem:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0, \quad (4)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0, \quad (5)$$

Adunând membru cu membru relațiile (4) și (5) obținem:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1A_1}\right) + \overrightarrow{MB} \cdot \left(\overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1}\right) +$$
$$+\overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}\right) = 0, \quad (6)$$

oricare ar fi M un punct din plan.

Deoarece $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1B_1}$ și $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (relația lui Chasles), avem:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \tag{7}$$

oricare ar fi M un punct în plan.

Această relație arată că triunghiurile ABC și $C_1A_1B_1$ sunt ortologice.

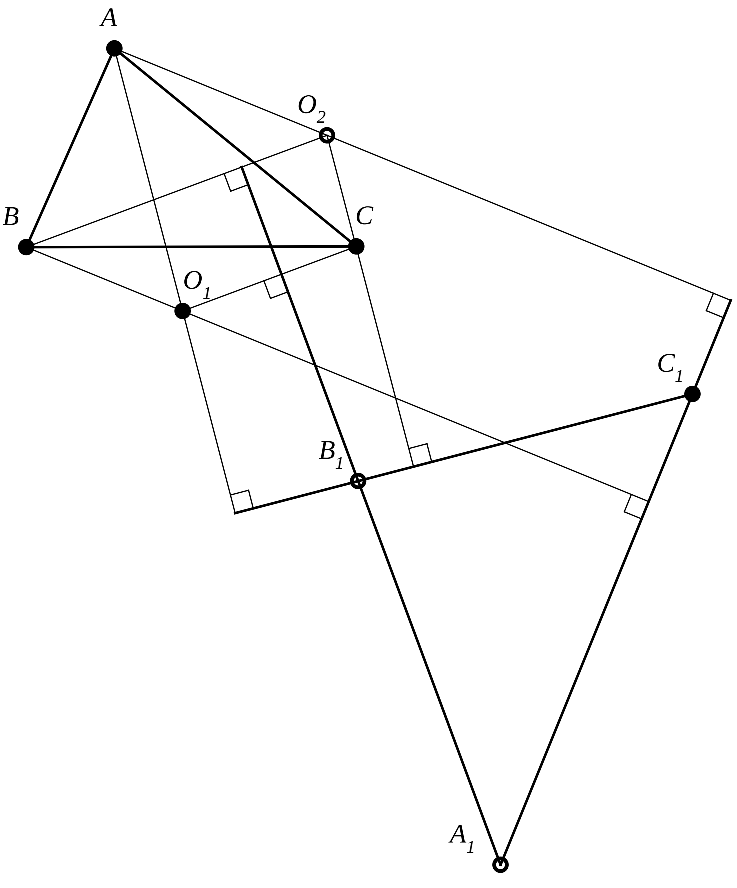


Figura 78

Remarca 18

Teorema Pantazi poate fi formulată astfel:

Dacă două triunghiuri sunt biortologice, atunci ele sunt triortologice.

Teorema 25 (C. Cocea, 1992)

(i) Două triunghiuri echilaterale ABC și $A_1B_1C_1$, invers orientate sunt de trei ori ortologice și anume în ordinele: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B_1 & C_1 & A_1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C_1 & A_1 & B_1 \end{pmatrix}$.

(ii) Dacă notăm cu O'_1, O'_2, O'_3 centrele de ortologie corespunzătoare ternelorde mai sus, atunci triunghiul $O'_1O'_2O'_3$ este echilateral și congruent cu triunghiul ABC.

Demonstrație

i) Notând cu $A' = pr_{B_1C_1}(A)$, $B' = pr_{A_1C_1}(B)$ și cu $\{O_1\} = AA' \cap BB'$, pentru a arăta că ΔABC este ortologic cu $\Delta A_1B_1C_1$, este suficient să arătăm că: $\boxed{O_1C \perp A_1B_1}$ (vezi *Figura 79*).

Avem:

$$\left.\begin{matrix} AA' \perp B_1C_1 \\ BB' \perp A_1C_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_1A'C_1B' \text{- inscriptibil}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{BCA} \equiv \widehat{A_1C_1B_1} \\ \widehat{A_1C_1B_1} \equiv \widehat{BO_1A'} \\ [AA'] \cap [BB'] = \{O_1\} \Rightarrow \widehat{BO_1A'} \equiv \widehat{BO_1A} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{BCA} \equiv \widehat{BO_1A} \quad (1)$$

$$\Rightarrow ABO_1C\text{- inscriptibil} \Rightarrow \begin{cases} O_1 \in ABC \\ AO_1C \equiv ABC \end{cases} \qquad (2, 3)$$

În fine, mai notând acum cu: $\{C'\} = O_1C \cap A_1B_1$, obținem că:

$$\left.\begin{matrix} m\left(\widehat{BO_1A}\right) \overset{(1)}{=} m\left(\widehat{BCA}\right) = 60^0 \\ m\left(\widehat{AO_1C}\right) \overset{(3)}{=} m\left(\widehat{ABC}\right) = 60^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m(C'O_1B') =$$

$$= 180^0 - \left[m\left(\widehat{BO_1A}\right) + m\left(\widehat{AO_1C}\right)\right] =$$

$$= 180^0 - (60^0 + 60^0) = 60^0 = m\left(\widehat{B_1A_1C_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{C'O_1B'} \equiv \widehat{B_1A_1C_1} \Rightarrow \begin{matrix} O_1B'A_1C' - \text{inscriptibil} \\ BB' \perp A_1C_1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{CC'(O_1C) \perp A_1B_1}.$$

În mod analog, se arată că triunghiurile ABC și $B_1C_1A_1$ sunt ortologice de centru O_2, și O_2 aparține cercului circumscris triunghiului ABC, precum și că triunghiurile ABC și $C_1A_1B_1$ sunt ortologice de centru de ortologie O_3, punct ce aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

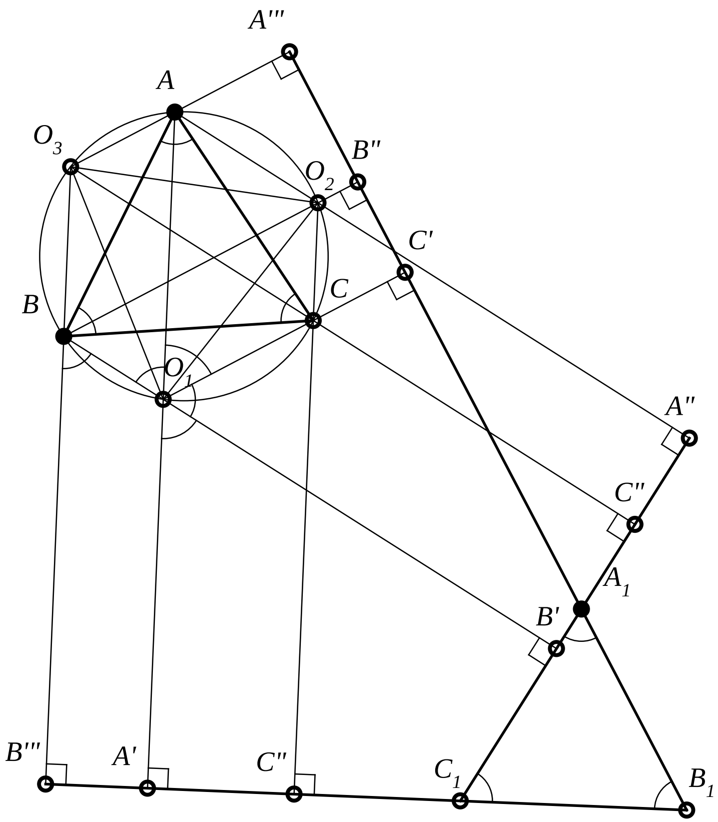


Figura 79

ii) Deoarece $CO_3 \parallel AO_2$ (sunt perpendiculare pe A_1C_1) și $A_1O_2C_1O_3$ este patrulater inscriptibil (aceste puncte aparțin cercului circumscris triunghiului ABC), avem că AO_2CO_3 este trapez isoscel, deci $O_2O_3 = AC$. Analog, AO_1BO_3 este trapez isoscel, prin urmare $O_1O_3 = AB$, și BO_2CO_1 este trapez isoscel și, prin urmare $O_1O_2 = BC$. Dar triunghiul ABC este echilateral, în consecință $O_1O_2O_3$ este un triunghi echilateral congruent cu ABC.

Observația 55

În mod analog, se poate arăta că, dacă notăm cu O'_1, O'_2, O'_3 centrele de ortologie corespunzătoare ternelor de mai jos:

$\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ ABC \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} B_1C_1A_1 \\ ABC \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} C_1A_1B_1 \\ ABC \end{pmatrix}$,

atunci triunghiul $O'_1O'_2O'_3$ este echilateral și congruent cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

Se poate justifica fără dificultate că triunghiul $O_1O_2O_3$ este biortologic în raport cu triunghiul $O'_1O'_2O'_3$.

Teorema 26 (Mihai Miculița)

Două triunghiuri oarecare asemenea: ABC și $A_1B_1C_1$, invers orientate, sunt ortologice.

Consecințe

1). Pe parcursul demonstrației, am arătat că patrulaterul $PB_1A_1C_1$ este inscriptibil, rezultă că $P \in A_1B_1C_1$. Așa că centrul de ortologie P al triunghiului $A_1B_1C_1$ față de triunghiul ABC se găsește pe cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$.

2). Dacă ABC și $A_1B_1C_1$ sunt două triunghiuri echilaterale invers orientate, atunci avem: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta B_1C_1A_1 \sim \Delta C_1A_1B_1$, așa că subpunctul *i*) al *Teoremei 25* este un caz particular al teoremei de mai sus.

Demonstrația

Notând cu $A' = pr_{BC}(A_1)$, $C' = pr_{AB}(C_1)$ și $\{P\} = AA' \cap CC'$, iar cu $\{B'\} = AC \cap B_1P$, demonstrația se reduce acum la a arăta doar că:

$B' = pr_{AC}(B_1)$ (vezi *Figura 80*).

Avem:

$$\left.\begin{array}{r} A' = pr_{BC}(A_1) \Leftrightarrow A_1A' \perp BC \\ C' = pr_{AN}(A_1) \Leftrightarrow C_1C' \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CA'P} \equiv \widehat{BC'P} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \{P\} = AA' \cap CC' \Rightarrow \widehat{A_1PC_1} \Rightarrow \widehat{C'PA'} \\ \Rightarrow A'BC'P - \text{inscriptibil} \Rightarrow \widehat{C'PA'} = \widehat{ABC} \\ \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1PC_1} = \widehat{A_1B_1C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \widehat{A_1PC_1} = \widehat{A_1B_1C_1} \Rightarrow PB_1A_1C_1 - \text{inscriptibil} \Rightarrow \widehat{A_1C_1B_1} = \widehat{A_1PB_1} \\ [AA'] \cap [BB'] = \{P\} \Rightarrow \widehat{A_1PB_1} = \widehat{A'PB'} \\ \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{A_1C_1B_1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{A'PB'} = \widehat{ACB} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow A'PB'C - \text{inscriptibil} \Rightarrow \widehat{PB'C} = \widehat{PA'B} \\ PA' \perp BC \Rightarrow m\left(\widehat{PA'B}\right) = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{PB'C}\right) = 90^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B' = pr_{AC}(B_1)$$

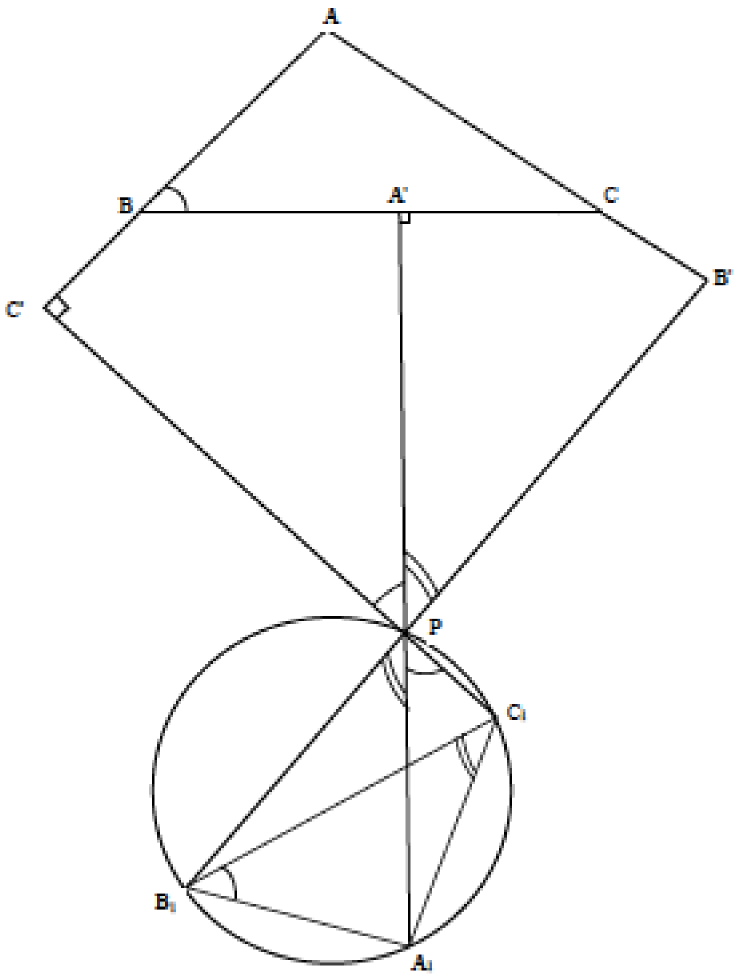


Figura 80

Teorema 27 (Lemoine)

Locul geometric al punctelor M din planul unui triunghi ABC, ale căror triunghiuri podare în raport cu acesta sunt triortologice cu ABC este dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC.

Demonstrație

Considerăm triunghiul ABC astfel încât în reperul cartezian xOY să avem $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$.

Se știe că ecuația unui cerc determinat de trei puncte A_1, A_2, A_3 necoliniare $A_i(x_i,y_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, este dată de:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pentru punctele A, B, C cu coordonatele de mai sus, această ecuație, după dezvoltarea determinantului, este:

$$a(x^2+y^2) - a(b+c)x - (a^2+bc)y + abc = 0.$$

Scriem ecuația *dreptei Lemoine* a triunghiului ABC. Aceasta este determinată de intersecția tangentelor la cercul circumscris cu laturile opuse ale triunghiului.

Ecuația tangentei în $A(0,a)$ la cercul circumscris este:

$$a(b+c)x - y(a^2-bc) + a(a^2-bc) = 0.$$

Intersectând această tangentă cu $0x$, găsim punctul D, cu $D\left(\frac{bc-a^2}{b+c};0\right)$.

Ecuația tangentei în $B(b,0)$ la cercul circumscris triunghiului ABC este:

$$a(b-c)x - (a^2+bc)y - ab(b-c) = 0.$$

Intersectăm această tangentă cu dreapta AC:

$$ax + cy - ac = 0.$$

Obținem:

$$E\left(\frac{c(a^2+b^2)}{a^2-c^2+2bc};\frac{-a(b-c)^2}{a^2-c^2+2bc}\right).$$

Panta *dreptei lui Lemoine* a triunghiului ABC este:

$$m_{DE} = \frac{a(b+c)(b-c)^2}{-a^4-2a^2bc-bc^3-b^3c-b^2c^2}.$$

Ecuația *dreptei lui Lemoine* a triunghiului ABC este:

$$\boxed{a(b+c)(b-c)^2x + (a^4+2a^2bc+bc^3+b^3c-b^2c^2)y - a(bc-a^2)(b-c)^2 = 0}.$$

Să considerăm acum un punct $M(x_0,y_0)$ care are proprietatea din enunț, adică triunghiul său podar, pe care îl vom nota $A_1B_1C_1$, este triortologic cu triunghiul ABC. Avem că $A_1(x_0,0)$. Ecuația perpendiculară dusă din M pe AB este: $y - y_0 = \frac{c}{a}(x-x_0)$.

Intersecția acesteia cu AB: $ax+by-ab=0$ este:

$$C_1\left(\frac{b(a^2+bx_0-ay_0)}{a^2+b^2};\frac{a(b^2-bx_0+ay_0)}{a^2+b^2}\right).$$

Perpendiculara dusă din M pe AC are ecuația:
$cx - ay - cx_0 + ay_0 = 0$.
Intersectând această dreaptă cu AC: $ax + cy - ac = 0$, obținem:
$B_1\left(\frac{c(a^2+cx_0-ay_0)}{a^2+c^2}; \frac{a(c^2-cx_0+ay_0)}{a^2+c^2}\right)$.
Ecuația perpendicularei dusă din A_1 pe AC este:
$cx - ay - cx_0 = 0$.
Ecuația perpendicularei dusă din B_1 pe AB este:

$$b(a^2+c^2)x - a(a^2+c^2)y - x_0(bc^2+a^2c) + y_0 \cdot a(a^2+bc) - a^2(c^2-bc) = 0.$$

Ecuația perpendicularei dusă din C_1 pe BC este:
$(a^2+c^2)x - b(a^2+cx_0-ay_0) = 0$.
Aceste perpendiculare sunt concurente dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} c & -a & -cx_0 \\ b(a^2+c^2) & -a(a^2+c^2) & -x_0(bc^2+ac^2)+y_0(a^3+abc+a^2c^2-a^2bc) \\ a^2+b^2 & 0 & -b(a^2+bx_0-ay_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând acest determinant, efectuând reduceri, se obține:

$$a(b+c)(b-c)^2x_0 + (a^4+2a^2bc+bc^3+b^3c-b^2c^2)y_0 - a(bc-a^2)(b-c)^2 = 0.$$

Aceasta arată că punctul M aparține dreptei Lemoine a triunghiului ABC.

6

TRIUNGHIURI BILOGICE

În anul 1922, J. Neuberg propune denumirea de *triunghiuri bilogice* pentru triunghiurile care sunt simultan omologice și ortologice.

6.1 *Teorema lui Sondat.* Demonstrații

Teorema 28 (P. Sondat, 1894)

Dacă două triunghiuri ABC și $A_1B_1C_1$ sunt bilogice cu centrul omologiei P și centrele de ortologie Q_1 și Q, atunci P, Q și Q_1 sunt pe aceeași dreaptă perpendiculară pe axa de omologie.

Demonstrația 1 (V. Thébault, 1952)

Notăm cu d axa de omologie a triunghiurilor date. Pe această dreaptă, există punctele: $\{A'\} = BC \cap B_1C_1$, $\{B'\} = AC \cap A_1C_1$, $\{C'\} = AB \cap A_1B_1$.

Centrul de ortologie Q_1 este intersecția perpendicularelor duse din A, B, C respectiv pe B_1C_1; A_1C_1 și A_1B_1. Ideea demonstrării coliniarității punctelor P, Q, Q_1 este de a arăta că $PQ \perp d$ și că $PQ_1 \perp d$.

Pentru a demonstra că $PQ \perp d$, este necesar și suficient să demonstrăm relația:

$$B'P^2 - B'Q^2 = A'P^2 - A'Q^2. \qquad (1)$$

Folosim *Teorema lui Stewart* în triunghiul PAC; $B' \in AC$; avem:

$$B'P^2 \cdot AC + CP^2 \cdot B'A - PA^2 \cdot B'C = B'A \cdot AC \cdot B'C. \qquad (2)$$

Punctul P fiind centrul omologiei, avem:

$$\overrightarrow{PA_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{PB_1} = \beta \cdot \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{PC_1} = \gamma \cdot \overrightarrow{CC_1}, \qquad (3)$$

α, β, γ numere reale (în cazul *Figurii 81*, α, β, γ sunt strict pozitive).

Teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul PAC pentru transversala $B' - C_1 - A_1$ implică:

$$\frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{A_1A}{A_1P} \cdot \frac{C_1P}{C_1C} = 1. \qquad (4)$$

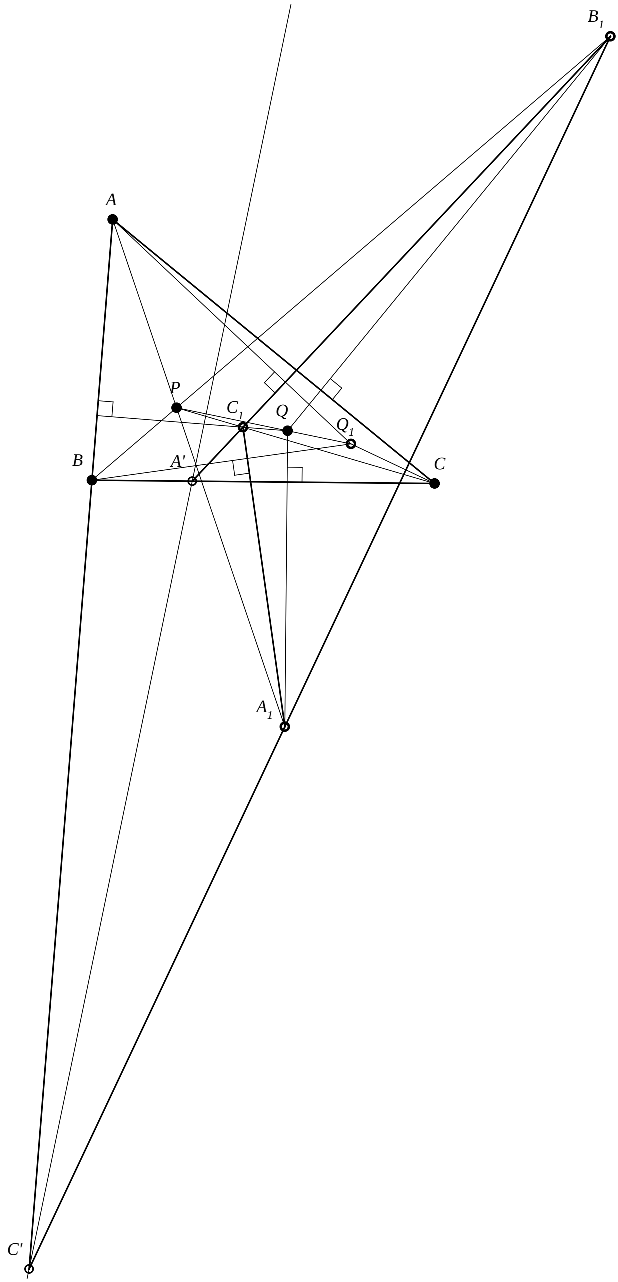


Figura 81

Ținând seama de (3), obținem din (4) că:

$$\frac{B'C}{B'A}=\frac{\alpha}{\gamma}. \qquad (5)$$

Teorema lui Stewart aplicată în triunghiul QAC, $B' \in AC$, conduce la:

$$B'Q^2 \cdot AC + CQ^2 \cdot B'A - QA^2 \cdot B'C = B'A \cdot AC \cdot B'C. \qquad (6)$$

Egalăm relațiile (2) și (6), obținem:

$$B'P^2 \cdot AC + CP^2 \cdot B'A - PA^2 \cdot B'C = B'Q^2 \cdot AC + CQ^2 \cdot B'A - QA^2 \cdot B'C$$

sau:

$$\left(B'P^2 - B'Q^2\right)\cdot AC = \left(CQ^2 - CP^2\right)\cdot B'A + \left(PA^2 - QA^2\right)\cdot B'C. \qquad (7)$$

Notăm:

$$PA^2 - QA^2 = u, PB^2 - QB^2 = v, PC^2 - QC^2 = t. \qquad (8)$$

Găsim:

$$B'P^2 - B'Q^2 = \frac{\alpha u - \gamma t}{\alpha - \gamma}. \qquad (9)$$

Aplicăm *Teorema lui Stewart* în triunghiurile PBC și QBC, $A' \in BC$, obținem:

$$A'P^2 \cdot BC - PB^2 \cdot A'C + PC^2 \cdot A'B = A'B \cdot BC \cdot A'C, \qquad (10)$$

$$A'Q^2 \cdot BC - QB^2 \cdot A'C + QC^2 \cdot A'B = A'B \cdot BC \cdot A'C. \qquad (11)$$

Teorema lui Menelaus în triunghiul PBC pentru transversala $A' - C_1 - B_1$, conduce la:

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{\gamma}{\beta}. \qquad (12)$$

Egalând relațiile (10) și (11), și ținând seama de (8) și (12), obținem:

$$A'P^2 - A'Q^2 = \frac{v\beta - t\gamma}{\beta - \gamma}. \qquad (13)$$

Relația (1) este echivalentă cu:

$$\alpha\beta(u-v) + \beta\gamma(v-t) + \gamma\alpha(t-u) = 0. \qquad (14)$$

Pentru a demonstra (14), aplicăm *Teorema lui Stewart* în triunghiurile PAC și PAB, $A_1 \in AP$; obținem:

$$CA^2 \cdot PA_1 - CP^2 \cdot AA_1 + CA_1^2 \cdot PA = PA \cdot PA_1 \cdot AA_1, \qquad (15)$$

$$BA^2 \cdot PA_1 - BP^2 \cdot AA_1 + BA_1^2 \cdot PA = PA \cdot PA_1 \cdot AA_1. \qquad (16)$$

Egalând aceste relații, obținem:

$$(BA^2 - CA^2)PA_1 + (PC^2 - PB^2)AA_1 + (BA_1^2 - CA_1^2)PA = 0. \qquad (17)$$

Deoarece $A_1Q \perp BC$, avem că: $BA_1^2 - CA_1^2 = QB^2 - QC^2$.

Substituind această relație în (17) și ținând seama că $\frac{PA_1}{AA_1} = \alpha$, precum și de relațiile (8), obținem:

$BA^2 - CA^2 + QC^2 - QB^2 = \frac{v-t}{\alpha}$. (18)

Analog, obținem relațiile:

$CB^2 - AB^2 + QA^2 - QC^2 = \frac{t-u}{\beta}$, (19)

$AC^2 - BC^2 + QB^2 - QA^2 = \frac{u-v}{\gamma}$. (20)

Sumând ultimele trei relații membru cu membru, obținem:

$\frac{v-t}{\alpha} + \frac{t-u}{\beta} + \frac{u-v}{\gamma} = 0$. (21)

Relațiile (14) și (21) sunt echivalente prin $PQ \perp d$. Analog, se demonstrează că $PQ_1 \perp d$, ceea ce încheie demonstrația *Teoremei lui P. Sondat*.

Demonstrația 2 (adaptată după cea dată de Jean-Louis Aymé)

Fie A_2 intersecția perpendicularei dusă din Q_1 pe BC cu AA_1, B_2 intersecția paralelei, dusă prin A_2 la A_1B_1, cu BB_1, și C_2 intersecția paralelei dusă prin B_2 la B_1C_1 cu CC_1 (vezi *Figura 82*).

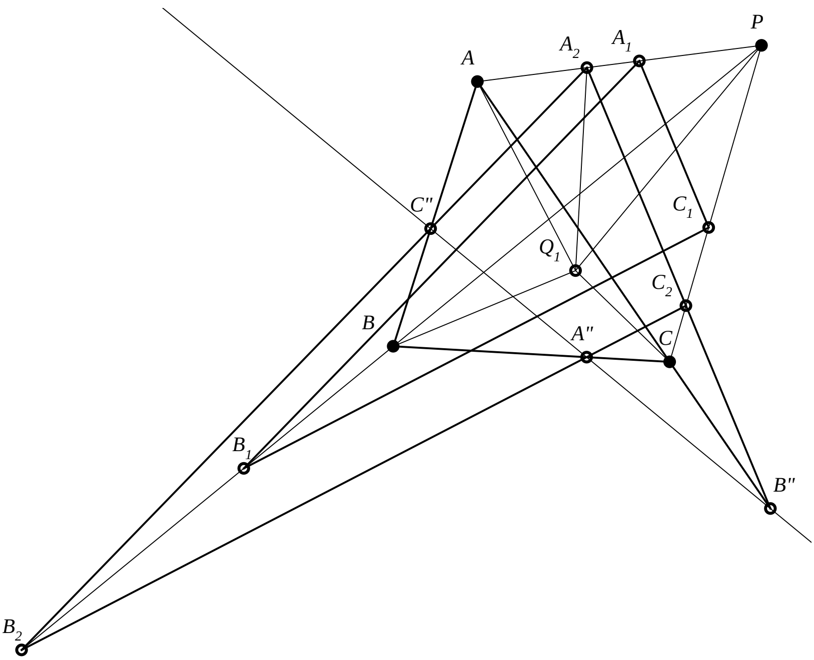


Figura 82

Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt omotetice printr-o omotetie de centru P (ele au laturile respectiv paralele).

Deoarece $AQ_1 \perp B_1C_1$ și $B_1C_1 \perp B_2C_2$, rezultă că $AQ_1 \perp B_2C_2$; analog, $BQ_1 \perp A_2C_2$ și $CQ_1 \perp A_2B_2$, deci Q_1 este centrul comun de ortologie pentru triunghiurile $A_2B_2C_2$ și ABC.

Triunghiul $A_2B_2C_2$ fiind omotetic cu $A_1B_1C_1$, și $A_2B_2C_2$ fiind omologic cu ABC (de centru P), notăm $A''B''C''$ axa de omologie a triunghiurilor $A_2B_2C_2$ și ABC, avem că $A''B'' \parallel A'B'$ ($A'B'$ este axa de omologie a triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$). Aplicând acum *Propoziția 67*, rezultă că $PQ_1 \perp A''B''$, deci:

$PQ_1 \perp A'B'$. (1)

Notăm A_3 intersecția perpendicularei dusă din Q pe B_1C_1 cu AA_1; fie B_3 intersecția paralelei dusă din A_3 la AB_1 cu BB_1; și fie C_3 intersecția paralelei dusă din B_3 la BC cu CC_1. Triunghiurile ABC și $A_3B_3C_3$ sunt omotetice de centru P (au laturile respectiv paralele).

Având $B_1Q \perp AC$ și $A_3C_3 \parallel AC$, rezultă că $B_1Q \perp A_3C_3$; din $A_1Q \perp BC$ și $B_3C_3 \parallel BC$, obținem că $A_1Q \perp B_3C_3$. În concluzie, triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_3B_3C_3$ sunt ortologice, cu centrul comun de ortologie punctul Q, și omologice, de centru P. Aplicând *Propoziția 67*, rezultă că $PQ \parallel A'''B'''$ (unde $A'''B'''$ este axa de omologie a triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și $A_3B_3C_3$. Cum $A_3B_3C_3$ este omotetic cu ABC, rezultă că $A'''B'''$ este paralelă cu $A'B'$; în consecință:

$PQ \perp A'B'$. (2)

Relațiile (1) și (2) conduc la concluzie.

6.2 Triunghiuri bilogice remarcabile

6.2.1 Un triunghi și primul său triunghi Brocard

Definiția 37

Numim primul triunghi Brocard al unui triunghi dat, triunghiul determinat de proiecțiile centrului simedian pe mediatoarele triunghiului dat.

Observația 56

În *Figura 83*, K este intersecția simedianelor triunghiului ABC, OA', OB', OC' sunt mediatoarele acestuia, iar $A_1B_1C_1$ este primul triunghi al lui Brocard.

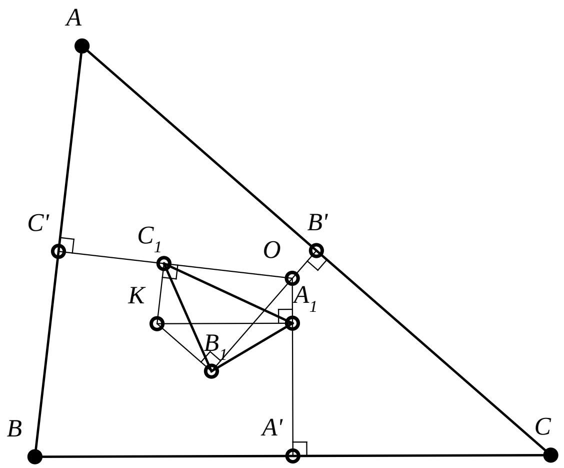


Figura 83

Propoziția 69

Primul triunghi al lui Brocard este asemenea cu triunghiul dat.

Demonstrație

Observăm că $m(\widehat{KA_1O}) = 90^0$, deci A_1 aparține cercului de diametru OK, analog B_1, C_1 aparțin acestui cerc. Avem: $\widehat{B_1A_1C_1} \equiv \widehat{B_1OC_1}$ (subîntind același arc în cercul circumscris primului triunghi Brocard). Pe de altă parte,$\sphericalangle B_1OC_1 \equiv \sphericalangle BAC$ (au laturile respectiv perpendiculare). Obținem că $\sphericalangle B_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle BAC$. Analog, rezultă că $\sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle ABC$ și, în consecință, triunghiul ABC dat și primul său triunghi Brocard $A_1B_1C_1$ sunt asemenea.

Observația 57

1. Cercul circumscris primului triunghi Brocard se numește *cercul lui Brocard*.
2. Propoziția anterioară se demonstrează în același mod și în cazul triunghiului ABC obtuzunghic (sau dreptunghic).

Teorema 29

Triunghiul ABC și primul său triunghi Brocard, $A_1B_1C_1$, sunt triunghiuri bilogice.

Vom demonstra această teoremă în două etape:

I. Demonstrăm că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt ortologice.

Într-adevăr, perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA, AB sunt chiar mediatoarele triunghiului ABC și, în consecință, O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC este centru de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC. Conform teoremei triunghiurilor ortologice și perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 respectiv pe laturile primului triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$ sunt concurente.

Deoarece acest punct este important în geometria triunghiului, îl vom defini și vom demonstra concurența dreptelor anterioare.

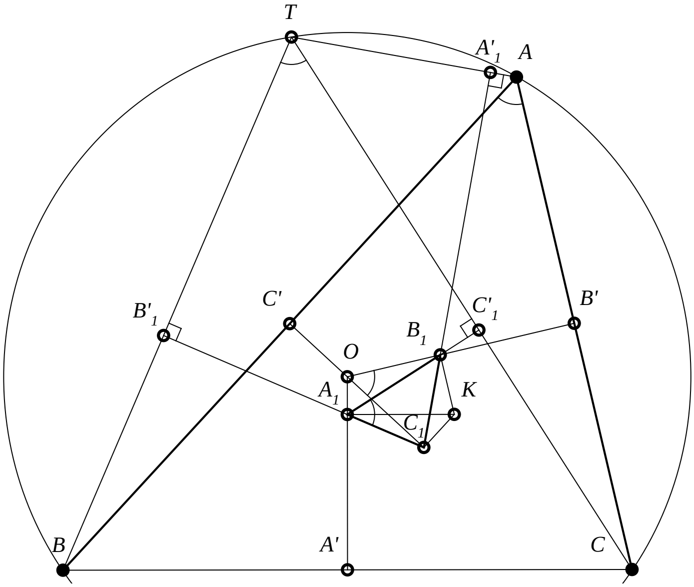


Figura 84

Definiția 38

Se numește *punct Tarry* al triunghiului ABC centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu primul triunghi Brocard.

Propoziția 70

Centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $A_1B_1C_1$ - primul său triunghi Brocard este punctul Tarry, T, și acest punct aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație

Notăm $\{B_1'\} = BT \cap A_1C_1$, $\{C_1'\} = CT \cap A_1B_1$ (vezi *Figura 84*). Avem: $\sphericalangle C_1A_1B_1 \equiv \sphericalangle A$, rezultă că $m\left(\widehat{B_1'A_1C_1'}\right) = 180^0 - A$, în consecință $\sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle A$, ceea ce arată că T aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

II. Pentru a demonstra că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt omologice avem nevoie de câteva rezultate ajutătoare:

Definiția 39

Punctele Ω și Ω' din interiorul triunghiului ABC, cu proprietățile:
$\boldsymbol{m(\sphericalangle \Omega AB) = m(\sphericalangle \Omega BC) = m(\sphericalangle \Omega CA) = \omega,}$
$\boldsymbol{m(\sphericalangle \Omega' BA) = m(\sphericalangle \Omega' AC) = m(\sphericalangle \Omega' CB) = \omega,}$
se numesc *punctele lui Brocard,* iar ω se numește *unghiul lui Brocard.*

Lema 7

În triunghiul ABC, în care Ω este primul punct al lui Brocard și $A\Omega \cap BC = \{A''\}$, avem $\frac{BA''}{CA''} = \frac{c^2}{a^2}$.

Demonstrație

$\text{Aria}\Delta ABA'' = \frac{1}{2} AB \cdot AA'' \cdot sin\omega,$ (1)

$\text{Aria}\Delta ACA'' = \frac{1}{2} AC \cdot AA'' \cdot sin(A - \omega).$ (2)

Din (1) și (2), rezultă:

$\frac{\text{Aria}\Delta ABA''}{\text{Aria}\Delta ACA''} = \frac{c \cdot sin\omega}{b \cdot sin(A-\omega)}.$ (3)

Pe de altă parte, triunghiurile menționate au aceeași înălțime dusă din A, prin urmare:

$$\frac{\text{Aria}\Delta ABA''}{\text{Aria}\Delta ACA''} = \frac{BA''}{CA''}. \quad (4)$$

Relațiile (3) și (4) conduc la:

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{c}{a} \cdot \frac{sin\omega}{sin(A-\omega)}. \quad (5)$$

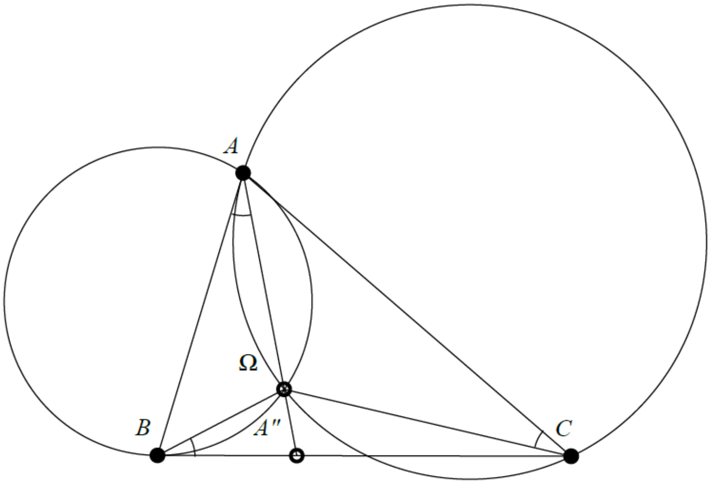


Figura 85

Aplicând *Teorema sinusurilor* în triunghiurile $A\Omega C$ și $B\Omega C$, obținem:

$$\frac{C\Omega}{sin(A-\omega)} = \frac{AC}{\sin(A\Omega C)}, \quad (6)$$

$$\frac{C\Omega}{sin\omega} = \frac{BC}{\sin(B\Omega C)}. \quad (7)$$

Deoarece $m\left(\widehat{A\Omega C}\right) = 180^0 - A$ și $m\left(\widehat{B\Omega C}\right) = 180^0 - C$, din relațiile (6) și (7) rezultă:

$$\frac{sin\omega}{sin(A-\omega)} = \frac{b}{a} \cdot \frac{sinC}{sinA}. \quad (8)$$

Teorema sinusurilor în triunghiul ABC furnizează:

$$\frac{sinC}{sinA} = \frac{c}{a}. \quad (9)$$

Relațiile (5), (8) și (9) conduc la:

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Observația 58

1. Notând $\{B''\} = B\Omega \cap AC$ și $\{C''\} = C\Omega \cap AB$, se obțin în mod analog relațiile:
$\frac{CB''}{B''A} = \frac{a^2}{b^2}, \frac{AC''}{C''B} = \frac{b^2}{c^2}$.
2. Notând $\{A'''\} = A\Omega' \cap BC$,$\{B'''\} = B\Omega' \cap AC$, $\{C'''\} = C\Omega' \cap AB$; procedând analog, găsim:
$\frac{BA'''}{CA'''} = \frac{a^2}{b^2}; \frac{CB'''}{AB'''} = \frac{b^2}{c^2}; \frac{AC'''}{BC'''} = \frac{c^2}{a^2}$.

Lema 8

Într-un triunghi ABC este adevărată relație:
$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$. (10)

Demonstrație

Din relația (8), rezultă:
$\sin(A-\omega) = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \sin\omega$. (11)
Dar $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$, înlocuim în (11), găsim:
$\sin(A-\omega) = \frac{\sin^2 A \cdot \sin\omega}{\sin B \cdot \sin C}$.
Dezvoltăm: $\sin(A-\omega) = \sin A \cdot \sin\omega - \sin\omega \cdot \cos A$.
Avem: $\sin A \cdot \cos\omega - \sin\omega \cdot \cos A = \frac{\sin^2 A \cdot \sin\omega}{\sin B \cdot \sin C}$. (12)

Împărțim relația (12) prin $\sin A \cdot \sin\omega$ și ținând cont că $\sin A = \sin(B+C)$, iar $\sin(B+C) = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$, obținem relația (10).

Observația 59

Din (10), se obține că:
$\tan\omega = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$ (13)

Lema 9

Dacă în triunghiul ABC, K este centru simedian și K_1 este proiecția lui K pe BC, atunci:

$KK_1 = \frac{1}{2} a \cdot \tan\omega$.

Demonstrație

Dacă AA_2 și CC_2 sunt simediane aplicând în Teorema lui Menelaus în triunghiulAA_2B și ținând cont de $\frac{BA_2}{CA_2}=\frac{c^2}{b^2}$ și $\frac{C_2A}{C_2B}=\frac{b^2}{a^2}$ se obține că $\frac{AK}{KA_2}=\frac{b^2+c^2}{a^2}$, iar de aici $\frac{AA_2}{KA_2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}$.

Dar $\frac{AA_2}{KA_2}=\frac{h_a}{KK_1}$ (h_a este înălțimea din A a triunghiului ABC).

Din $\frac{h_a}{KK_1}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}$, cum $h_a=\frac{2S}{a}$, rezultă $KK_1=\frac{1}{2}a\cdot\tan\omega$.

Observația 60

Dacă K_2, K_3 sunt proiecțiile lui K pe AC și AB, atunci are loc relația:
$\frac{KK_1}{a}=\frac{KK_2}{b}=\frac{KK_3}{c}=\frac{1}{2}\tan\omega$.

Lema 10

În triunghiul ABC cevienele lui Brocard $B\Omega$ și $C\Omega'$ se intersectează în punctul A_1 (vârf al primului triunghi Brocard).

Demonstrație

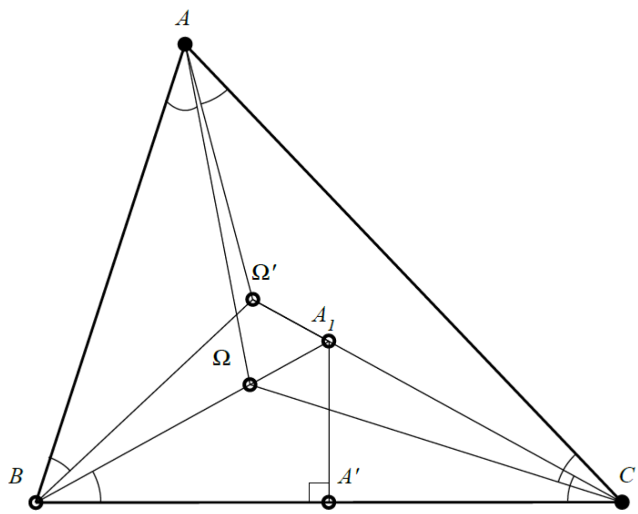


Figura 86

Fie $\{A_1'\} = B\Omega \cap C\Omega'$ (vezi *Figura 86*). Deoarece $\sphericalangle A_1'BC \equiv \sphericalangle A_1'CB = \omega$, rezultă că triunghiul $BA_1'C$ este isoscel dacă $A_1'A' \perp BC$ (A' este mijlocul lui BC). Mai mult, având: $A_1'A' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \tan\omega$, deci $A_1'A' = KK_1$, rezultă că $A_1' = A_1$.

Lema 11

Fie ABC un triunghi și $A_1B_1C_1$ primul triunghi Brocard al său. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt izotomicele simedianelor AA_2, BB_2, CC_2.

Demonstrație

Notăm $B\Omega \cap AC = \{B''\}$, $C\Omega' \cap AB = \{C'''\}$ și $AA_1 = \{A_2'\}$.

Cum $B\Omega$, $C\Omega'$ și AA_1 sunt concurente, aplicând *Teorema lui Ceva*, avem că: $\frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{C'''A}{C'''B} \cdot \frac{A_2'B}{A_2'C} = 1$, dar $\frac{CB''}{B''A} = \frac{a^2}{b^2}$și $\frac{C'''A}{C'''B} = \frac{c^2}{a^2}$, obținem că: $\frac{A_2'B}{A_2'C} = \frac{b^2}{c^2}$. Deoarece AA_2 este simediană și $\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{c^2}{b^2}$, rezultă că punctele A_2 și A_2' sunt simetrice față de mijlocului luiA' al lui BC, deci AA_2' este izotomica simedianeiAA_2, analog avem că BB_2' și CC_2' sunt izotomicele simedianelor BB_2 respectiv CC_2.

Finalizăm acum etapa a 2-a a demonstrației. Se știe că izotomicele unor ceviene concurente într-un triunghi sunt ceviene concurente și, cum AA_1, BB_1, CC_1 sunt izotomicele simedianelor, rezultă că ele sunt concurente și, în consecință, triunghiul ABC și primul său triunghi Brocard $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri omologice. Centrul acestor omologii este notat, în unele lucrări, Ω'', și este denumit al treilea punct al lui Brocard.

Remarca 20

Teorema lui Sondat implică coliniaritatea punctelor: O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC, T – punctul lui Tary și Ω'' – al treilea punct Brocard al triunghiului ABC.

6.2.2 Un triunghi și triunghiul lui Neuberg al său

Definiția 40

Două triunghiuri care au același unghi al lui Brocard se numesc *triunghiuri echibrocardiene*.

Observația 61

a) Două triunghiuri asemenea sunt triunghiuri echibrocardiene.
b) Un triunghi dat și primul triunghi Brocard al său sunt triunghiuri echibrocardiene.

Teorema 30

Locul geometric al punctelor M din plan situate de aceeași parte a laturii BC a unui triunghi ABC dat, care are proprietatea că triunghiul MBC este echibrocardian cu ABC este un cerc cu centru N_a situat pe mediatoarea laturii BC, astfel încât $m(\sphericalangle BN_aC) = 2\omega$ și de rază $n_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\cot^2 \omega - 3}$ (cercul lui Neuberg – 1882).

Demonstrație

Fie ABC triunghiul dat (vezi *Figura 87*). Începem demonstrația construind câteva puncte ale locului geometric în ideea de a “identifica” forma locului. Este clar că punctul lui Brocard al unui triunghi echibrocardian cu ABC poate fi considerat pe semidreapta $(B\Omega$. Alegem Ω' intersecția dintre $(B\Omega$ și mediatoarea laturii BC.

Construim locul geometric al punctelor M din semiplanul de frontieră BC și care conține punctul A, din care segmentul $B\Omega'$ “se vede”sub un unghi de măsură ω. Acest loc geometric este cercul de centru O' - intersecția mediatoarei segmentului $B\Omega'$ cu perpendiculară în B pe BC și având ca rază $O'B$.

Construim acum o secantă la acest cerc, CM_1, astfel încât $m\left(\widehat{\Omega' CM_1}\right) = \omega$, fie M_2 al doilea punct de intersecție al acestei secante cu cercul $\mathcal{C}(O'; O'B)$. Triunghiurile M_1BC și M_2BC au același punct Brocard Ω' și același unghi ω, deci sunt echibrocardiene cu ABC, așa că punctele M_1, M_2 aparțin locului geometric căutat. Avem acum trei puncte ale locului geometric căutat, A, M_1, M_2. Evident, putem construi simetrica acestei figuri față de mediatoarea segmentului BC și mai obținem alte trei puncte, A', M'_1, M'_2. Este posibil ca locul geometric căutat să fie un cerc și centrul său să fie, din motive de simetrie situat pe mediatoarea segmentului BC. Notăm cu N_a intersecția acestei mediatoare cu cercul $\mathcal{C}(O'; O'B)$. Vom demonstra că N_a este centrul cercului – loc geometric – cercul lui Neuberg. Avem $\sphericalangle BN_a\Omega' = \omega$, de asemenea $\sphericalangle O'BN_a = \omega$ $(O'B \parallel N_a\Omega')$. Triunghiul $O'BN_a$ este isoscel, prin urmare $\sphericalangle O'N_aB = \omega$.

Din motive de simetrie, avem că și $\sphericalangle CN_a\Omega' = \omega$, în consecință N_a este un punct fix situat pe mediatoarea $N\Omega'$ a lui BC, deoarece $m\left(\widehat{BN_aC}\right) = 2\omega$. Arătăm că $N_aM_1 = N_aM_2$.

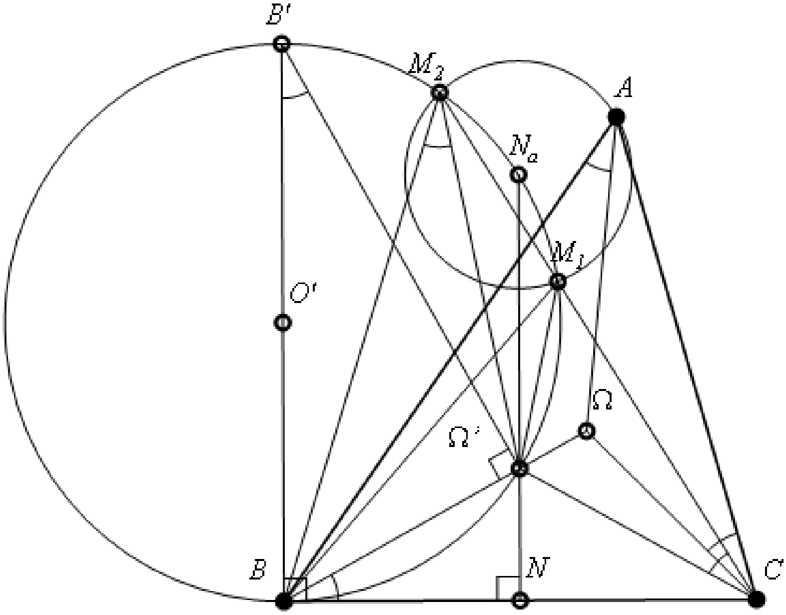


Figura 87

Notăm cu I intersecția dintre CM_1 și$\Omega' N_a$ și cu J intersecția dintre CM_1 și $O'N_a$; deoarece $m\left(\widehat{NCI}\right) = 2\omega$ și $\sphericalangle NIC \equiv \sphericalangle N_aIJ$, iar $m\left(\widehat{JN_aN}\right) = 2\omega$, rezultă că $N_aO' \perp M_1M_2$ și, în consecință: $N_aM_1 = N_aM_2$.

Demonstrăm acum că $N_aA = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{\cot^2\omega - 3}$. Notăm P proiecția lui A pe N_aN, și avem:

$N_aA^2 = AN^2 + NN_a{}^2 - 2NN_a \cdot PN$(*Teorema lui Pitagora generalizată*).

Din *Teorema medianei* în triunghiul ABC, avem:

$4AN^2 = 2\left(b^2 + c^2\right) - a^2$, apoi$NN_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cot\omega$.

Am stabilit că: $\cot\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Aria$\Delta MBC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot MN \cdot \cos\left(\widehat{MNN_a}\right)$.

Din *Teorema cosinusului* aplicată în triunghiul MNN_a, avem:
$M_a^2 = MN^2 + N_aN^2 - 2MNNN_a \cdot \cos(\widehat{MNN_a})$.
Am stabilit că: $N_aN = \frac{1}{2}a \cdot \cot\omega$.
Înlocuind în formula precedentă, avem:
$n_a^2 = NM^2 + \frac{1}{4}a^2 \cdot \cot^2\omega - a \cdot \cot\omega \cdot \frac{2MN^2+\frac{3}{2}a^2}{2a\cdot\cot\omega}$.
Raza cercului Neuberg: $n_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\cot^2\omega - 3}$.
Avem:
$\frac{1}{4}a^2 \cdot \cot^2\omega - \frac{3}{4}a^2 = MN^2 + \frac{1}{4}a^2 \cdot \cot^2\omega - \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{\cot\omega}{\cot\omega'} - \frac{\cot\omega}{\cot\omega'} \cdot MN^2$.
Rezultă:
$\frac{\cot\omega' - \cot\omega}{\cot\omega}\left(MN^2 + \frac{3}{4}a^2\right) = 0$.
Din această relație, obținem $\cot\omega' = \cot\omega$, ceea ce implică $\omega' = \omega$.

Remarcă 21

Dacă reformulăm enunțul *Teoremei 30* astfel: Aflați locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC cu proprietatea că triunghiurile cu un vârf în M și celelalte două să fie vârfuri ale triunghiului dat și să aibă același unghi Brocard ca și ABC; răspunsul va fi dat pe aceeași cale ca mai înainte, însă există 6 cercuri Neuberg (câte două simetrice față de fiecare latură a triunghiului dat).

Observăm că $2S = a \cdot PN$, deci notând $AN = m_a$ avem: $\cot\omega = \frac{3a^2+4m_a^2}{4a\cdot PN}$.
$N_aA^2 = m_a^2 + \frac{1}{4}a^2 \cdot \cot^2\omega - a \cdot \cot\omega \cdot \frac{3a^2+4m_a^2}{4a\cdot\cot\omega}$.
Obținem: $N_aA = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{\cdot \cot^2\omega - 3}$.

Am demonstrat că orice vârf de triunghi echibrocardian cu ABC și care are latura BC comună cu ABC aparține cercului Neuberg $\mathcal{C}(N_a;\ n_a)$.

Demonstrăm reciproc, adică orice punct M ce aparține cercului $\mathcal{C}(N_a;\ n_a)$ este vârful unui triunghi MBC echibrocardian cu triunghiul dat ABC.

Notăm ω' unghiul Brocard al triunghiului MBC (vezi *Figura 88*), $M \in \mathcal{C}(N_a;\ n_a)$, atunci $\cot\omega' = \frac{MB^2+MC^2+BC^2}{4\cdot\text{Aria}\Delta MBC}$.

Din *Teorema medianei* aplicată în triunghiul MBC, reținem:
$MB^2 + MC^2 = 2MN^2 + \frac{a^2}{4}$.

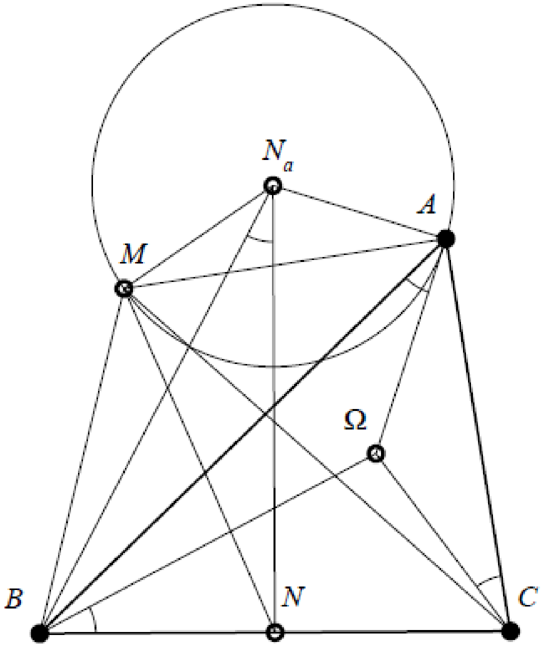


Figura 88

Definiția 41

Numim triunghiul lui Neuberg al unui triunghi ABC dat, triunghiul $N_aN_bN_c$ format de centrele cercurilor Neuberg (situate în semiplanele determinate de o latură și de un vârf al triunghiuluiABC).

Teorema 31

Triunghiul ABC și triunghiul său Neuberg $N_aN_bN_c$ sunt triunghiuri bilogice. Centrul omologiei este punctul lui Tarry al triunghiului ABC, iar un centrul de ortologie este O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație

Perpendicularele duse din N_a, N_b, N_c pe laturile triunghiului ABC sunt mediatoarele acestuia, prin urmare O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC este centru de ortologie al triunghiului lui Neuberg în raport cu triunghiul ABC. În *Propoziția 70*, am demonstrat că perpendicularele duse din A, B, C pe laturile primului triunghi al lui Brocard sunt concurente în punctul lui Tarry, T, al triunghiului ABC. Pentru a demonstra că T este centru de omologie al triunghiurilor $N_aN_bN_c$ și ABC, este suficient să demonstrăm că punctele N_a, A, T;N_b, B, T;N_c, C, T sunt coliniare.

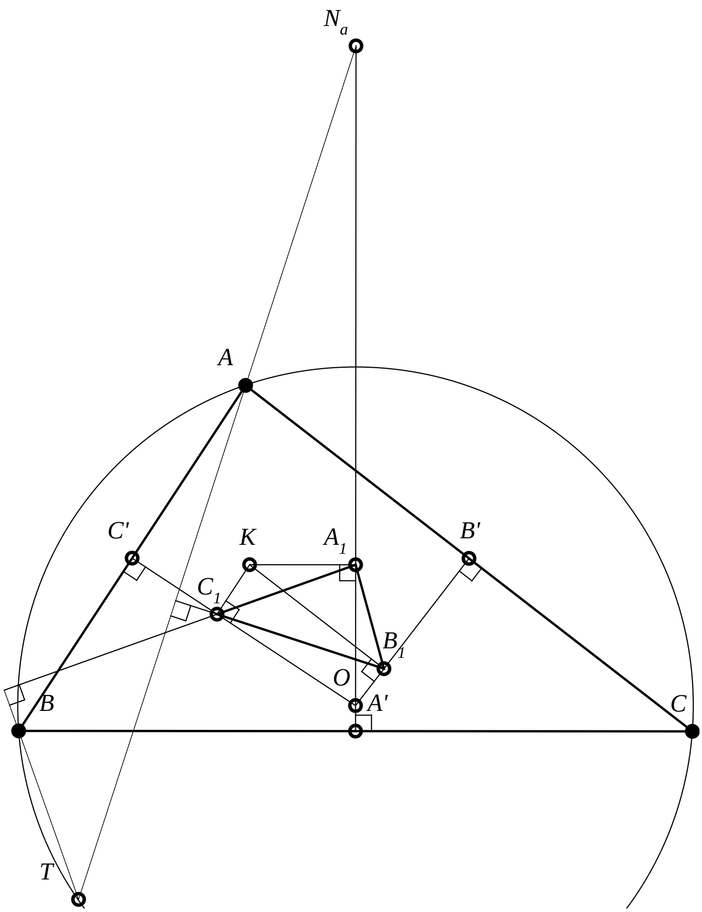


Figura 89

Condiția N_a, A, T coliniare este echivalentă cu $N_aA \perp B_1C_1$, adică cu $\overrightarrow{AN_a} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0$; $\overrightarrow{AN_a} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'N_a}$;$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C_1}$; $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$; $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AN_a} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'N_a}\right)\left(\overrightarrow{B_1B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C_1}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B_1B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B_1B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C'C_1} + \overrightarrow{A'N_a} \cdot \overrightarrow{B_1B'} + \overrightarrow{A'N_a} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{A'N_a} \cdot \overrightarrow{C'C_1}$.

Dar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C_1} = 0$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B_1B'} = 0$; $\overrightarrow{A'N_a} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B_1B'} = -\frac{1}{4}bc \cdot \tan\omega \cdot \sin A$,

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C'C_1} = \frac{1}{4}bc \cdot \tan\omega \cdot \sin A$,

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{4}ac \cdot \cos B$,

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{4}ab \cdot \cos C$,

$\overrightarrow{A'N_a} \cdot \overrightarrow{B_1B'} = \frac{1}{4}ab \cdot \cos C$,

$\overrightarrow{A'N_a} \cdot \overrightarrow{C'C_1} = \frac{1}{4}ac \cdot \cos B$.

Obținem astfel că $\overrightarrow{AN_a} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0$. Similar, arătăm că punctele N_b, B, T;N_c, C, T sunt coliniare.

Remarca 22

Triunghiul lui Neuberg și primul triunghi Brocard ale unui triunghi dat sunt *triunghiuri bilogice*. Centrul omologiei este centrul cercului circumscris triunghiului dat, iar unul dintre centrele de ortologie este punctul lui Tarry al triunghiului dat.

Teorema 32

Dacă ABC este un triunghi dat, $N_aN_bN_c$ este triunghiul său Neuberg, iar $A_1B_1C_1$ este primul său triunghi Brocard, atunci: aceste triunghiuri sunt două câte două bilogice, au aceeași axă de ortologie și aceeași axă de omologie.

Demonstrație

Am remarcat că punctele O, T, Ω'' sunt coliniare; aplicând *Teorema 19* din [24], rezultă că triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$, $N_aN_bN_c$ au două câte două aceeași axă de omologie. Dacă notăm cu U centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $N_aN_bN_c$ și cu V centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu $N_aN_bN_c$, atunci, conform *Teoremei lui Sondat*, rezultă că axa de ortologie a triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$, adică OT, este perpendiculară pe axa de omologie a lor.

Deoarece O este centru de ortologie al triunghiurilor $N_aN_bN_c$ și ABC, înseamnă că axa de ortologie a acestora este perpendiculara din O pe axa lor de omologie, prin urmare coincide cu OT, iar axa de ortologie a triunghiurilor $N_aN_bN_c$ și $A_1B_1C_1$, trecând prin T și fiind perpendiculară pe axa de omologie, este tot OT. *Teorema lui Sondat* implică coliniaritatea punctelor T, O, Ω'', U și V.

6.2.3 Un triunghi și triunghiul ce determină pe laturile sale trei antiparalele congruente

Teorema 33 (R. Tucker)

Trei antiparalele congruente în raport cu laturile unui triunghi determină pe aceste laturi șase puncte conciclice.

Demonstrație

Fie (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2) cele trei antiparalele respectiv la laturile BC, CA, AB, congruente (vezi *Figura 90*).

Notăm A_3, B_3, C_3 intersecția perechilor de antiparalele $(B_1B_2;\ C_1C_2)$, $(C_1C_2;\ A_1A_2)$ și $(A_1A_2;\ B_1B_2)$. Triunghiurile $A_3B_1C_2$; $B_3C_1A_2$; $C_3B_2A_1$ sunt isoscele. Într-adevăr, $\sphericalangle BB_1B_2 \equiv \sphericalangle A$ și $\sphericalangle C_1C_2C \equiv \sphericalangle A$, deci $\sphericalangle C_1C_2C \equiv \sphericalangle BB_1B_2$. Aceste unghiuri fiind opuse la vârf cu $\widehat{A_3C_2B_1}$ și $\widehat{A_3B_1C_2}$, obținem că triunghiul $A_3B_1C_2$ este isoscel. Analog, se demonstrează că triunghiurile $B_3C_1A_2$ și $C_3B_2A_1$ sunt isoscele. Obținem că bisectoarele triunghiului $A_3B_3C_3$ sunt mediatoarele segmentelor (B_1C_2); (C_1A_2); (A_1B_2).

Fie T intersecția acestor bisectoare (centrul cercului înscris în triunghiul $A_3B_3C_3$), avem relațiile $TB_1 = TC_2$; $TC_1 = TA_2$; $TB_2 = TA_1$. Triunghiurile TB_1A_3 și TC_2A_3 sunt congruente (L.L.L.), rezultă că $\sphericalangle TB_1A_3 \equiv \sphericalangle TC_2A_3$, cu consecința $\sphericalangle TB_1B_2 \equiv \sphericalangle TC_2C_1$. Această relație, împreună cu $B_1B_2 = C_1C_2$ și $TB_1 = TC_2$, conduc la $\Delta TB_1B_2 \equiv \Delta TC_2C_1$, prin urmare $TB_2 = TC_1$.

Analog, rezultă că $\Delta TA_2A_1 \equiv \Delta TC_1C_2$, cu consecința $TA_1 \equiv TC_2$.

Asfel obținem că: $TA_1 = TA_2 = TB_1 = TB_2 = TC_1 = TC_2$, ceea ce ară că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt pe un cerc cu centrul T. Acest cerc se numește cercul lui Tucker.

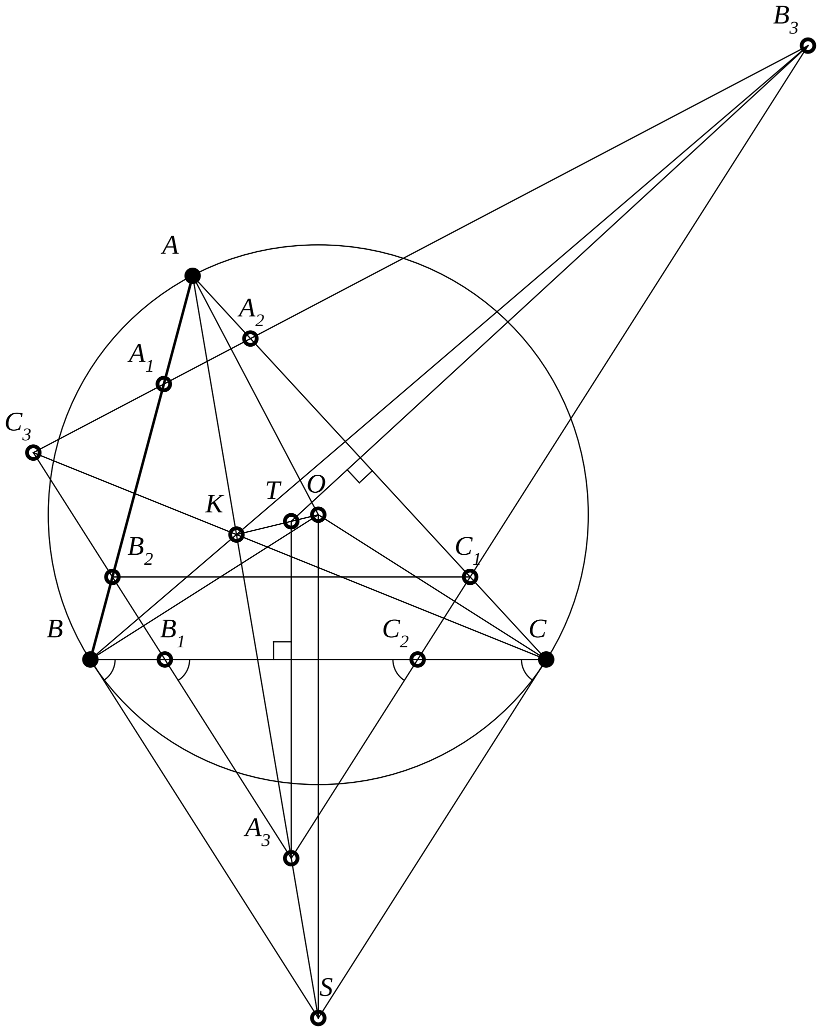


Figura 90

Teorema 34

Triunghiurile ABC și $A_3B_3C_3$ sunt bilogice. Centrul omologiei este centrul simedian K al triunghiului ABC, iar centrele de ortologie sunt centrul cercului Tucker, T, și centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație

Construim tangentele în B și C la cercul circumscris triunghiului ABC și notăm cu S intersecția lor. Se știe că AS este simediană în triunghiul ABC. Demonstrăm că punctele A, A_3, S sunt coliniare (vezi *Figura 91*). Într-adevăr, deoarece $B_1C_2C_1B_2$ este trapez isoscel avem că $B_2C_1 \parallel BC$, pe de altă parte BS este antiparalelă la AC, deci $BS \parallel B_2A_3$, analog $CS \parallel C_1A_3$. Triunghiurile $A_3C_1B_2$ și SCB au laturile respectiv paralele, prin urmare ele sunt omotetice, deoarece $\{A\} = BB_2 \cap CC_1$, rezultă că centrul omotetiei este A, în consecință punctele A, A_3, S sunt coliniare, adică AA_3 este simediană în triunghiul ABC, analog rezultă că BB_3 și CC_3 sunt celelalte simediane, deci ele sunt concurente în K centrul simedian.

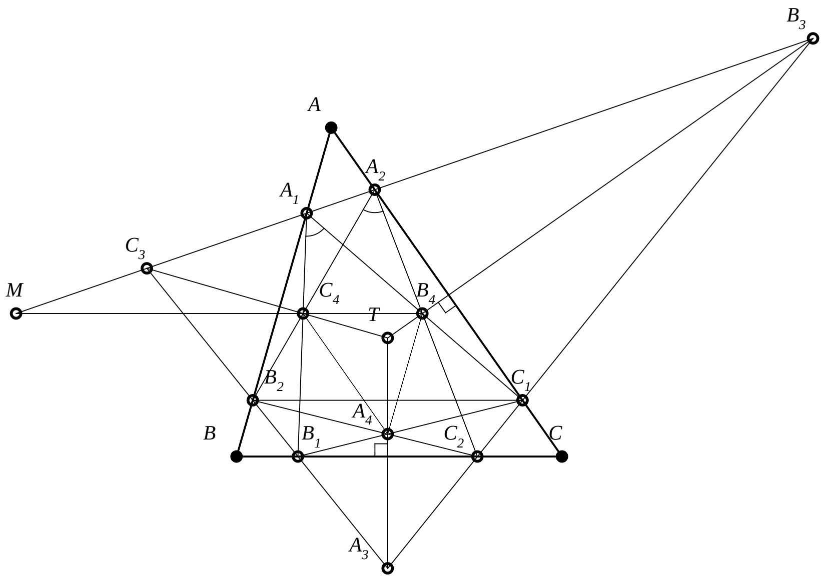


Figura 91

Acest punct este centrul omologiei triunghiurilor ABC și $A_3B_3C_3$. Am observat că perpendicularele din A_3, B_3, C_3 pe BC, CA, AB sunt bisectoarele triunghiului $A_3B_3C_3$, deci acestea sunt concurente în T – centrul cercului Tucker. Acest punct este centru de ortologie al triunghiului $A_3B_3C_3$ în raport cu ABC. Perpendicularele din A, B, C pe antiparalelele B_3C_3, C_3A_3, A_3B_3 vor fi de asemenea concurente.

Deoarece aceste antiparalele sunt paralele cu tangentele duse din A, B respectiv C la cercul circumscris înseamnă că perpendicularele duse în A, B, C pe tangente trec prin O centrul cercului circumscris și acest punct este în consecință centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A_3B_3C_3$.

Remarcă 23

1. Omologia triunghiurilor ABC și $A_3B_3C_3$ se poate demonstra și cu ajutorul *Teoremei lui Pascal* relativă la un hexagon înscris (vezi [24]). Într-adevăr, aplicând această teoremă în hexagonul înscris $A_1A_2C_1C_2B_1B_2$, obținem că laturile opuse acestuia, adică A_1A_2 și BC; B_1B_2 și AC; C_1C_2 și AB se intersectează respectiv în punctele M, N, P, și acestea sunt puncte coliniare. Ele determină axa de omologie a triunghiurilor ABC și $A_3B_3C_3$; conform Teoremei lui Desargues, rezultă că dreptele AA_3, BB_3, CC_3suntconcurente.
2. Din *Teorema lui Sondat*, obținem că punctele K, O, T sunt coliniare. Tot din această teoremă, obținem că OK este perpendiculară pe axa de omologie a triunghiurilor ABC și $A_3B_3C_3$.

Propoziția 71

Triunghiul $A_3B_3C_3$ și triunghiul $A_4B_4C_4$ format de intersecțiile diagonalelor trapezelor $B_1C_2C_1B_2$; $C_2C_1A_2A_1$; $A_1B_2B_1A_2$ sunt omologice. Centrul lor de omologie este T, centrul cercului Tucker, iar dreapta determinată de T și de centrul cercului circumscris triunghiului $A_4B_4C_4$ este perpendiculară pe axa de omologie a triunghiurilor.

Demonstrație

Patrulaterul $A_1A_2B_1B_2$ este trapez isoscel, iar triunghiul $C_3A_1A_2$ este isoscel; rezultă că C_3C_4 este mediatoarea segmentului A_1B_2, prin urmare ea trece prin T, centrul cercului Tucker al triunghiului ABC (vezi *Figura 92*).

Analog, A_3A_4 și B_3B_4 trec prin T, prin urmare centrul cercului Tucker al triunghiului ABC este centru de omologie al triunghiurilor$A_3B_3C_3$și$A_4B_4C_4$.

Notăm:

$\{L\} = A_3B_3 \cap A_4B_4$,

$\{M\} = B_3C_3 \cap B_4C_4$,

$\{N\} = A_3C_3 \cap A_4C_4$.

Conform *Teoremei lui Desargues,* punctele M, N, P sunt coliniare și ele aparțin axei de omologiei a triunghiurilor anterior evidențiate.

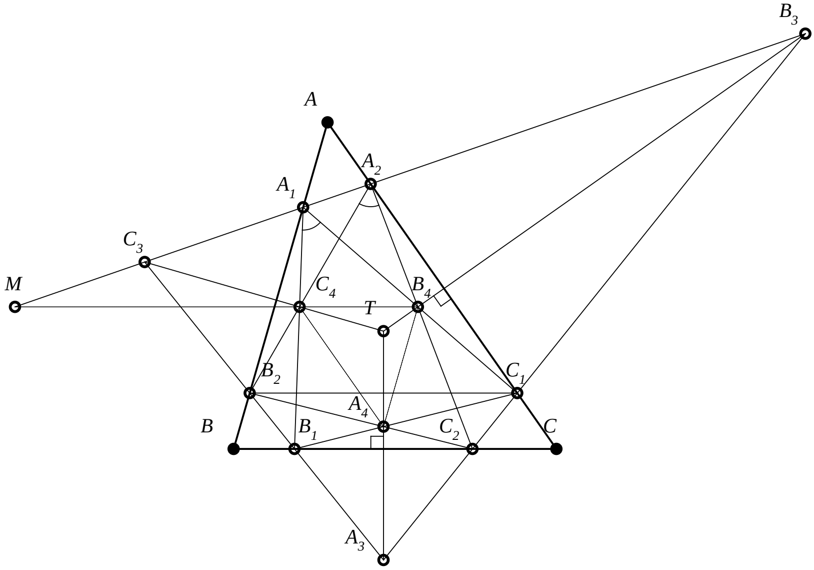


Figura 92

Deoarece $\widehat{C_4A_1B_4} \equiv \widehat{C_4A_2B_4}$ (subîntind arce congruente în cercul lui Tucker), rezultă că patrulaterul $A_1A_2B_4C_4$ este inscriptibil, avem $MA_1 \cdot MA_2 = MC_4 \cdot MB_4$, deci punctul M are puteri egale față de cercului lui Tucker și față de cercul circumscris triunghiului $A_4B_4C_4$, așa că el aparține axei radicale a acestor cercuri. Analog, se arată că punctele L și N aparțin aceleiași axe radicale.

6.2.4 Un triunghi și triunghiul proiecțiilor centrului cercului înscris pe mediatoarele sale

Teorema 35

Fie ABC un triunghi oarecare și fie $A'B'C'$ triunghiul determinat de proiecțiile centrului cercului înscris I în triunghiul ABC pe mediatoarele sale. Atunci, triunghiurile ABC și $A'B'C'$sunt bilogice.

Demonstrație

Vom demonstra pe cale vectorială că centrul de omologie al triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ este punctul N al lui Nagel. Avem:

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA'} = \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{b-c}{2a} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{b-c}{2a} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Am considerat triunghiul ABC cu $AB \leq AC$ și am ținut seama că:$AI = \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{AC}$, iar $\overrightarrow{IA'} = \alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, și dacă C_a este proiecția lui I pe BC.

M_a mijlocul lui (BC), având $BC_a = p - b$ și $BM_a = \frac{a}{2}$, găsim $C_aM_a = \frac{b-c}{2a}$, deci $\alpha = \frac{b-c}{2a}$.

$\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{b}{2p} - \frac{b-c}{2a}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{2p} + \frac{b-c}{2a}\right)\overrightarrow{AC}$.

Fie $\{D_a\} = AA' \cap BC$, avem:

$\overrightarrow{AD_a} = \lambda \frac{ab-p(b-c)}{2ap}\overrightarrow{AB} + \lambda \frac{ac+p(b-c)}{2ap}\overrightarrow{AC}$.

Pe de altă parte, $\overrightarrow{D_aC} = \mu\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

Scalarii λ și μ sunt astfel încât:

$\overrightarrow{D_aC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD_a}$, deci:

$\mu\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC} - \lambda \frac{ab-p(b-c)}{2ap}\overrightarrow{AB} - \lambda \frac{ac+p(b-c)}{2ap}\overrightarrow{AC}$.

Rezultă:

$\left(\mu - 1 + \lambda \frac{ac+p(b-c)}{2ap}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\lambda \frac{ab-p(b-c)}{2ap} - \mu\right)\overrightarrow{AB} = 0$.

Vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ fiind necoliniari, rezultă că:

$\mu - 1 + \lambda \frac{ac+p(b-c)}{2ap} = 0$,

$-\mu + \lambda \frac{ab-p(b-c)}{2ap} = 0$.

Găsim: $\lambda = \frac{p}{b+c}$ și $\mu = \frac{p-b}{a}$, în consecință $\overrightarrow{D_aC} = \frac{p-b}{a} \cdot \overrightarrow{BC}$, deci $D_aC = p - b$, iar iar punctul D_a este izotomicul lui C_a (contactul cercului înscris cu BC), prin urmare AD_a trece prin punctul N al lui Nagel.

Analog, se arată că $\overrightarrow{BB'}$ și $\overrightarrow{CC'}$ trec prin N. Evident, triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt ortologice, și centrul de ortologie este O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Conform teoremei triunghiurilor ortologice, rezultă că și perpendicularele duse din A, B, C respectiv pe $B'C'$, $C'A'$ și $A'B'$ sunt concurente. Notăm acest centru de ortologie cu Φ și arătăm că Φ aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

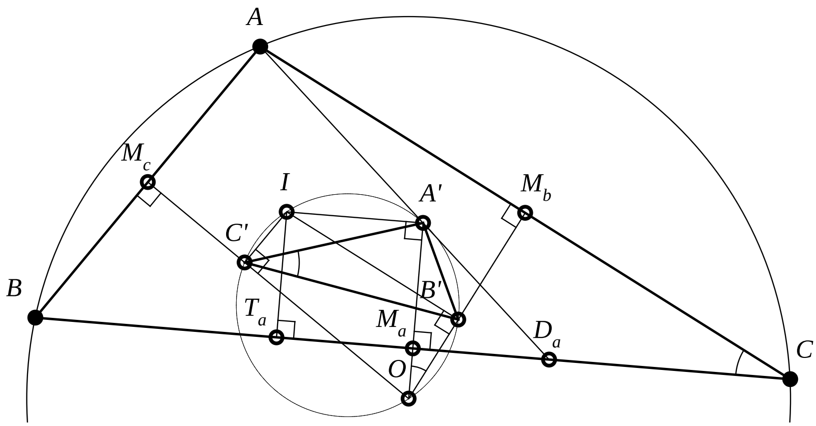


Figura 93

Avem $\sphericalangle B\Phi A = 180^0 - \sphericalangle A'C'B'$. Pe de altă parte, punctele A', B', C' aparțin cercului de diametru OI, deci: $\sphericalangle A'C'B' \equiv -\sphericalangle A'IB'$, iar acesta din urmă are laturile perpendiculare pe mediatoarele laturilor BC și AC și, prin urmare, este congruent cu $\sphericalangle BCA$.

Având $m\left(\widehat{B\Phi A} = 180^0 - m(\hat{C})\right)$, înseamnă că patrulaterul $A\Phi BC$ este inscriptibil, deci Φ aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

Teorema lui Sondat implică coliniaritatea punctelor N, O, Φ.

Remarca 24

În triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC, cercul circumscris triughiului ABC este cercul celor 9 puncte, iar N – punctul lui Nagel, este centrul cercului înscris în triunghiul anticomplementar.

Din *Teorema lui Feuerbach* (vezi [15]), aceste cercuri sunt tangente, punctul de tangență fiind chiar punctul Φ (centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A'B'C'$) – numit și *punctul lui Feuerbach*.

Coliniaritatea punctelor N, O, Φ evidențiată mai înainte și faptul că cercurile menționate sunt tangente interioare conduc la $ON = R - 2r$.

6.2.5 Un triunghi și triunghiul proiecțiilor centrelor cercurilor exînscrise pe mediatoarele sale

Propoziția 72

Fie ABC un triunghi dat și $A'B'C'$ triunghiul ale cărui vârfuri sunt proiecțiile centrelor I_a, I_b, I_c ale cercurilor exînscrise respectiv pe mediatoarele laturilor(BC), (CA) și(AB).

Atunci triunghiurile ABC și $A'B'C'$sunt bilogice. Centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $A'B'C'$aparține dreptei ΓO (Γ este punctul lui Gergonne al triunghiului ABC și O centrul cercului său circumscris).

Demonstrație

Fie C_a și D_a proiecțiile centrelor I și I_a pe BC (vezi *Figura 94*).

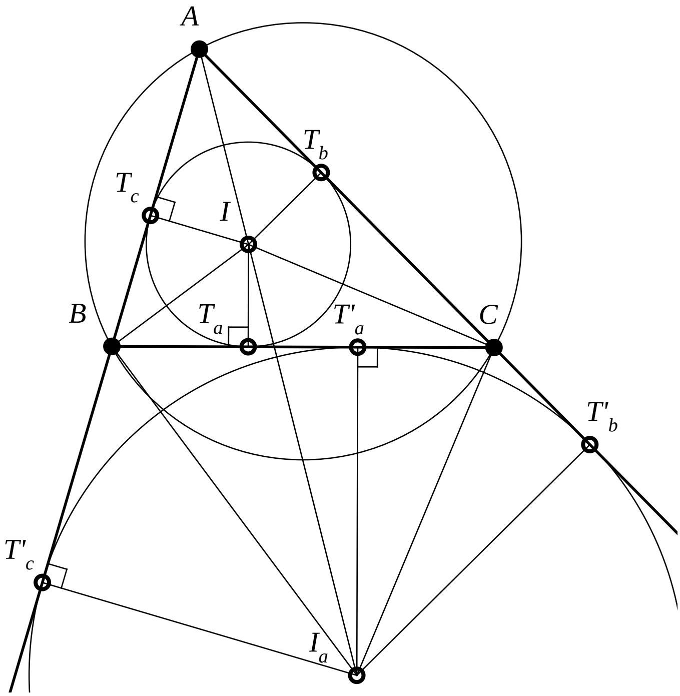


Figura 94

Aceste puncte sunt izotomice. Cercul înscris și cercul A-exînscris sunt omotetice prin omotetie de centru A și de raport $\frac{IC_a}{ID_a}$. Notăm cu D'' diametrul lui D_a în cercul A-exînscris; avem că C_a și D'' sunt puncte omotetice, deci A, C_a, D'' sunt coliniare. Punctul A', proiecția lui I_a pe mediatoarea laturii BC, este chiar mijlocul segmentului C_aD'' pentru că OA' conține linia mijlocie a triunghiului dreptunghic C_aD_aD'', prin urmare A' aparține cevienei Gergonne AC_a, analog B' și C' aparțin cevienelor Gergonne BB_a, CC_a. Cum aceste ceviene sunt concurente în Γ(punctul lui Gergonne), rezultă că acest punct de centrul de omologie al triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.

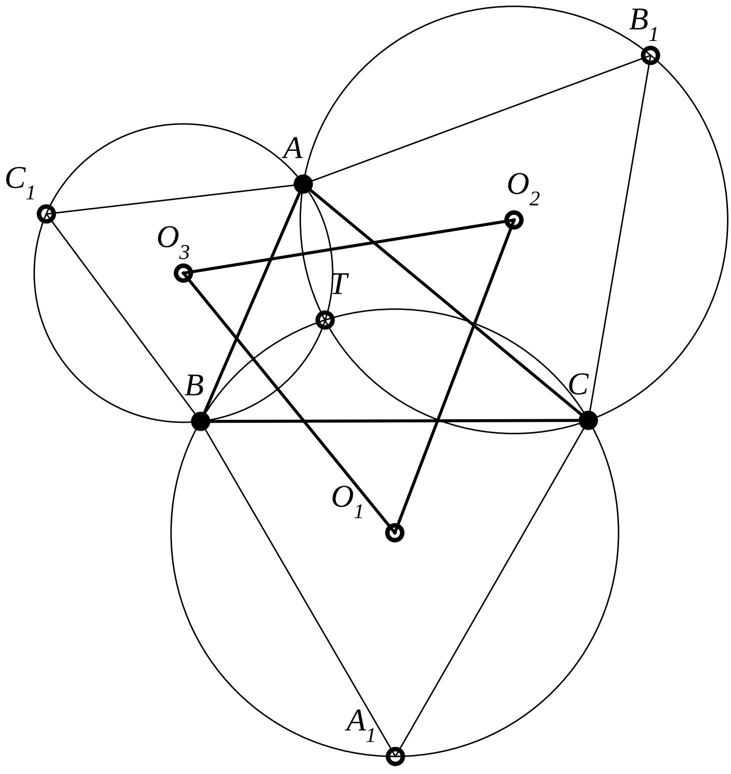


Figura 95

Evident, triunghiul $A'B'C'$ este ortologic în raport cu ABC și centrul de ortologie este O. Din *Teorema lui Sondat*, rezultă că centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $A'B'C'$ aparține dreptei ΓO.

6.2.6 Un triunghi și triunghiul lui Napoleon al său

Definiția 42

Dacă ABC este un triunghi și în exteriorul său construim triunghiurile echilaterale BCA_1', CAB_1', ABC_1' spunem despre triunghiul $O_1O_2O_3$ care are ca vârfuri centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale construite că este triunghiul exterior al lui Napoleon corespunzător triunghiului ABC.

Observația 62

În *Figura 95*, triunghiul exterior al lui Napoleon este $O_1O_2O_3$.

Definiția 43

Cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale BCA_1, CAB_1, ABC_1 se numesc *cercurile lui Toricelli*.

Definiția 44

Triunghiul $O_1'O_2'O_3'$ determinat de centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale BCA_1', CAB_1', ABC_1' construite pe laturile triunghiului ABC spre interiorul acestuia se numește *triunghiul interior al lui Napoleon*.

Teorema 36

Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exteriorul acestuia triunghiurile echilaterale BCA_1, CAB_1, ABC_1; atunci:

i) Cercurile lui Toricelli se intersectează într-un punct T;
ii) Triunghiul exterior al lui Napoleon este echilateral;
iii) $AA_1 = BB_1 = CC_1$;
iv) Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt bilogice.

Demonstrație

i) Notăm T al doilea punct de intersecție a cercurilor Toricelli circumscrise triunghiurilor ABC_1 și ACB_1. Avem $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{ATC}) = 120^0$; presupunând că T se află în interiorul triunghiului ABC, rezultă că și

$m(\widehat{BTC}) = 120^0$, în consecință patrulaterul $BTCA_1$ este inscriptibil și, ca atare, T aparține cercului circumscris triunghiului echilateral BCA_1.

Observația 63

a) Dacă$m(\widehat{BAC}) > 120^0$, atunci T este în exteriorul triunghiului și $m(\widehat{BTA}) = m(\widehat{CTA}) = 60^0$; rezultă că $m(\widehat{BTC}) = 120^0$, deci T aparține cercului Toricelli circumscris lui BCA_1.

b) În cazul în care $m(\widehat{BAC}) = 120^0$, punctul T coincide cu vârful A.

c) Punctul T se numește *punctul Toricelli-Fermat* al triunghiului ABC.

ii) Dacă măsurile unghiurilor triunghiului ABC sunt mai mici decât 120^0, atunci: $m(\widehat{B_1AC_1}) = 120^0 + A$, $m(\widehat{A_1BC_1}) = 120^0 + B$, $m(\widehat{B_1CA_1}) = 120^0 + C$.

De asemenea: $m(\widehat{O_2AO_3}) = 60^0 + A$, $m(\widehat{O_1BO_3}) = 60^0 + B$ și $m(\widehat{O_1CO_2}) = 60^0 + C$.

Vom calcula laturile triunghiului lui Napoleon cu ajutorul *teoremei cosinusului*.

Avem: ${O_2O_3}^2 = O_3A^2 + O_2A^2 - 2O_3A \cdot O_2A \cdot \cos(60^0 + A)$.

Deoarece $O_3A = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, $O_2A = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $\cos(60^0 + A) = \frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$, avem ${O_2O_3}^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{bc}{3}\cos A + \frac{bc}{3} \cdot \sqrt{3}\sin A$.

Însă $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ și $bc \cdot \sin A = 2S$.

Obținem: ${O_2O_3}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{6}$.

Analog, ${O_3O_2}^2$ și ${O_2O_1}^2$ sunt date de aceeași expresie, prin urmare triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral.

iii) Considerăm T în interiorul triunghiului ABC, deciniciun unghi al triunghiului ABCnu are măsura mai mare sau egală cu 120^0. Avem $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{BTC}) = m(\widehat{CTA}) = 120^0$ (această proprietate face ca punctul T în acest caz să fie numit centru izogon al triunghiului ABC). Pe de altă parte, $m(\widehat{BTA_1}) = 60^0$, prin urmare$m(\widehat{ATB_1}) = 120^0 + 60^0 = 180^0$, deci punctele A, T, A_1 sunt coliniare (analog B, T, A_1 și C, T, A_1 sunt coliniare). Din relația Van Schooten, avem că $TB + TC = TA_1$, cum A, T, A_1 sunt coliniare, rezultă că $AA_1 = TA + TB + TC$, analog $BB_1 = CC_1 = TA + TB + TC$.

Observația 64

Se poate demonstra că $AA_1 = BB_1 = CC_1$ prin calcul direct cu *Teorema cosinusului*; se găsește că $AA_1{}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{2}$.

iv) Am demonstrat mai înainte că A, T, A_1; B, T, B_1; C, T, C_1 sunt coliniare; prin urmare, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt omologice, iar centrul omologiei este punctul lui Toricelli-Fermat, T.

Perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1pe BC, CA respectiv AB sunt mediatoarele acestor laturi, în consecință O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC este centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu ABC.

Teorema 37

Triunghiul ABC în care niciun unghi nu are măsura mai mare decât 120^0 și triunghiul său exterior al lui Napoleon sunt triunghiuri bilogice.

i) Centrele de ortologie sunt centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC și centrul izogon T al triunghiului ABC;

ii) Centrul de omologie aparține axei de ortologie și axa de ortologie este perpendiculară pe axa de omologie.

Demonstrație

i) Perpendicularele duse din O_1, O_2, O_3 pe BC, CA respectiv AB sunt mediatoarele acestor laturi; prin urmare, O este centrul de ortologie al triunghiului lui Napoleon $O_1O_2O_3$ în raport cu ABC.

Segmentele TA, TB, TC sunt coarde comune în cercurile Toricelli și, ca atare, O_2O_3 este mediatoarea lui $[TA]$, O_3O_1 este mediatoarea lui $[TB]$ și O_1O_2 este mediatoarea lui $[TC]$.

Rezultă că T este al doilea centru de ortologie al triunghiurilor evidențiate în enunț.

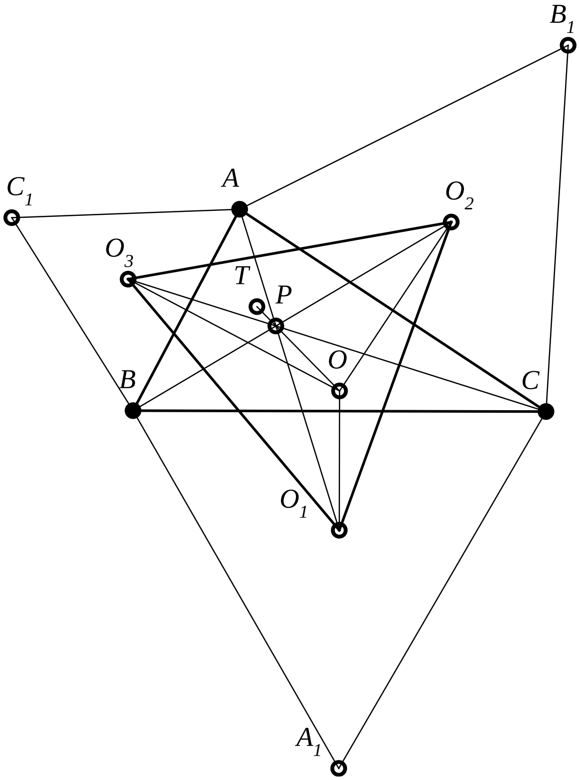


Figura 96

ii) Fie A', B', C' intersecțiile cevienelor AO_1, BO_2, CO_3 respectiv cu BC, CA, AB. Avem:

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{\text{Aria}\Delta(ABA')}{\text{Aria}\Delta(ACA')} = \frac{\text{Aria}\Delta(BO_1A')}{\text{Aria}\Delta(CO_1A')} = \frac{\text{Aria}\Delta(ABO_1)}{\text{Aria}\Delta(ACO_1)}.$$

Obținem:

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{AB \cdot BO_1 \cdot \sin(ABO_1)}{AC \cdot CO_1 \cdot \sin(ACO_1)} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin(B+30^0)}{\sin(C+30^0)}.$$

Analog:

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin(C+30^0)}{\sin(A+30^0)},$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin(A+30^0)}{\sin(B+30^0)}.$$

Din $\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1$ și reciproca *Teoremei lui Ceva*, obținem că AO_1, BO_2, CO_3 sunt concurente, prin urmare triunghiul ABC și triunghiul exterior al lui Napoleon, $O_1O_2O_3$, sunt omologice. Notăm cu P centrul acestei omologii.

Din *Teorema lui Sondat*, rezultă că punctele T, O, P sunt coliniare și că axa de ortologie OT este perpendiculară pe axa de omologie a triunghiurilor bilogice ABC și $O_1O_2O_3$.

Teorema 38

Pe laturile triunghiului dat ABC se construiesc triunghiurile echilaterale BCA_2, CAB_2, ABC_2 (ale căror interioare intersectează interiorul triunghiului ABC). Atunci:

i) Cercurile circumscrise acestor triunghiuri echilaterale au un punct comun T'.

ii) Triunghiul interior al lui Napoleon, $O_1'O_2'O_3'$, este echilateral.

iii) $AA_2 = BB_2 = CC_2$.

iv) Triunghiurile ABC și $A_2B_2C_2$ sunt triunghiuri bilogice.

Demonstrație

i) Fie T' cel de-al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor ACB_2 și ABC_2 (vezi *Figura 97*).

Avem: $m\left(\widehat{BT'C}\right) = 60^0$ și $m\left(\widehat{AT'C}\right) = m\left(\widehat{AT'C_2}\right) = 60^0$.

Din ultima relație, rezultă coliniaritatea punctelor T', C_2, C.

Deoarece $m\left(\widehat{BT'C}\right) = m\left(\widehat{BA_2C}\right) = 60^0$, obținem că T' aparține cercului circumscris triunghiului echilateral BCA_2.

ii) Calculăm lungimea laturilor cu ajutorul *teoremei cosinusului*, ținând seama de faptul că, în general, unghiurile $\sphericalangle O_1'AO_3'$, $\sphericalangle O_2'BO_3'$, $\sphericalangle O_2'CO_1'$ au măsurile egale cu: $A - 60^0$, $B - 60^0$ sau $C - 60^0$ (sau $60^0 - A$, $60^0 - B$, $60^0 - C$) în cazul în care $m(\hat{A}) < 30^0$ sau $m(\hat{B}) < 30^0$ sau $m(\hat{C}) < 60^0$.

Se obține:

$O_1'O_3'^2 = O_2'O_3'^2 = O_1'O_2'^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3}}{6}$.

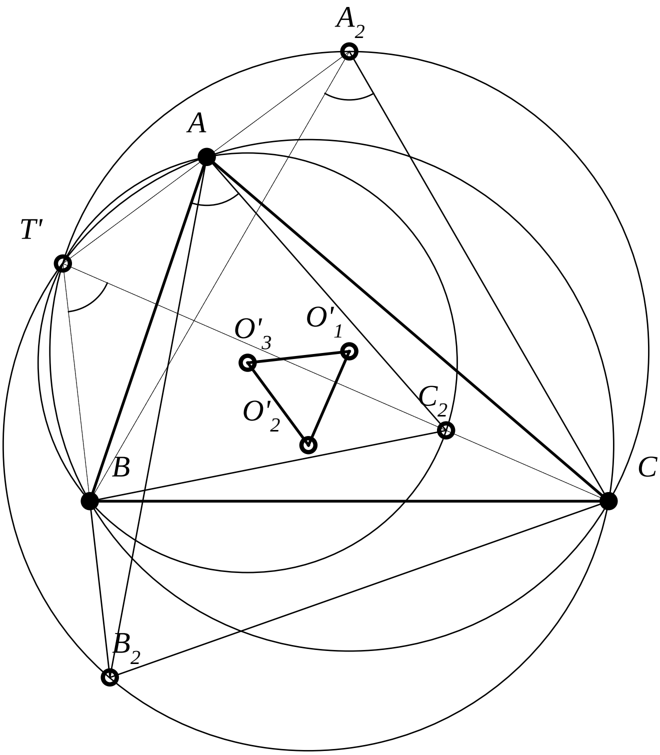


Figura 97

Remarca 25

Din expresia precedentă, se obține că într-un triunghi ABC este adevărată inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă ABC este echilateral.

iii) $\Delta BAB_2 \equiv \Delta C_2AC$ (L.U.L.), $BA = C_2A$, $AB_2 = AC$ și $m(\widehat{BAB_2}) = m(\widehat{C_2AC}) = A - 60^0$ (în cazul *Figurii 97*), rezultă că $BB_2 = CC_2$. Analog, $\Delta ABA_2 \equiv \Delta C_2BC$, rezultă că $AA_2 = CC_2$.

iv). Analog cum a fost demonstrată coliniaritatea T', A, A_2, se demonstrează și coliniaritatea punctelor T', B, B_2 și T', C, C_2. Această coliniaritate implică faptul că ABC și $A_2B_2C_2$ sunt omologice.

Centrul omologiei este punctul T' care se numește al doilea punct Torricelli-Fermat. Perpendicularele duse din A_2, B_2, C_2 respectiv pe BC, CA și AB sunt mediatoarele acestor laturi; în consecință, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, O este centrul de ortologie al acestor triunghiuri.

Teorema 39

Triunghiul ABC dat și triunghiul său interior al lui Napoleon $O_1'O_2'O_3'$ sunt bilogice.

Demonstrație

Perpendicularele duse din O_1', O_2', O_3' pe BC, CA respectiv AB sunt mediatoarele acestor trei laturi și, prin urmare, sunt concurente în O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC, punct ce este centru de ortologie al triunghiurilor $O_1'O_2'O_3'$ și ABC. Deoarece $T'A$ este coardă comună în cercurile Toricelli de centre O_3' și O_2', rezultă că $O_3'O_2'$ este mediatoarea segmentului $T'A$, deci perpendiculara din A pe $O_3'O_2'$ trece prin T'; analog, rezultă că perpendicularele duse din B pe $O_1'O_3'$ și din C pe $O_1'O_2'$ trec prin punctul al doilea Toricelli-Fermat, T' - punct ce este centru de ortologie al triunghiurilor ABC și $O_1'O_2'O_3'$. Fie A', B', C' intersecțiile cevienelor AO_1', BO_2', CO_3' respectiv cu BC, CA și AB.

Avem:

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{\text{Arie}\Delta ABA'}{\text{Arie}\Delta ACA'} = \frac{\text{Arie}\Delta BO_1'A'}{\text{Arie}\Delta CO_1'A'} = \frac{\text{Arie}\Delta ABO_1'}{\text{Arie}\Delta ACO_1'}.$$

Obținem:

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{AB \cdot BO_1' \cdot \sin \widehat{ABO_1'}}{AC \cdot CO_1' \cdot \sin \widehat{ACO_1'}} = \frac{c \cdot \sin(B - 30^0)}{b \cdot \sin(C - 30^0)}.$$

Analog, rezultă că:

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin(C - 30^0)}{\sin(A - 30^0)},$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin(A - 30^0)}{\sin(B - 30^0)}.$$

Deoarece $\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1$, reciproca *Teoremei lui Ceva* implică concurența dreptelor AO_1', BO_2', CO_3' și, în consecință, omologia triunghiurilor ABC și $O_1'O_2'O_3'$. Notăm cu P' centrul de omologie. *Teorema lui Sondat* arată că punctele T', O, P' sunt coliniare și OT' este perpendiculară pe axa de omologie a triunghiurilor bilogice ABC și $O_1'O_2'O_3'$.

7

TRIUNGHIURI ORTOOMOLOGICE

7.1. Triunghiuri ortogonale

Definiția 42

Două triunghiuri ABC și $A_1B_1C_1$ se numesc ortogonale dacă au laturile respectiv perpendiculare.

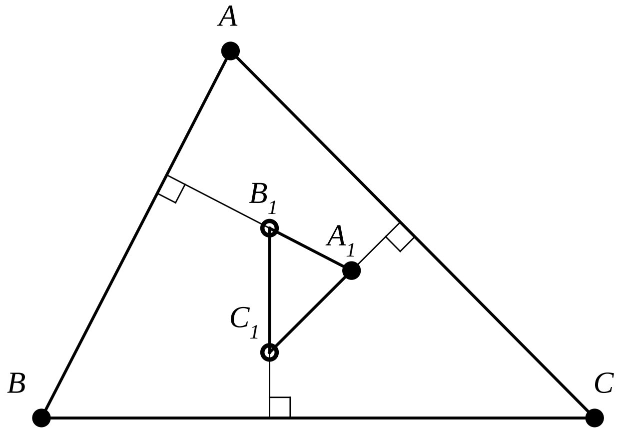


Figura 98

În *Figura 98*, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortogonale. Avem: $AB \perp A_1B_1$, $BC \perp B_1C_1$ și $CA \perp C_1A_1$.

Observația 62

Dacă triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortogonale, iar vârfurile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt respectiv pe laturile triunghiului ABC, spunem că triunghiurile sunt ortogonale, iar $A_1B_1C_1$ este înscris în ABC.

Problema 9

Fiind dat un triunghi $A_1B_1C_1$, construiți un triunghi ABC astfel încât ABC și $A_1B_1C_1$ să fie triunghiuri ortogonale și $A_1B_1C_1$ să fie înscris în triunghiul ABC.

Soluție

Dacă construim perpendiculara d_1 în A_1 pe A_1C_1, perpendiculara d_2 în B_1 pe B_1A_1 și perpendiculara d_3 în C_1 pe C_1B_1, atunci, notând $\{A\} = d_2 \cap d_3$, $\{B\} = d_1 \cap d_3$ și $\{C\} = d_1 \cap d_2$, triunghiul ABC este ortogonal cu $A_1B_1C_1$ și acesta din urmă este înscris în ABC (vezi *Figura 99*).

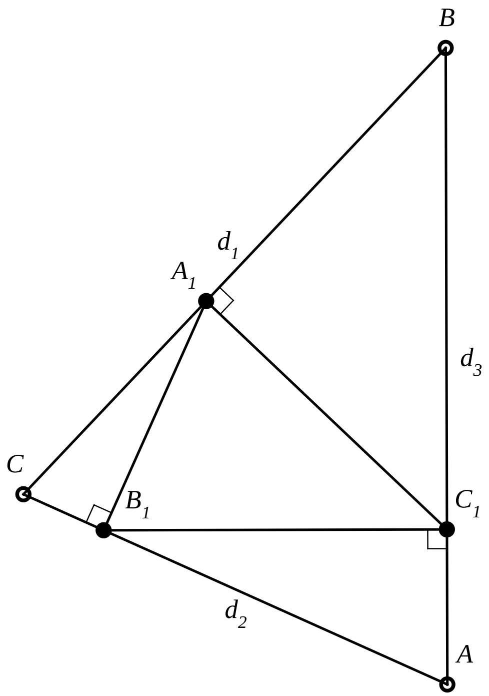


Figura 99

Dacă construim perpendiculara d_1 în A_1 pe A_1B_1, perpendiculara $d_2$în B_1 pe B_1C_1 și perpendiculara d_3 în C_1 pe C_1A_1, și notăm $\{A\} = d_1 \cap d_3$, $\{B\} = d_2 \cap d_1$ și $\{C\} = d_2 \cap d_3$, triunghiul ABC este, de asemenea, soluție pentru problema propusă.

Problema 10

Să se construiască triunghiul $A_1B_1C_1$ înscris în triunghiul ABC dat și ortogonal cu acesta.

Soluție

Presupunem problema rezolvată și raționăm pe configurația din *Figura 100*, unde triunghiul $A_1B_1C_1$ este înscris în triunghiul dat ABC și ortogonal cu acesta.

Construim perpendicularele în A, B, C respectiv pe AC, AB și BC; obținem astfel triunghiul $A_2B_2C_2$ ortogonal cu ABC. În continuare, construim perpendicularele în A_2, B_2, C_2 respectiv pe A_2C_2, B_2A_2 și C_2B_2, obținând la intersecțiile lor triunghiul $A_3B_3C_3$ ortogonal $A_2B_2C_2$.

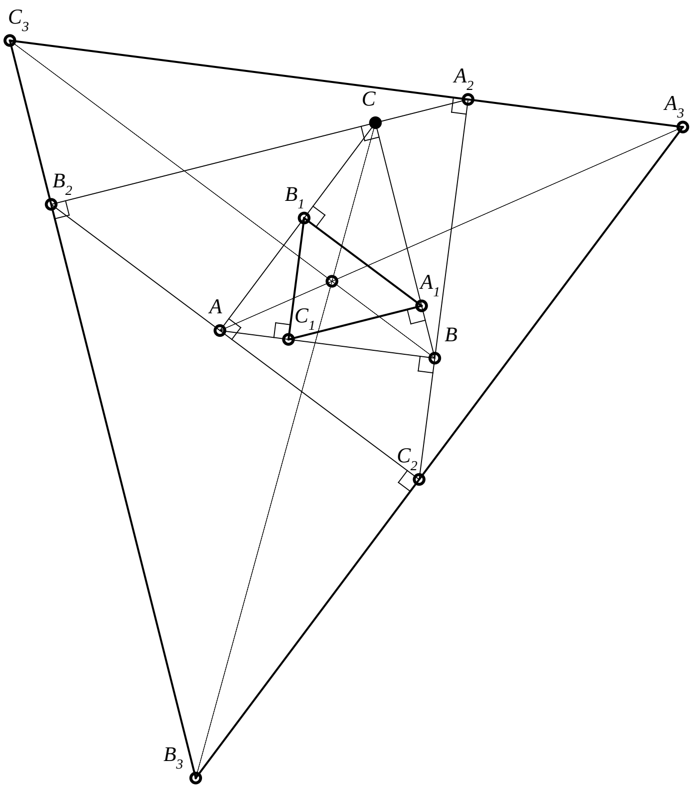


Figura 100

Observvăm că $AC \parallel A_3C_3$, $BC \parallel B_3C_3$, $AB \parallel A_3B_3$; prin urmare, triunghiurile ABC și $A_3B_3C_3$ sunt omotetice. Centrul omotetiei este $\{O\} = AA_3 \cap BB_3$. Observăm că $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ și $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, deci și triunghiurile $A_2B_2C_2$ și $A_1B_1C_1$ sunt omotetice.

Deoarece omoteticul segmentului A_3C_3 este segmentul AC prin omotetie de centru O și raport $\frac{OA_3}{OA}$, cum $A_2 \in A_3C_3$, dacă ducem A_2O și notăm cu A_1' intersecția cu AC, avem:

$\frac{OA_2}{OA_1{}'} = \frac{OA_3}{OA}$.

Analog găsim că

$\frac{OB_2}{OB_1{}'} = \frac{OB_3}{OB}$ și $\frac{OC_2}{OC_1{}'} = \frac{OC_3}{OC}$, prin urmare triunghiul $A_1{}'B_1{}'C_1{}'$ este omoteticul triunghiului $A_2B_2C_2$ prin omotetia de centru O și de raport $\frac{OA_3}{OA}$. Deoarece omotetia este o transformare care păstrează măsura unghiurilor și transformă dreptele în drepte, iar triunghiul $A_2B_2C_2$ este ortogonal cu triunghiul $A_3B_3C_3$, înseamnă că și triunghiul $A_1{}'B_1{}'C_1{}'$ va fi ortogonal cu ABC și prin urmare $A_1{}' = A_1$, $B_1{}' = B_1$, $C_1{}' = C_1$.

Putem construi triunghiul $A_1B_1C_1$ astfel:

1. Construim triunghiul $A_2B_2C_2$ ortogonal cu triunghiul dat ABC și ABC înscris în $A_2B_2C_2$ (construim efectiv perpendicularele în A, B, C, respectiv pe AC, AB și BC).
2. Construim triunghiul $A_3B_3C_3$ ortogonal cu $A_2B_2C_2$, astfel încât $A_2B_2C_2$ să fie înscris în $A_3B_3C_3$.
3. Unim A cu A_3, B cu B_3 și notăm $\{O\} = AA_3 \cap BB_3$.
4. Unim A_2 cu O, B_2 cu O, C_2 cu O. La intersecția acestor drepte cu AC, AB, BC găsim punctele A_1, B_1, C_1 vârfurile triunghiului cerut.

Observația 63

Deoarece triunghiul $A_2B_2C_2$poate fi construit în două moduri, rezultă că putem obține cel puțin două soluții la problema propusă.

Problema 11

Fiind dat un triunghi ABC să se construiască un triunghi $A_1B_1C_1$, astfel încât triunghiurile să fie ortogonale.

Soluție

Considerăm un punct C_1 în planul triunghiului ABC (vezi *Figura 101*). Ducem proiecțiile ortogonale ale lui C_1 pe BC, CA, AB fie acestea A', B', C'. Considerăm $B_1 \in (A'C_1)$; ducem din B_1 perpendiculara pe AB și notăm cu A_1 intersecția ei cu (C_1B'). Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt ortogonale.

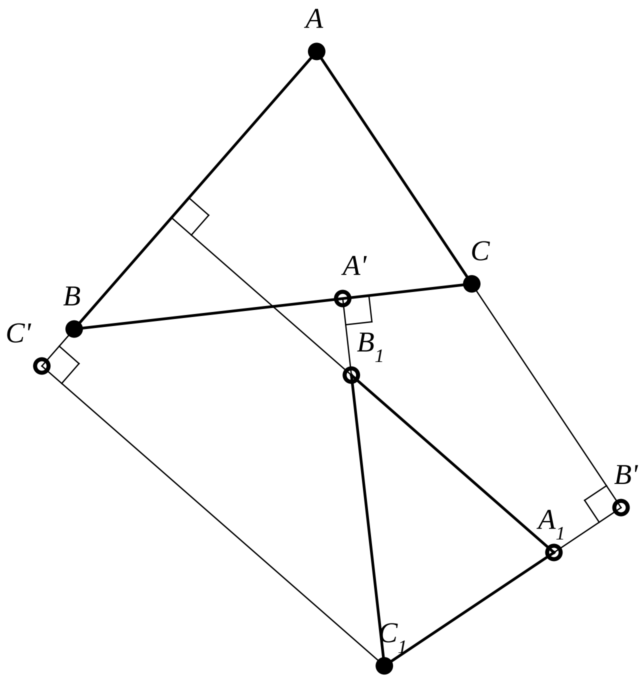


Figura 101

7.2. Triunghiuri simultan ortogonale și ortologice

Propoziția 73 (Ion Pătrașcu)

Dacă se dau triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ ortogonale, și ele sunt și ortologice, atunci ortologia este în sensul că ABC este ortologic cu $B_1A_1C_1$, centrele de ortologie sunt vârfurile C și C_1, iar triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt asemenea.

Demonstrație

Deoarece ABC și $A_1B_1C_1$ ortogonale, avem $AB \perp A_1B_1$, $BC \perp B_1C_1$, $CA \perp C_1A_1$ (vezi *Figura 102*).

Să considerăm că ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice în sensul că perpendiculara dusă din A pe B_1C_1, perpendiculara dusă din B pe A_1C_1 și perpendiculara dusă din C pe A_1B_1 sunt concurente într-un punct O. Atunci, perpendiculara din B pe A_1C_1 va fi paralelă cu AC, perpendiculara din A pe B_1C_1 va fi paralelă cu BC; aceasta conduce la concluzia că punctul O este astfel încât patrulaterul $ACBO$ este paralelogram. Pe de altă parte, perpendiculara dusă din C pe A_1B_1 trebuie să fie paralelă cu AB și trebuie să treacă prin O, ceea ce este absurd, deoarece nu este posibil ca în paralelogramul $ACBO$ diagonala CO să fie paralelă cu diagonala AB.

Să considerăm că ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice în sensul că perpendiculara din A pe A_1B_1, perpendiculara dusă din B pe B_1C_1, perpendiculara dusă din C pe C_1A_1 sunt concurente într-un punct O. Atunci, perpendiculara din A pe A_1B_1 va fi chiar AB, perpendiculara din B pe B_1C_1 este chiar BC; în acest moment, punctul O coincide cu B; perpendiculara din C pe A_1C_1, adică AC, ar trebui să treacă prin B, ceea ce este imposibil.

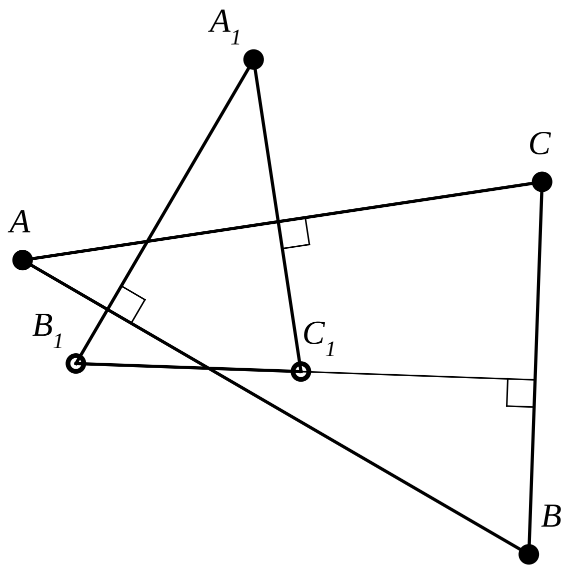


Figura 102

În fine, să considerăm că ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri ortologice în sensul că perpendiculara dusă din A pe C_1A_1, perpendiculara dusă din B pe B_1C_1 și perpendiculara dusă din C pe A_1B_1 sunt concurente într-un punct O. Deoarece perpendiculara din A pe A_1C_1trebuie să fie paralelă cu AC, rezultă că această perpendiculară este chiar AC. Perpendiculara din B pe C_1B_1 este chiar BC, prin urmare punctul O coincide cu C. Perpendiculara din C pe A_1B_1 va fi paralelă cu AB ea se poate construi și, prin urmare, vârful C este centru de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $B_1A_1C_1$.

Conform teoremei triunghiurilor ortologice, și triunghiul $B_1A_1C_1$ este ortologic în raport cu ABC. Se găsește că centrul de ortologie este vârful C_1.

În *Figura 102*, se observă că unghiurile ACB și AC_1B_1 au laturile respectiv perpendiculare, prin urmare ele sunt congruente. La fel, unghiul BAC și unghiul $B_1A_1C_1$ au laturile perpendiculare, deci sunt congruente. Rezultă astfel că: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Propoziția 74 (Ion Pătrașcu)

Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A și $A_1B_1C_1$ un triunghi ortogonal cu el, atunci:

i) Triunghiul $A_1B_1C_1$ este dreptunghic în A_1;

ii) Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triortologice.

Demonstrație

i) Din $A_1C_1 \perp AC$, $A_1B_1 \perp AB$ și $m(\hat{A}) = 90^0$, rezultă că $m(\widehat{A_1}) = 90^0$ (vezi *Figura 103*).

ii) Perpendiculara dusă din A pe A_1C_1 este AC, iar perpendiculara dusă din B pe C_1B_1 este CB. Acestea sunt concurente în punctul C prin care trece, evident, perpendiculara dusă din C pe A_1B_1. În consecință, triunghiurile ABC și $B_1A_1C_1$ sunt ortologice, iar centrul de ortologie este vârful C.

Perpendiculara dusă din A pe A_1B_1 este AB, iar perpendiculara dusă din C pe B_1C_1 este CB. Aceste perpendiculare se intersectează în punctul B; perpendiculara dusă din B pe A_1C_1 trece, evident, prin B, prin urmare punctul B este centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $C_1B_1A_1$.

Putem afirma că triunghiul ABC este biortologic cu triunghiul $A_1B_1C_1$ și, aplicând *Teorema Pantazi*, avem că ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triortologice. Faptul că triunghiul ABC și $A_1C_1B_1$ sunt ortologice se poate demonstra ca mai înainte. Centrul de ortologie este A.

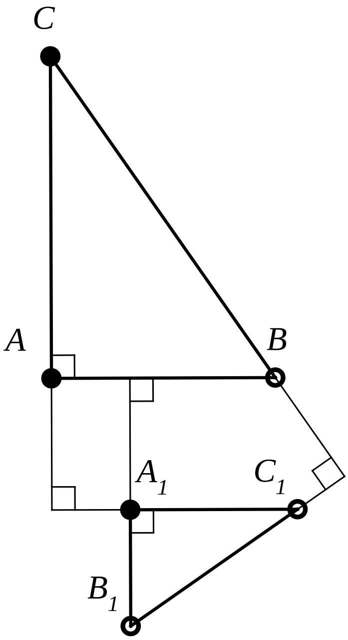


Figura 103

Observația 64

Evident, și triunghiul $A_1B_1C_1$ este triortologic în raport cu triunghiul ABC; centrele de ortologie sunt vârfurile triunghiului $A_1B_1C_1$.

7.3. Triunghiuri ortoomologice

Definiția 43

Două triunghiuri care sunt simultan ortologice și omologice se numesc *triunghiuri ortoomologice* (J. Neuberg).

Problema 12

Fiind dat triunghiul ABC, să se construiască triunghiul $A_1B_1C_1$, astfel încât ABC și $A_1B_1C_1$ să fie triunghiuri ortoomologice.

Pentru rezolvarea acestei probleme, demonstrăm:

Lema 12

Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ două cercuri secante cu punctele M și N comune. Ducem prin M secantele A, M, A_1 și B, M, B_1. Unghiul coardelor AB și A_1B_1 este congruent cu unghiul cercurilor date.

Definiția 44

Unghiul a două cercuri secante este unghiul făcut de tangentele duse la cercuri într-unul din punctele comune.

Demonstrația lemei

Notăm $\{P\} = AB \cap A_1B_1$ și MT, MT_1 tangentele duse în M la cele două cercuri (vezi *Figura 104*). Avem: $\sphericalangle PAM \equiv \sphericalangle BMT$, $\sphericalangle PA_1M \equiv \sphericalangle B_1MT_1$.

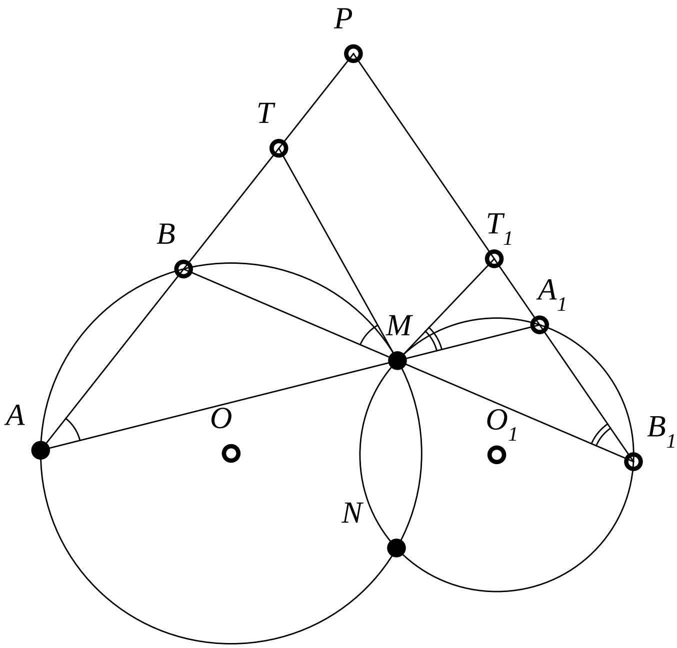


Figura 104

Adunând aceste relații și ținând seama că suplementele măsurilor găsite prin această adunare sunt egale, obținem: $\sphericalangle APA_1 \equiv \sphericalangle TMT_1$.

Definiția 45

Două cercuri se numesc ortogonale dacă unghiul lor este drept.

Observația 65

Dacă considerăm două cercuri, $\mathcal{C}(O,r)$ și $\mathcal{C}(O_1,r_1)$, ortogonale, și două coarde, AB și A_1B_1, în aceste cercuri, astfel încât A, M, A_1 și B, M, B_1 să fie coliniare (M este punct comun cercurilor date), atunci, în baza *Lemei 12*, va rezulta că $AB \perp A_1B_1$.

Rezolvarea *Problemei 12*

Construim cercul circumscris triunghiului ABC și apoi construim un cerc ortogonal acestui cerc. Notăm cu M unul dintre punctele comune cercurilor (vezi *Figura 105*).

Ducem dreptele AM, BM, CM și notăm cu A_1, B_1, C_1 al doilea punct de intersecție al lor cu cercul ortogonal cercului circumscris triunghiului ABC.

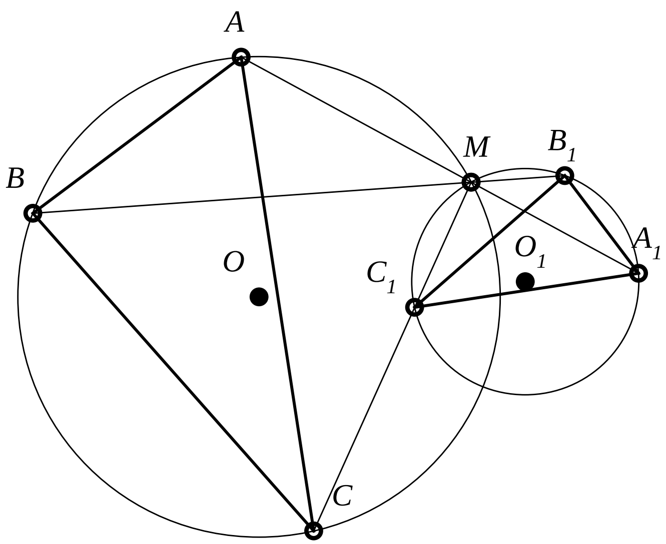


Figura 105

Conform *Lemei 12*, va rezulta că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au laturile respectiv perpendiculare, deci vor fi triunghiuri ortogonale. Pe de altă parte, AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în M, deci triunghiurile sunt omologice.

Remarca 24

Pentru a construi două cercuri$\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ ortogonale, ținem cont de:

Teorema 40

Două cercuri $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ sunt ortogonale dacă și numai dacă $r^2 + r_1^2 = OO_1^2$.

Demonstrație

Dacă cercurile sunt ortogonale și M este unul dintre punctele lor comune, atunci MO și MO_1 sunt tangente cercurilor, triunghiul OMO_1 este dreptunghic și, în consecință, $r^2 + r_1^2 = OO_1^2$.

Reciproc, dacă cercurile sunt astfel încât $r^2 + r_1^2 = OO_1^2$, rezultă că unghiul OMO_1 este drept și, de asemenea, unghiul TMM_1, făcut de tangentele în M la cercuri, este drept, prin urmare, cercurile sunt ortogonale.

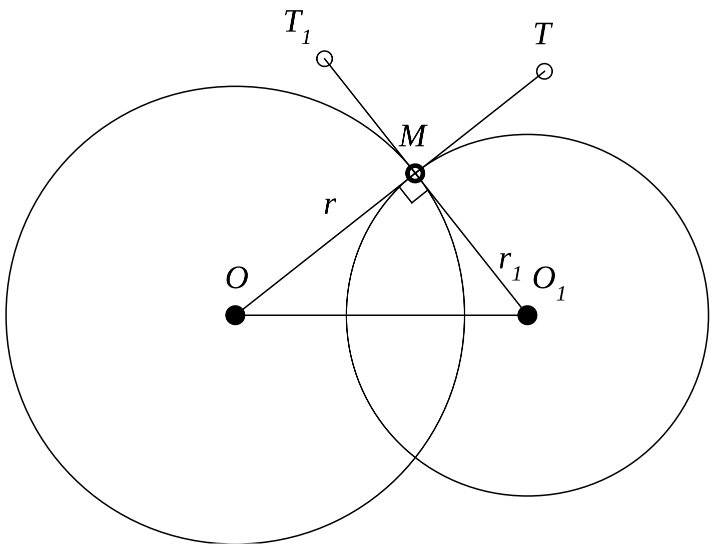


Figura 106

Teorema 41

Dacă ABC și $A_1B_1C_1$ sunt două triunghiuri ortoomologice, atunci:

i. Cercurile lor circumscrise sunt secante, iar unul dintre punctele lor comune este centrul omologiei;
ii. Cercurile circumscrise triunghiurilor date sunt ortogonale.
iii. Celălalt punct comun al cercurilor circumscrise triunghiurilor date este centrul de asemănare al acestor triunghiuri;
iv. Dreptele lui Simson ale centrului omologiei în raport cu triunghiurile date sunt paralele cu axa de omologie a lor.
v. Dreptele lui Simson ale centrului de asemănare a triunghiurilor în raport cu triunghiurile date sunt ortogonale într-un punct ce aparține axei de omologie.

Demonstrație

i) Notăm cu M centrul de omologie a triunghiurilor date, deci $\{M\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$, de asemenea, notăm P, Q, R axa de omologie (vezi *Figura 107*):

$\{P\} = A_1B_1 \cap AB$,

$\{Q\} = B_1C_1 \cap BC$,

$\{R\} = C_1A_1 \cap AC$.

P, Q, R sunt coliniare și datorită ortogonalității triunghiurilor date, avem că unghiurile din P, Q și R sunt drepte.

ii) Deoarece coardele AB și A_1B_1 din cele două cercuri sunt perpendiculare, ținând seama de *Lema 12*, rezultă că cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortogonale.

iii) Rezultă din *Teoria figurilor asemenea*, vezi *Anexa nr. 2.*

iv)

$$\left.\begin{array}{c} \left.\begin{array}{l} MR_1 \perp AC \\ MQ_1 \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow MCR_1Q_1 - \text{inscriptibil} \Rightarrow \widehat{Q_1R_1A} \equiv \widehat{Q_1MC} \\ MQ_1, C_1Q \perp BC \Rightarrow MQ_1 \parallel C_1Q \Rightarrow \widehat{Q_1MC} \equiv \widehat{QC_1C} \\ \left.\begin{array}{l} C_1Q \perp BC \\ C_1R \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow C_1CRQ - \text{inscriptibil} \Rightarrow \widehat{QC_1C} \equiv \widehat{QRA} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{Q_1R_1A} \equiv \widehat{QRA} \Rightarrow \boxed{Q_1R_1 \parallel QR}.$$

(Mihai Miculița; vezi *Figura 108*)

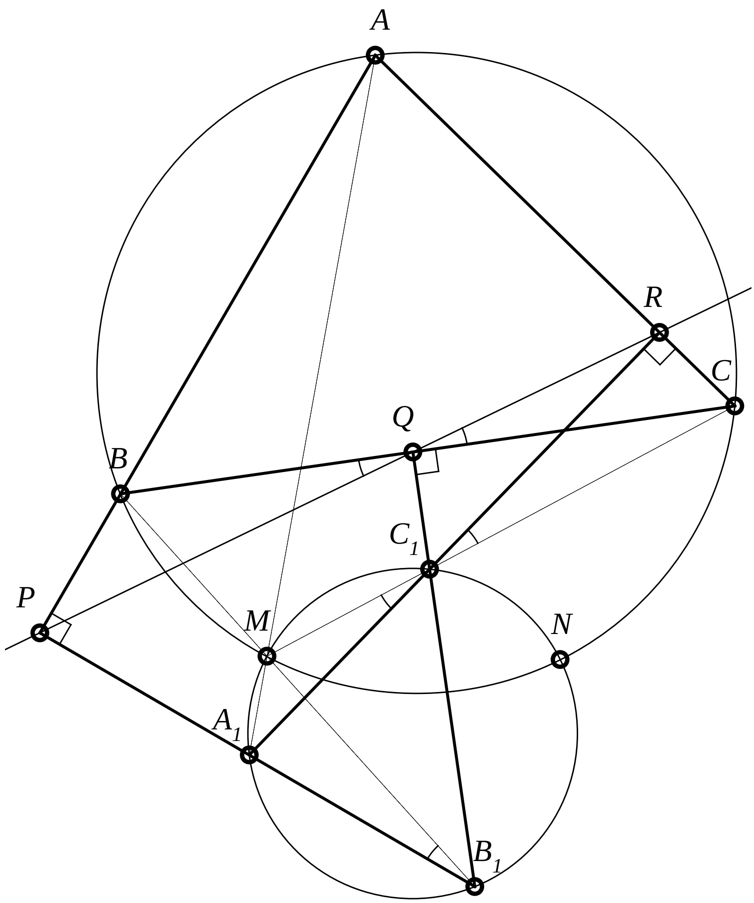


Figura 107

v) Notăm cu N al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor date, patrulaterul $ARNA_1$ este inscriptibil (din R, AA_1 se vede sub un unghi drept, iar din N, de asemenea, AA_1 se vede sub un unghi drept, N fiind propriul său punct omolog). Din aceleași considerente, patrulaterul APA_1N este inscriptibil, obținem că punctele A, P, A_1, N, R sunt pe cercul de diametru AA_1. Considerând triunghiurile APR și A_1PR și aplicând *Propoziția 53*, obținem că dreptele Simson ale punctului N în raport cu triunghiurile ABC și$A_1B_1C_1$ sunt perpendiculare și se intersectează într-un punct situat pe dreapta PQ.

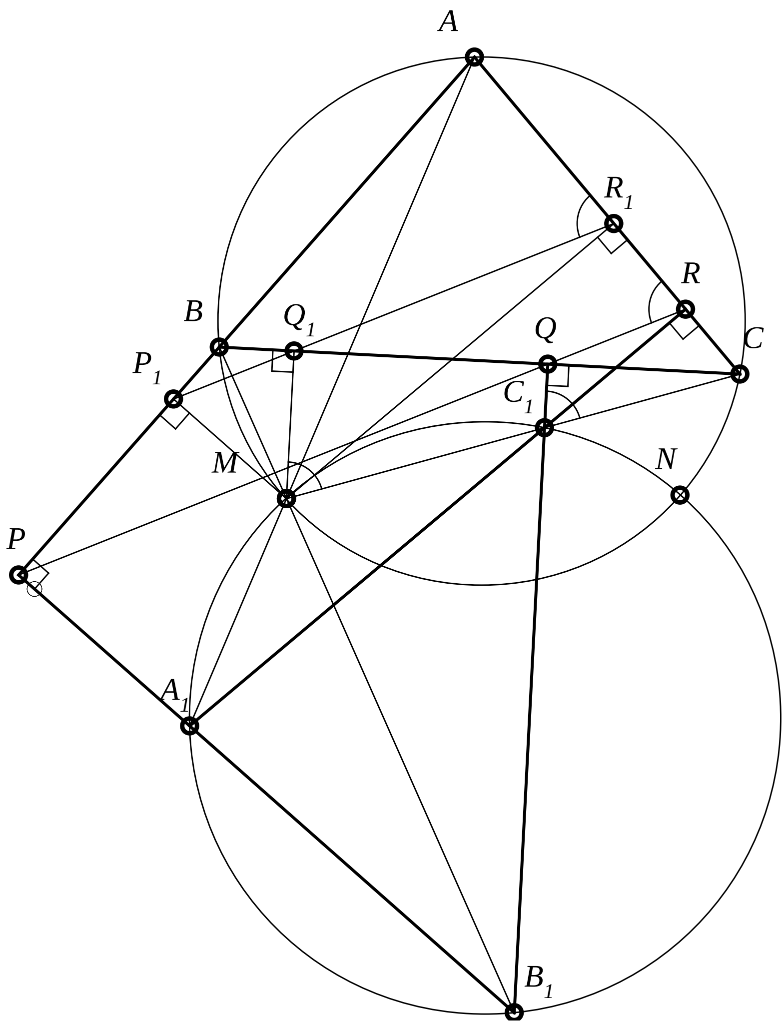


Figura 108

Teorema 42 (P. Sondat)

Axa de omologie a două triunghiuri ortoomologice ABC și $A_1B_1C_1$ trece prin mijlocul segmentului HH_1 determinat de ortocentrele acestor triunghiuri.

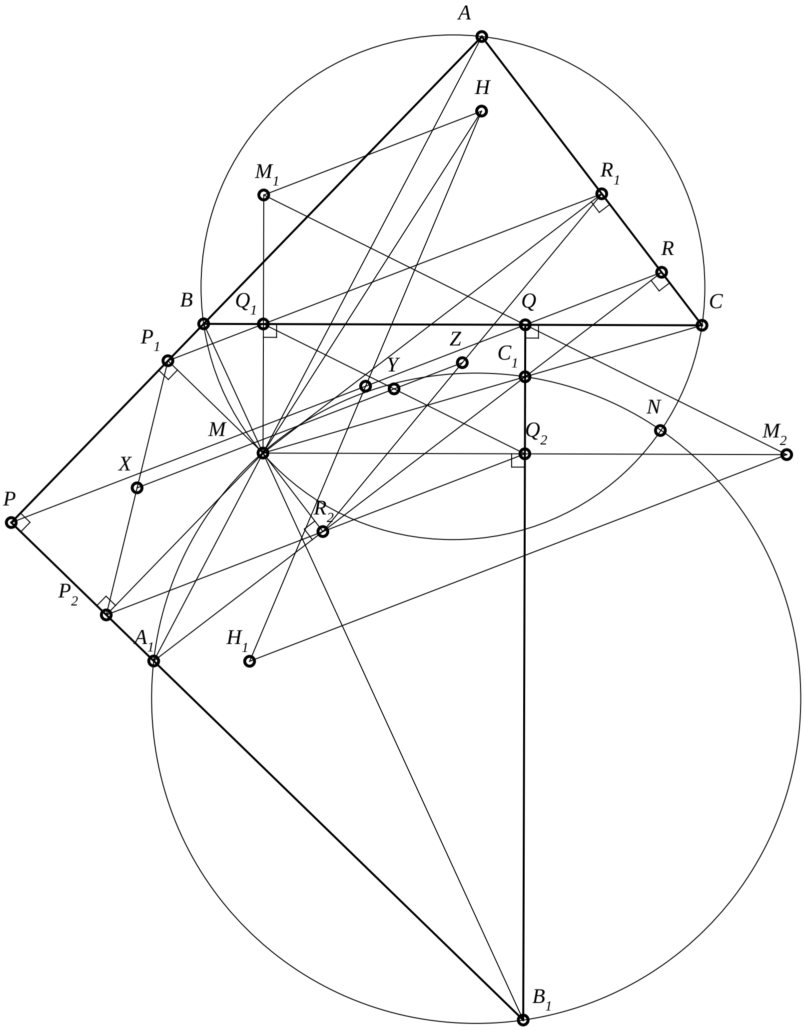


Figura 109

Demonstrație

Fie $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$ dreptele Simson ale centrului M de omologie al triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$, iar PQR axa de omologie a lor (vezi *Figura 109*). Notăm cu M_1 respectiv M_2 simetricele lui M față de Q_1 respectiv Q_2, deoarece dreapta lui Simson $P_1Q_1R_1$ trece prin mijlocul segmentului MH (*Teorema 17*) avem că M_1H este paralelă cu P_1Q_1, deci cu PQ, analog M_2H_1 este paralelă cu PQ. Patrulaterul $MQ_1Q_2Q_3$ este dreptunghi, dacă notăm cu X centrul său, avem evident $Q_1 - X - Q_2$ coliniare și $M - X - Q$ coliniare. Dreapta M_1M_2 este omotetica dreptei Q_1Q_2 prin omotetia de centru M și raport 2 în consecință punctul Q este mijlocul segmentului M_1M_2. Patrulaterul $M_1HM_2H_1$ este trapez (bazele sale sunt paralele cu axa de omologie PQ), deoarece Q este mijlocul lui M_1M_2 și paralela dusă prin Q la M_1H este axa de omologie PQ, conform unei teoreme din trapez, PQ va conține și mijlocul diagonalei HH_1.

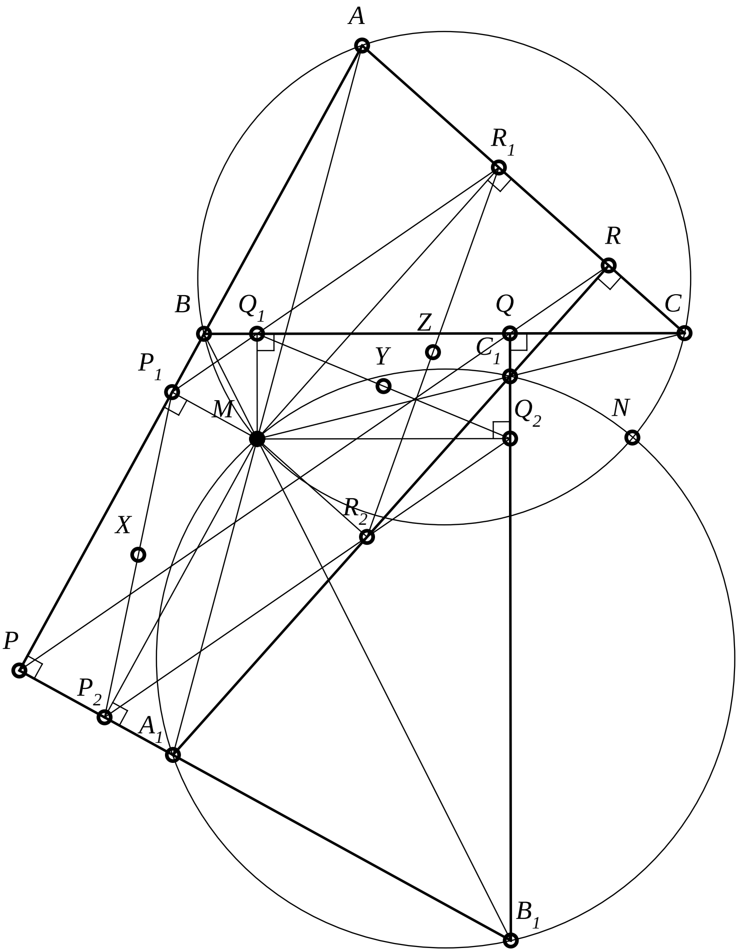


Figura 110

Propoziția 75 (Ion Pătrașcu)

Fie $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ două triunghiuri ortoomologice. Dreptele lui Simson ale centrului de omologie a triunghiurilor față de cercurile circumscrise sunt P_1, Q_1, R_1, respectiv P_2, Q_2, R_2. Atunci mijloacele segmentelor P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 sunt coliniare.

Demonstrație

Fie M centrul de omologie și $P - Q - R$ axa de omologie a triunghiurilor date (vezi *Figura 110*).

Notăm $P_1 - Q_1 - R_1$ și $P_2 - Q_2 - R_2$ dreptele lui Simson ale lui M în raport cu triunghiurile $A_1B_1C_1$ respectiv $A_2B_2C_2$.

Patrulaterul MP_1PP_2 este dreptunghi, deci mijlocul lui P_1P_2 este centrul acestui dreptunghi; îl notăm cu X; analog, fie Y mijlocul lui Q_1Q_2 (deci centrul dreptunghiului MQ_1QQ_2) și Z mijlocul lui R_1R_2.

Deoarece X, Y, Z sunt mijloacele segmentelor MP, MQ, respectiv MQ și P, Q, R sunt puncte coliniare, rezultă că și X, Y, Z sunt coliniare, ele aparțin omoteticei dreptei PQ prin omotetia de centru M și raport $\frac{1}{2}$.

Remarca 25

În același mod putem demonstra că mijloacele segmentelor determinate de picioarele înălțimilor triunghiurilor ortoomologice $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt puncte coliniare.

Teorema 43

Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri ortoomologice având ca axă de omologie dreapta d. Atunci:

i) Patrulaterele complete $(ABC,\ d)$ și $(A_1B_1C_1,\ d)$ au același punct Miquel și același cerc Miquel;

ii) Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ sunt extremitățile unui diametru al cercului Miquel, iar centrul de omologie al acestor triunghiuri aparține acestui cerc Miquel.

Demonstrație

i) Fie P, Q, R punctele în care axa de omologie d intersectează laturile AB, BC, respectiv CA (vezi *Figura 111*). Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ fiind ortogonale, avem că $\sphericalangle APA_1 \equiv \sphericalangle ARA_1 = 90^0$, deci triunghiurile APR și A_1PR au același cerc circumscris cu centrul O_2.

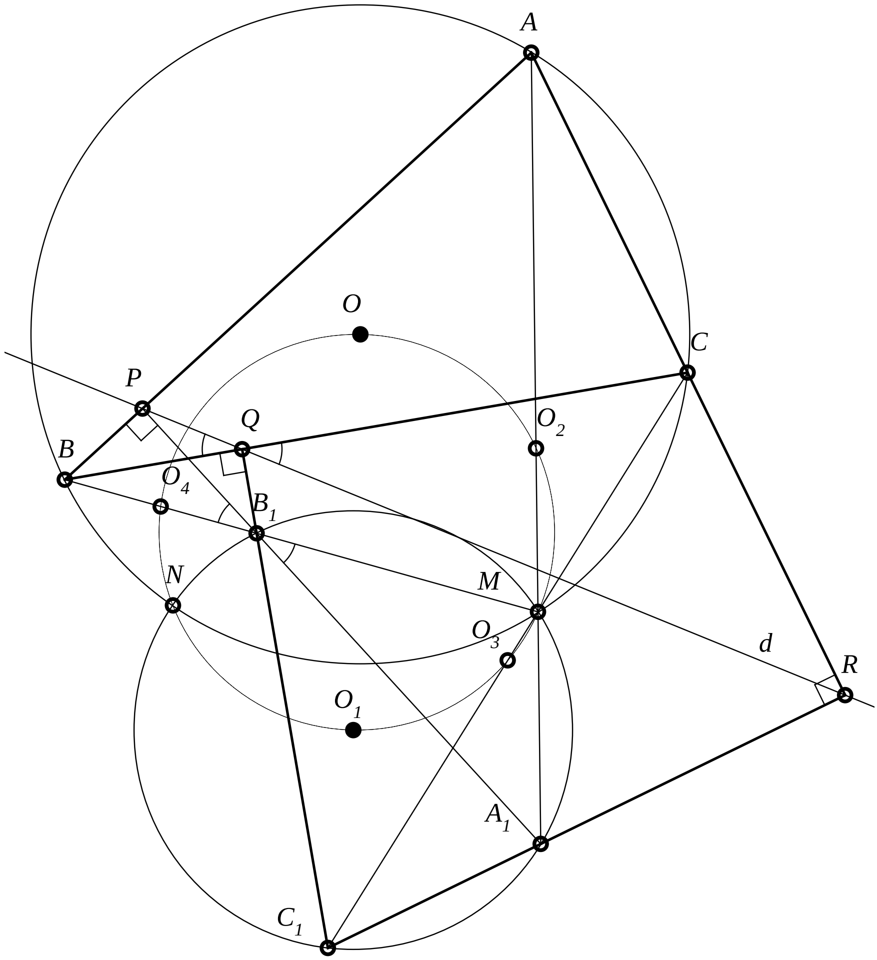


Figura 111

Patrulaterele $PBQB_1$ și $QRCC_1$ sunt inscriptibile, deci:

$\sphericalangle BQP \equiv \sphericalangle BB_1A_1$, (1)

$\sphericalangle CQR \equiv \sphericalangle RC_1C$. (2)

Avem și:

$\sphericalangle BQP \equiv \sphericalangle CQR$(opuse la vârf), (3)

$\sphericalangle MC_1A_1 \equiv \sphericalangle RC_1C$ (opuse la vârf). (4)

Din aceste relații, obținem că:

$\sphericalangle MB_1A_1 \equiv \sphericalangle MC_1A_1$. (5)

Această relație arată că cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ conține punctul M.

Condiția de ortogonalitate a triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ implică asemănarea lor, directă (unghiurile triunghiurior au laturile respective perpendiculare).Din conciclicitatea punctelor M, A_1, B_1, C_1, rezultă:

$\sphericalangle A_1MB_1 \equiv \sphericalangle A_1C_1B_1$. (6)

Dar: $\sphericalangle A_1C_1B_1 \equiv \sphericalangle ACB$. (7)

Pe de altă parte:

$\sphericalangle A_1MB_1 \equiv \sphericalangle BMA$ (opuse la vârf). (8)

Obținem astfel că $\sphericalangle BMA \equiv \sphericalangle ACB$, condiție care arată apartenența punctului M, centrul omologiei triunghiurilor la cercul crcumscris triunghiului ABC.

Analog, triunghiurile CQR și C_1QR au același cerc circumscris de centru O_3, iar triunghiurile BPQ și B_1PQ au același cerc circumscris cu centrul O_4 – mijlocul segmentului BB_1. Dacă notăm cu M și N punctele de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ (de centre O, respectiv O_1), atunci, datorită faptului că cercurile circumscrise triughiurilor APR și CQR coincid cu cercurile circumscrise triunghiurilor A_1PR și C_1QR, înseamnă că al doilea punct de intersecție al lor este N, punctul comun al cercurilor patrulaterelor complete (ABC, d), $(A_1B_1C_1, d)$, prin urmare N este punctul lui Miquel al acestor patrulatere (vezi *Anexa nr. 3*). De asemenea, cercul lui Miquel al patrulaterului complet (ABC, d), adică cercul care conține punctele O_1, O_2, O_3, O_4 și punctul N coincide cu cercul lui Miquel al patrulaterului $(A_1B_1C_1, d)$care conține punctele$N$, O_1, O_2, O_3, O_4.

ii) Cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortogonale; deoarece N este unul dintre punctele comune lor, avem că$m\left(\widehat{ONO_1}\right) = 90^0$, și deoarece O, N și O_1 sunt pe cercul Miquel, înseamnă că O și O_1 sunt diametral-opuse în acest cerc.

Dacă notăm cu M centrul de omologie al triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$, atunci M va fi al doilea punct de intersecție a acestor cercuri; deoarece N se află pe cercul lui Miquel și M este simetricul său față de diametrul OO_1, rezultă că și M aparține cercului Miquel – comun patrulaterele complete $(ABC; d)$, $(A_1B_1C_1;\ d_1)$.

Definiția 46

Dacă ABC este un triunghi și $P - Q - R$ o transversală ($P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in AC$), iar perpendicularele ridicate în P, Q, R respectiv pe AB, AC și CA determină un triunghi $A_1B_1C_1$, acesta este numit *triunghiul paralogic* al triunghiului ABC.

Observația 66

În *Figura 112*, $A_1B_1C_1$ este triunghiul paralogic al lui ABC.

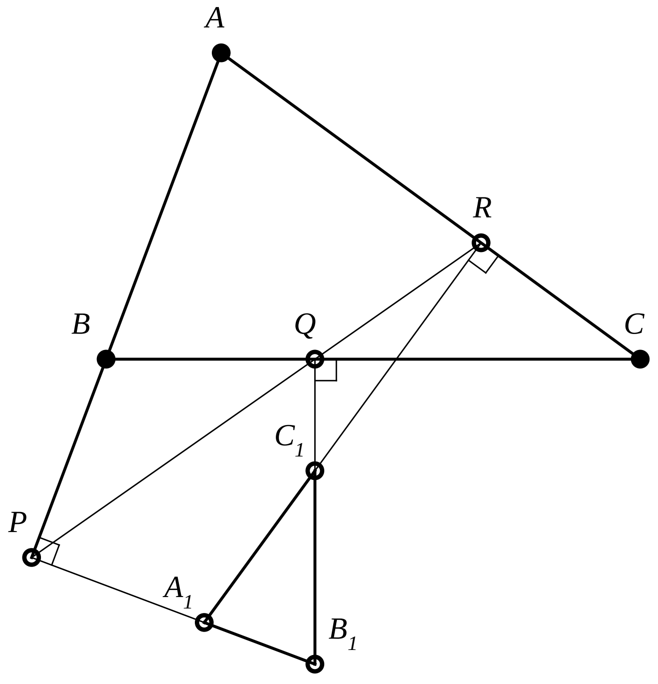


Figura 112

7.4. Triunghiuri metaparalele sau triunghiuri paralelogice

Definiţie 47

Două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$, cu proprietatea că paralelele duse prin A, B, C respectivla $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sunt concurente într-un punct P, se numesc *triunghiuri metaparalele* sau *paralelogice*. Punctul P se numeşte *centru de paralelogie*.

Teorema 44

Dacă triunghiul ABC şi triunghiul $A'B'C'$ sunt paralelogice, atunci şi triunghiul $A'B'C'$este paralelogic în raport cu ABC (paralelele duse prin vârfurileA', B', C' respectiv la BC, CA, AB sunt concurente într-un punct P' - centrul de paralelogie al triunghiului $A'B'C'$ în raport cu triunghiul ABC.

Demonstraţie

Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri paralelogice şi P centrul de paralelogie al triunghiului ABC în raport cu $A'B'C'$ (vezi *Figura 113*).Notăm cu A_1, B_1, C_1 intersecţiile paralelelor duse prin A, B, C la $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, respectiv cu BC, CA, AB. Deci $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{P\}$.

Conform *Teoremei lui Ceva,* avem că:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1. \quad (1)$$

Notăm cu A'_1, B'_1, C'_1 intersecțiile paralelor duse prin A', B', C', respectiv la BC, CA, AB cu laturile $B'C'$, $C'A'$ și$A'B'$, și observăm că $\Delta A'_1A'B' \sim \Delta A_1CP$ (au laturile respectiv paralele); rezultă că:

$$\frac{A'_1A'}{A_1C} = \frac{A'_1B'}{A_1P}. \quad (2)$$

De asemenea, avem $\Delta A'_1A'C' \sim \Delta A_1BP$ de unde:

$$\frac{A'_1A'}{A_1B} = \frac{A'_1C'}{A_1P}. \quad (3)$$

Din relațiile (2) și (3), obținem:

$$\frac{A'_1B'}{A'_1C'} = \frac{A_1B}{A_1C}. \quad (4)$$

Analog, se obțin relațiile:

$$\frac{B'_1C'}{B'_1A'} = \frac{B_1C}{B_1A}, \quad (5)$$

$\frac{C'_1A'}{C'_1B'} = \frac{C_1A}{C_1B}$. (6)

Relațiile (4), (5), (6) și (1) arată cu *Teorema lui Ceva* că $A'A'_1$, $B'B_1$, $C'C'_1$ sunt concurente în centrul P' de paralelogie al triunghiului $A'B'C'$ în raport cu triunghiul ABC.

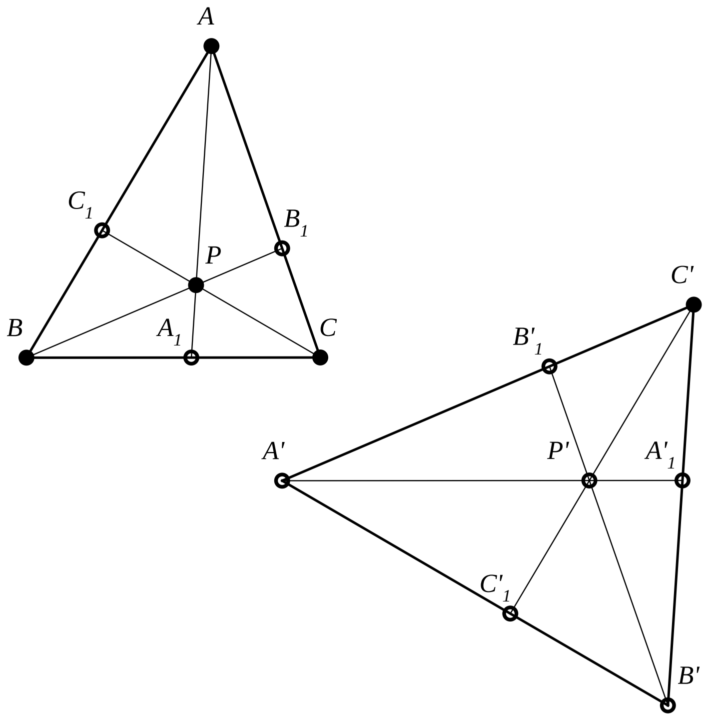


Figura 113

Observația 67

Două triunghiuri ortogonale sunt paralelogice. Centrele lor de paralelogie sunt ortocentrele.

Remarca 26

Dacă ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri paralelogice, atunci, evident, ele sunt triunghiuri ortogonale. Din reciproca *Teoremei lui Desargues* (vezi [24]), rezultă că ABC și $A_1B_1C_1$ sunt și triunghiuri omologice; prin urmare, două triunghiurile paralelogice sunt triunghiuri ortoomologice.

Se poate formula pentru triunghiurile paralelogice *Teorema 40*. În același mod, se poate demonstra:

Teorema 45

Dacă ABC și $A'B'C'$ sunt două triunghiuri în același plan; prin vârfurile A, B, C se duc drepte ce fac cu $B'C'$, $C'A'$ și $A'B'$ unghiuri demăsură φ și aceste drepte sunt concurente, atunci și dreptele care trec prinA', B', C'și fac cu BC, CA, AB unghiuri de măsura $180^0 - \varphi$ sunt concurente. (Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ se numesc *izologice*).

Această teoremă generalizează teorema triunghiurilor ortologice.

8

ANEXE

8.1 Anexa1: Coordonate baricentrice

8.1.1 Coordonate baricentrice ale unui punct în plan

Considerăm un triunghi oarecare ABC pe care îl vom numi triunghi de referinţă şi un punct M arbitrar în planul triunghiului. Notăm cu $A'B'C'$ intersecţiile dreptelor AM, BM, CM cu laturile BC, CA, AB (vezi *Figura 113*).

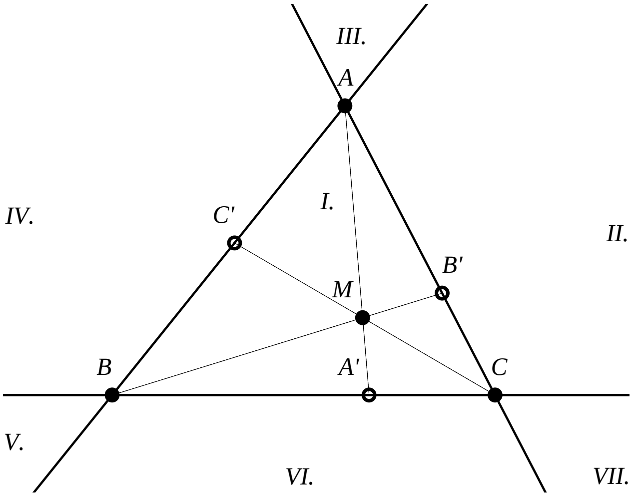


Figura 113

Punctul M determină cu câte două vârfuri ale triunghiului, în general, trei triunghiuri MBC, MCA, MAB. Ariile acestor triunghiuri se consideră pozitive sau negative după următoarea regulă:

Dacă un triunghi are o latură comună cu triunghiul de referinţă şi celălalt vârf al său este de aceeaşi parte a laturii comune cu vârful "rămas" al triunghiului de referinţă, atunci aria este pozitivă, iar dacă latura comună separă vârful său cu celălalt vârf al triunghiului de referinţă, aria este negativă.

Dacă punctul M se află pe o latură a triunghiului de referinţă, atunci aria triunghiului "degenerat" determinat de el cu vârfurile triunghiului de referinţă ce determină respectiva latură este zero. Notând S_a, S_b,S_c ariile celor trei triunghiuri MBC, MAC, MAB, se observă că semnele acestor arii sunt corespunzătoare cu cele din tabloul următor.

Regiunea	S_a	S_b	S_c
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	-
VI	-	+	+
VII	-	-	+

Definiţia 48

Trei numere reale α, β, γ proporţionale cu cele trei arii S_a, S_b, S_c considerate algebric, se *numesc coordonate baricentrice* ale punctului M în raport cu triunghiul ABC.

Notăm $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Dacă α, β, γ sunt astfel încât $\alpha + \beta + \gamma = 1$, atunci α, β, γ sunt coordonate baricentrice absolute ale punctului M.

Dacă notăm cu S aria triunghiului ABC, atunci coordonatele baricentrice absolute ale punctului M sunt $\frac{S_a}{S}, \frac{S_b}{S}, \frac{S_c}{S}$.

De exemplu, dacă G este centrul de greutate a triunghiului ABC, atunci coordonatele baricentrice absolute ale lui G sunt $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Teorema 46

Dacă ABC este un triunghi dat și M este un punct în planul său, atunci există și este unic tripletul ordonat $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, astfel încât $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Reciproc

Pentru orice triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, există și este unic un punct M în planul triunghiului ABC, astfel încât $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Observația 68

Din teoremă rezultă că punctul M satisface condiția $\frac{\overline{MA'}}{\overline{AM}} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$ sau $\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \alpha$.

Observăm că α este negativ atunci când BC separă punctele A și M, și negativ dacă A și M sunt de aceeași parte a lui BC.

Pe de altă parte, $\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \frac{S_a}{S}$, în convenția de semn pentru S_a; în concluzie, tripletul (α, β, γ) din teoremă constituie coordonatele baricentrice absolute ale punctului M.

Teorema 47 (Vectorul de poziție al unui punct)

Fie O un punct oarecare în planul triunghiului ABC și $M(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Atunci: $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$.

Observația 69

1. Putem nota $\overrightarrow{r_M} = \alpha\overrightarrow{r_A} + \beta\overrightarrow{r_B} + \gamma\overrightarrow{r_C}$.
2. Din teorema precedentă, rezultă că $\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$.

Teorema 48

Dacă $Q_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $Q_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, cu $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,2}$ sunt două puncte date în planul triunghiului ABC, atunci $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (\alpha_2 - \alpha_1)\overrightarrow{r_A} + (\beta_2 - \beta_1)\overrightarrow{r_B} + (\gamma_2 - \gamma_1)\overrightarrow{r_C}$.

Teorema 49 (Coordonatele baricentrice ale unui vector)

Fie ABC un triunghi dat și O un punct în planul său considerat ca origine a planului. Notăm $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_B}$, $\overrightarrow{r_C}$ vectorii de poziție ai punctelor A, B, C și cu $\vec{u}$ un vector din plan.
Atunci există și sunt unice trei numere reale α, β, γ cu $\alpha + \beta + \gamma = 0$, astfel încât $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{r_A} + \beta\overrightarrow{r_B} + \gamma\overrightarrow{r_c}$.

Reciproc

Pentru orice triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ cu $\alpha + \beta + \gamma - 0$, există și este unic un vector $\vec{u}$ care verifică relația $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{r_A} + \beta\overrightarrow{r_B} + \gamma\overrightarrow{r_c}$.

Definiția 49

Tripletul $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, cu proprietatea că $\boldsymbol{\alpha} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r_A}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r_B}} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r_c}} = \vec{\boldsymbol{u}}$ constituie coordonatele baricentrice ale vectorului $\vec{\boldsymbol{u}}$. Notăm $\vec{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$.

Observația 70

Coordonatele baricentrice ale vectorului $\vec{u}$ nu depind de alegerea originii O.

Consecință

Dacă $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, atunci:
$\vec{u} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$;
$\vec{u} = \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}$;
$\vec{u} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$.

Teorema 50 (Vectorul de poziție al unui punct ce împarte un segment într-un raport dat)

Fie $Q_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $Q_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,2}$ și punctul P care împarte segmentul Q_1Q_2 astfel: $\frac{\overrightarrow{PQ_1}}{\overrightarrow{PQ_2}} = k$.
Atunci $P\left(\frac{\alpha_1 - k\alpha_2}{1-k}, \frac{\beta_1 - k\beta_2}{1-k}, \frac{\gamma_1 - k\gamma_2}{1-k}\right)$.

Consecințe

1. Coordonatele baricentrice ale mijlocului segmentului $[Q_1, Q_2]$, $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ cu $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,2}$ sunt date de $M\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \frac{\beta_1+\beta_2}{2}, \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)$.
2. Dacă $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$,$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,3}$ sunt vârfurile unui triunghi, atunci centrul de greutate G al triunghiului are coordonatele baricentrice:
$$G\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}, \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3}, \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{3}\right).$$

Teorema 51 (Condiția de coliniaritate a doi vectori)

Fie vectorii $\overrightarrow{u_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\overrightarrow{u_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$,$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0$, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0$.

Vectorii $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Teorema 52 (Condiția de perpendicularitate a doi vectori)

Fie ABC un triunghi dat $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ și $\overrightarrow{u_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\overrightarrow{u_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, cu $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = 0$, $i = 1, 2$.

Atunci: $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)a^2 + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1)b^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)c^2 = 0$.

Consecință

Dacă $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, cu $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,2}$ și $Q_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, cu $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 0$, atunci:

$m\left(\widehat{Q_1 Q_0 Q_2}\right) = 90^0 \Leftrightarrow [(\beta_1 - \beta_0)(\gamma_1 - \gamma_0) + (\beta_2 - \beta_0)(\gamma_1 - \gamma_0)]a^2 + [(\alpha_1 - \alpha_0)(\gamma_2 - \gamma_0) + (\alpha_2 - \alpha_0)(\gamma_1 - \gamma_0)]b^2 + [(\alpha_1 - \alpha_0)(\beta_2 - \beta_0) + (\alpha_2 - \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0)]c^2 = 0$.

Teorema 53

Dacă $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$, atunci $|\vec{u}|^2 = -(\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2)$.

Consecință

Fie $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, cu $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,2}$.

Distanța dintre Q_1 și Q_2 este dată de $Q_1Q_2{}^2 = -\left[[(\beta_2-\beta_1)(\gamma_2-\gamma_1)]a^2 + [(\gamma_2-\gamma_1)(\alpha_2-\alpha_1)]b^2 + [(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1)]c^2\right]$.

Teorema 54

Fie $\vec{u}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ cu$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 0$, $i = \overline{1,2}$; atunci:
$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 - -\frac{1}{2}[(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)a^2 + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_2)b^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)c^2]$.

Teorema 55

Punctele $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$cu $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,3}$ sunt coliniare dacă și numai dacă:
$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_1} = \frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_3-\beta_1} = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_3-\gamma_1}$.

Dacă un numitor este 0, atunci se convine ca și numărătorul corespunzător să fie zero.

Teorema 56 (Condiția de coliniaritate a trei puncte)

Punctele Q_1, Q_2, Q_3 cu $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,3}$ sunt coliniare, dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Consecință

Punctul $P(x, y, z)$, $x + y + z = 1$ este situat pe dreapta Q_1Q_2, $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ cu $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,2}$, dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Observația 71

Din cele stabilite anterior, rezultă că ecuația unei drepte în coordonate baricetrice este $mx + ny + pz = 0$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

Vectorul director al dreptei $d: mx + ny + p = 0$ este dat de $\overrightarrow{u_d} = (n-p)\overrightarrow{r_A} + (p-m)\overrightarrow{r_B} + (m-n)\overrightarrow{r_C}$.

Observația 72

Coordonatele baricentrice ale vectorului director al dreptei $d: mx + ny + pz = 0$ sunt: $(n - p, p - m, m - n)$.

Teorema 57 (Condiția de paralelism a două drepte)

Dreptele $d_1: m_1x + n_1y + p_1z = 0$, $d_2: m_2x + n_2y + p_2z = 0$ sunt paralele dacă și numai dacă:

$\frac{m_1-n_1}{m_2-n_2} = \frac{n_1-p_1}{n_2-p_2} = \frac{p_1-m_1}{p_2-m_2}$,

sau:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema 55 (Condiția de perpendicularitate a două drepte)

Dreptele $d_1: m_1x + n_1y + p_1z = 0$ și $d_2: m_2x + n_2y + p_2z = 0$ sunt perpendiculare dacă și numai dacă:

$$[(p_1 - m_1)(m_2 - n_2) + (m_1 - n_1)(p_2 - m_2)]a^2 + [(n_1 - p_1)(m_2 - n_2) + (m_1 - n_1)(m_2 - p_2]\, b^2 + [(n_1 - p_1)\,(p_2 - m_2) + (p_1 - m_1)\,(n_2 - p_2)]c^2 = 0.$$

Teorema 59

Ecuația dreptei determinate de punctul $P(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ și de vectorul director $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Consecință

Ecuația dreptei care trece prin $P(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ și este paralelă cu dreapta $d \div mx + ny + pz = 0$ este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ n - p & p - m & m - n \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema 60 (Coordonatele baricentrice ale unui vector perpendicular pe un vector dat)

Dacă $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$, $\alpha+\beta+\gamma=0$ este un vector dat, iar u_1 este vectorul perpendicular pe $\vec{u}$, atunci:

$$u_{\perp}\big((\gamma-\beta)a^2-\alpha b^2+\alpha c^2,\beta a^2-\beta c^2+(\alpha-\gamma)b^2,\gamma b^2-\gamma a^2 + (\beta-d)c^2\big).$$

Teorema 61

În planul triunghiului ABC, considerăm punctul $Q(\alpha,\beta,\gamma)$, $\alpha+\beta+\gamma=1$. Notăm $\{M\}=AQ\cap BC$, $\{N\}=BQ\cap CA$, $\{P\}=CQ\cap AB$. Coordonatele baricentrice ale punctelor M,N,P sunt:

$$M\left(0,\frac{\beta}{\beta+\gamma},\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right);\ N\left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma},0,\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right);\ P\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\frac{\beta}{\alpha+\beta},0\right).$$

Remarcă

Dacă coordonatele punctului $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ nu sunt absolute, atunci coordonatele baricentrice (neabsolute) ale punctelor M,N,P sunt $M(0,\beta,\gamma)$, $N(\alpha,0,\gamma)$, $P(\alpha,\beta,0)$.

Teorema 62 (Condiția de concurență a trei drepte)

Fie dreapta d_i de ecuații:

$m_i x+n_i x+p_i z=0$, $i=\overline{1,3}$.

Dreptele d_1,d_2,d_3 sunt concurente, dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix}=0.$$

Consecință (Condiția de concurență a trei ceviene)

Dacă punctele Q_1, Q_2, Q_3 situate în planul triunghiului ABC au coordonatele $Q_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, $i=\overline{1,3}$, atunci dreptele AQ_1, BQ_2, CQ_3 sunt concurente dacă și numai dacă: $\alpha_3\beta_1\gamma_2=\alpha_2\beta_3\gamma_1$.

Teorema 63

Fie Q_1, Q_2 în planul triunghiului ABC astfel încât:

$\alpha_1\overrightarrow{Q_1A}+\beta_1\overrightarrow{Q_1B}+\gamma_1\overrightarrow{Q_1C}=0$,

$\alpha_2\overrightarrow{Q_2A} + \beta_2\overrightarrow{Q_2B} + \gamma_2\overrightarrow{Q_2C} = 0$;
atunci dreptele Q_1, Q_2 intersectează laturile triunghiului ABC în punctele $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in BA$ care verifică relațiile:
$\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = -\frac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_1\\ \beta_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}, \frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NA}} = -\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}}, \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}}.$

Teorema 64

Fie ABC un triunghi și Q un punct în planul său astfel încât $\alpha\overrightarrow{QA} + \beta\overrightarrow{QB} + \gamma\overrightarrow{QC} = \vec{0}$, unde $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ și $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Notăm $AQ \cap BC = \{M\}$, $BQ \cap AC = \{N\}$, $CQ \cap AB = \{P\}$.
Atunci: $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = -\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NA}} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$

Teorema 65

Fie triunghiul ABC și $M \in BC$, $N \in AC$, $P \in AB$, astfel încât: $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{-\gamma}{\beta}, \frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NA}} = \frac{-\alpha}{\gamma}, \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{-\beta}{\alpha}$. Atunci dreptele AM, BM, CP sunt concurente în punctul Q ale cărui coordonate baricentrice sunt $Q(\alpha, \beta, \gamma)$.

Consecință

Dacă AA', BB', CC' sunt trei ceviene concurente în punctul X și $\frac{A'B}{A'C} = \alpha$, $\frac{B'C}{B'A} = \beta$, $\frac{C'A}{C'B} = \gamma$, atunci $X\left(\frac{1}{1-\gamma+\gamma\alpha}, \frac{1}{1-\alpha+\alpha\beta}, \frac{1}{1-\beta+\beta\gamma}\right)$.

Teorema 66

Fie $P(\alpha\beta\gamma)$, $P'(\alpha'\beta'\gamma')$ două puncte izotomice în triunghiul ABC; atunci $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$.

Teorema 67

Fie $P(\alpha, \beta, \gamma)$, $P'(\alpha'\beta'\gamma')$ două puncte izogonale în triunghiul ABC cu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; atunci: $\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2}$

8.1.2 Coordonate baricentrice ale unor puncte importante din geometria triunghiului

– *CENTRUL DE GREUTATE*

$$G:\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

– *CENTRUL CERCULUI ÎNSCRIS*

$$I\left(\frac{a}{2p},\frac{b}{2p},\frac{c}{2p}\right)$$

– *ORTOCENTRUL*

$$H(\cot B\cot C,\cot A\cot C,\cot A\cot B)$$

– *CENTRUL CERCULUI CIRCUMSCRIS*

$$O\left(\frac{R^2\sin 2A}{2S},\frac{R^2\sin 2B}{2S},\frac{R^2\sin 2C}{2S}\right)$$

– *CENTRUL CERCULUI A-EXÎNSCRIS*

$$I_a\left(\frac{-a}{2(p-a)},\frac{b}{2(p-a)},\frac{c}{2(p-a)}\right)$$

– *PUNCTUL LUI NAGEL*

$$N\left(\frac{p-a}{p},\frac{p-b}{p},\frac{p-c}{p}\right)$$

– *PUNCTUL LUI GERGONNE*

$$\Gamma\left(\frac{(p-b)(p-c)}{r(4R+r)},\frac{(p-a)(p-c)}{r(4R+r)},\frac{(p-a)(p-b)}{r(4R+r)}\right)$$

– *PUNCTUL LUI LEMOINE*

$$K\left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$$

Observația 73

Coordonatele baricentrice de mai sus sunt absolute, coordonatele baricentrice relative sunt: $G(1,1,1)$, $I(a,b,c)$, $O(\sin 2A,\sin 2B,\sin 2C)$, $I_a(-a,b,c)$, $N(p-a,p-b,p-c)$, $\Gamma\left(\frac{1}{p-a},\frac{1}{p-b},\frac{1}{p-c}\right)$, $K(a^2,b^2,c^2)$.

8.1.3 Alte coordonate baricentrice și ecuații utile

– Coordonatele vârfurilor triunghiului de referință ABC sunt:

$$A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$$

– Coordonatele mijloacelor M, N, P ale laturilor triunghiului ABC de referință sunt:

$$M\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),N\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

– Coordonatele punctului $M \in BC, \frac{\overline{MB}}{\overline{uC}} = k$ sunt:

$$M\left(0,\frac{1}{1-k},\frac{-k}{1-k}\right)$$

– Coordonatele unui punct arbitrar $M \in BC$ sunt $M(0,b,c)$

– Coordonatele unui punct arbitrar $N \in CA$ sunt $N(a,0,c)$

– Coordonatele unui punct arbitrar $P \in AB$ sunt $P(a,b,0)$

– Ecuația dreptei BC este $x = 0$

– Ecuația dreptei AC este $y = 0$

– Ecuația dreptei AB este $z = 0$

– Ecuația unei drepte care trece prin A este $ny + pz = 0$

– Ecuația unei drepte care trece prin B este $mx + pz = 0$

– Ecuația unei drepte care trece prin C este $mx + ny = 0$

– Coordonatele unui vector de direcție BC sunt:

$$\vec{u}_{\overrightarrow{BC}}(0,-1,1)$$

– Coordonatele unui vector de direcție CA sunt:

$$\vec{u}_{\overrightarrow{CA}}(1,0,-1)$$

– Coordonatele unui vector de direcție AB sunt:

$$\vec{u}_{\overrightarrow{AB}}(-1,1,0)$$

– Coordonatele unui vector perpendicular pe BC sunt:

$$\vec{u}_{\perp BC}(2a^2,-a^2-b^2+c^2,-a^2+b^2-c^2)$$

– Coordonatele unui vector perpendicular pe CA sunt:

$$\vec{u}_{\perp CA}(-a^2-b^2+c^2,2b^2,a^2-b^2-c^2)$$

– Coordonatele unui vector perpendicular pe AB sunt:

$$\vec{u}_{\perp AB}(-a^2+b^2-c^2,a^2-b^2-c^2,2c^2)$$

– Ecuația mediatoarei laturii BC este:

$$(b^2-c^2)x + a^2y - a^2z = 0$$

– Ecuația mediatoarei laturii CA este:

$$-b^2x + (c^2-a^2)y + b^2z = 0$$

– Ecuația mediatoarei laturii AB este:

$$c^2x - c^2y + (a^2-b^2)z = 0$$

8.1.4 Aplicații

1. Într-un triunghi ABC, centrul de greutate G, centrul cercului înscris I și *punctul lui Nagel*, N, sunt puncte coliniare.

Soluție

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \mathrm{p-a} & \mathrm{p-b} & \mathrm{p-c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ p & p & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

2. Demonstrați că într-un triunghi ABC, *punctul lui Gergonne*, Γ, *punctul lui Nagel*, N, și punctul R, izotomicul ortocentrului H sunt puncte coliniare.

Soluție

Coordonatele baricentrice ale lui H sunt:
$(\cot B \cot C, \cot C \cot A, \cot A \cot B)$.
Coordonatele baricentrice ale izotomicului său H' sunt:
$\left(\frac{1}{\cot B \cot C}, \frac{1}{\cot C \cot A}, \frac{1}{\cot A \cot B}\right)$,
deci $H'(\tan B \tan C, \tan C \tan A, A \tan B)$.
Avem și $\Gamma\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$ și $N(p-a, p-b, p-c)$.
Coliniaritatea punctelor H', Γ și N este echivalentă cu:

$$\begin{vmatrix} \tan B \tan C & \tan C \tan A & \tan A \tan B \\ p-a & p-b & p-c \\ \frac{1}{p-a} & \frac{1}{p-b} & \frac{1}{p-c} \end{vmatrix} = 0.$$

Condiția precedentă este echivalentă cu:

$$D = \begin{vmatrix} \cot A & \cot B & \cot C \\ p-a & p-b & p-c \\ (p-a)^{-1} & (p-b)^{-1} & (p-c)^{-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Se știe că $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2S} = \frac{P(p-a)-(p-b)(p-c)}{2S}$ și analoagele.
$S = \text{Aria}\Delta ABC$.

$$D = \frac{P}{2S}\begin{vmatrix} p-a & p-b & p-c \\ p-a & p-b & p-c \\ (p-a)^{-1} & (p-b)^{-1} & (p-c)^{-1} \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{2S}\begin{vmatrix} (p-a)^{-1} & (p-b)^{-1} & (p-c)^{-1} \\ p-a & p-b & p-c \\ (p-a)^{-1} & (p-b)^{-1} & (p-c)^{-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Observația 74

Punctul R, izotomicul ortocentrului unui triunghi se numește și *retrocentrul unui triunghi*.

3. Dacă Q_1, Q_2 sunt puncte în planul triunghiului ABC, $Q_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ cu $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$, $i = \overline{1,2}$, deduceți formula:

$$Q_1Q_2^2 = \alpha_2 Q_1A^2 + \beta_2 Q_1B^2 + \gamma_2 Q_1C^2 - \sum a^2\beta_2\gamma_2.$$

Soluție

Fie $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ coordonatele baricentrice ale vârfurilor.
Avem:

$$Q_1Q_2^2 = -a^2(\beta_2-\beta_1)(\gamma_2-\gamma_1) - b^2(\gamma_2-\gamma_1)(\alpha_2-\alpha_1) - c^2(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1).$$

Efectuând calculele, se obține:

$$Q_1Q_2^2 = -\sum a^2\beta_2\gamma_2 - \sum a^2\beta_1\gamma_1 + \sum a^2\beta_1\gamma_2 + \sum a^2\beta_2\gamma_1 \qquad (1)$$

Calculăm:

$$Q_1A^2 = -a^2\beta_1\gamma_1 + b^2\gamma_1(1-\alpha_1) + c^2\beta_1(1-\alpha_1) = a^2\beta_1\gamma_1 - b^2\gamma_1\alpha_1 - c^2\alpha_1\beta_1 + b^2\gamma_1 + c^2\beta_1.$$

Deci:

$$Q_1A^2 = -\sum a^2\beta_1\gamma_1 + b^2\gamma_1 + c^2\beta_1.$$

Analog:

$$Q_1B^2 = -\sum a^2\beta_1\gamma_1 + c^2\alpha_1 + a^2\gamma_1.$$

$$Q_1C^2 = -\sum a^2\beta_1\gamma_1 + a^2\beta_1 + b^2\gamma_1.$$

Evaluăm:

$$\alpha_2 Q_1A^2 + \beta_2 Q_1B^2 + \gamma_2 Q_1C^2.$$

Avem:

$$\begin{aligned}\alpha_2 Q_1A^2 + \beta_2 Q_1B^2 + \gamma_2 Q_1C^2 &= a^2\left(-\sum a^2\beta_1\gamma_1 + b^2\gamma_1 + c^2\beta_1\right) \\ &+ \beta_2\left(-\sum a^2\beta_1\gamma_1 + c^2\alpha_1 + a^2\gamma_1\right) \\ &+ \gamma_2\left(-\sum a^2\beta_1\gamma_1 + a^2\beta_1 + b^2\gamma_1\right) \\ &= -\sum a^2\beta_1\gamma_1 + \sum a^2\beta_1\gamma_2 + \sum a^2\beta_2\gamma_1 . (2)\end{aligned}$$

Comparând relațiile (1) și (2), găsim că:

$$\boxed{Q_1Q_2^2 = \alpha_2 Q_1A^2 + \beta_2 Q_1B^2 + \gamma_2 Q_1C^2 - \sum a^2\beta_2\gamma_2}. \qquad (3)$$

4. Dacă ABC este un triunghi oarecare dat, O și I sunt respectiv centrele cercurilor sale circumscris și înscris; demonstrați relația: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Soluție

Folosim formula (3) din aplicația precedentă, în care $Q_1 = Q$ și $Q_2 = I$. Coordonatele baricentrice ale lui I sunt $\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}$.

Avem $OI^2 = R^2 - \sum a^2 \frac{bc}{4p^2} = R^2 - \frac{abc}{4p^2} \sum a = R^2 - \frac{abc}{2p}$.

Ținând cont de formulele cunoscute $S = pr$ și $abc = 4RS$, obținem:

$OI^2 = R^2 - \frac{4RS}{2p} = R^2 - 2Rr$.

Observația 75

Relația obținută se numește *relația lui Euler*. Din ea rezultă că, într-un triunghi, $R \geq 2r$ (*inegalitatea lui Euler*).

5. Fie ABC un triunghi oarecare, O centrul său circumscris, iar N punctul lui Nagel. Arătați că $ON = R - 2r$ (R este raza cercului circumscris, iar r este raza cercului înscris în triunghiul ABC).

Soluție

Folosim formula (3) din aplicația 3, în care $Q_1 = Q$ și $Q_2 = N$. Coordonatele baricentrice ale punctului lui Nagel sunt $N\left(\frac{p-a}{p}, \frac{p-b}{p}, \frac{p-c}{p}\right)$. Avem:

$ON^2 = R^2 - \sum a^2 \frac{(p-b)(p-c)}{p^2}$.

$$ON^2 = R^2 - \frac{1}{4p^2}\sum a^2(a-b+c)(a+b-c) = R^2 - \frac{1}{4p^2}\sum a^2[a^2-(b-c)^2]$$

$$= R^2 - \frac{1}{4p^2}\sum a^2(a^2-b^2-c^2+2bc) = R^2$$

$$+ \frac{1}{4p^2}\left[2\sum b^2c^2 - \sum a^4 - 2abc(a+b+c)\right]$$

$$= R^2 + \frac{1}{4p^2}(a6S^2 - 4pabc) = R^2 + \frac{1}{4p^2}(16p^2r^2 - 16p^2R \cdot r)$$

$$= R^2 + 4r^2 - 4pr - (R-2r)^2$$

S-au folosit formulele:

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$$

$abc = 4R \cdot S$ și $S = p \cdot r$.

8.2 Anexa 2: Asemănarea a două figuri

Stadiul proprietăților geometrice ale figurilor plane face adesea apel la transformările planului care măresc (sau micșorează) distanța dintre puncte, dar care păstrează forma figurilor.

8.2.1 Proprietățile asemănării în plan

Definiția 50

O aplicație $a_k: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, unde $k \in \mathbb{R}_+^*$ se numește asemănare de raport k dacă $a_k(A)a_k(B) = k \cdot AB$, $(\forall) A, B \in \mathcal{P}$.
Vom nota $a_k(A) = A'$, $a_k(B) = B'$ și vom spune despre A' și B' că sunt omoloagele sau similarele punctelor A, B.
Raportul constant k se numește raport de asemănare sau de similitudine.
Din definiție rezultă că, dacă ABC este un triunghi dat și $A'B'C'$ este triunghiul obținut din ABC, aplicând acestuia asemănarea a_k, având $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{C'C'} = k$, triunghiul $A'B'C'$ este *asemenea* cu triunghiul ABC.
Notăm $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.
În plus, dacă considerăm triunghiul ABC orientat în sensul că vârfurile A, B, C sunt citite în sens trigonometric și dacă A', B', C' au aceeași orientare, se spune că asemănarea este directă.
Dacă asemănarea este inversă, ABC și $A'B'C'$ sunt invers orientate.
Pe parcursul acestei prezentări, vom spune că două figuri sunt asemenea în loc de direct asemenea și vom face mențiunea special în cazul figurilor invers asemenea.

Propoziția 76

O asemănare transformă trei puncte coliniare în alte trei puncte coliniare păstrând ordinea punctelor.

Demonstrație

Fie A, B, C trei puncte coliniare și fie $A' = a_k(A)$, $B^{'} = a_k(B)$ și $C^{'} = a_k(C)$ similarele lor.

Punctele A, B, C sunt în ordinea în care au fost scrise, deci $AB + BC = AC$, având $A'B' = a_k(A)a_k(B) = KAB$, $B'C' = a_k(B)a_k(C) = KBC$ și $A'C' = a_k(A)a_k(C) = KAC$, rezultă că $A'B' + B'C' = A'C'$ dacă A', B', C' sunt coliniare în ordinea A' - B' - C'.

Remarca 27

Din proprietatea precedentă, rezultă că o asemănare transformă un segment într-un alt segment, o semidreaptă într-o altă semidreaptă, o dreaptă într-o altă dreaptă (păstrându-se ordinea punctelor).

Proprietatea 77

O asemănare transformă două drepte paralele în alte două drepte paralele.

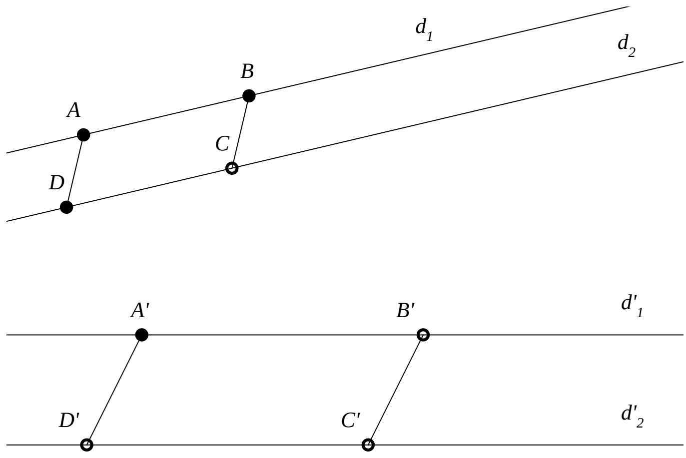


Figura 114

Demonstrație

Fie $d_1 \parallel d_2$ și $d_1 = a_k(d_1)$, $d_2 = a_k(d_2)$ (vezi *Figura 114*). Dacă $A, B \in d_1$, $C, D \in d_2$ astfel încât $ABCD$ este paralelogram, atunci avem $A' = a_k(A)$, $B' = a_k(B)$, $C' = a_k(C)$, $D' = a_k(D)$. Cum $A'B' = k \cdot AB$, $C'D' = k \cdot CD$ și $AB = CD$, rezultă că $A'B' = C'D'$ (1).

De asemenea, $A'D' = k \cdot AD$, $B'C' = k \cdot BC$ și $AD = BC$, rezultă că $A'D' = B'C'$ (2). Relațiile (1) și (2) arată cu $A'B'C'D'$ este un paralelogram, deci $d_1{}' \parallel d_2{}'$.

Remarca 28

Imaginea unui unghi $\widehat{AOB}$ printr-o asemănare a_k este un unghi $\widehat{A'O'B'}$ și $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$.

Definiția 51

Două figuri $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$ ale planului $\mathcal{P}$ se numesc figuri asemenea cu raportul de asemănare k dacă există o asemănare $a_k: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ astfel încât $a_k(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$. Vom nota $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$ și citim $\mathcal{F}$ este asemenea cu$\mathcal{F}'$.

Observația 76

Dacă $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$, atunci orice triunghi ABC cu vârfurile aparținând figurii $\mathcal{F}$ are ca imagine un triunghi asemenea $A'B'C'$ cu vârfurile aparținând figurii $\mathcal{F}'$.

În două figuri asemenea, segmentele omoloage sunt proporționale cu raportul de asemănare, iar unghiurile omoloage sunt congruente.

Definiția 52

Se numește centru de similitudine (sau de asemănare sau punct dublu) pentru două figuri asemenea punctul unei figuri care coincide cu omologul (similarul) său din cealaltă figură.

Remarca 29

Din definiția precedentă, rezultă că, dacă două figuri $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$ sunt asemenea și dacă O este centrul lor de similitudine, iar AB și $A'B'$ sunt două segmente omoloage din figurile $\mathcal{F}$ respectiv $\mathcal{F}'$, atunci triunghiurile OAB și $OA'B'$ sunt asemenea.

Propoziția 78

Dacă AB și $A'B'$ sunt două segmente omoloage din figurile asemenea $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$, astfel încât dreptele AB și $A'B'$ se intersectează într-un punct M, atunci intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor $AA'M$ și $BB'M$ conține centrul asemănării.

Demonstrație

Notăm cu O al doilea punct comun cercurilor circumscrise triunghiurilor $AA'M$ și $BB'M$ (vezi *Figura 115*).

Patrulaterul $MBB'O$ este înscris, deci $\sphericalangle MBO \equiv \sphericalangle MB'O$ (1). De asemenea, avem că $\sphericalangle BMB' \equiv \sphericalangle BOB'$ (1). Patrulaterul $MAA'O$ este înscris prin urmare rezultă că $\sphericalangle AMA' \equiv \sphericalangle AOA'$ (2). Din relațiile (2) și (3), reținem că $\sphericalangle BOB' \equiv \sphericalangle AOA'$ (4).

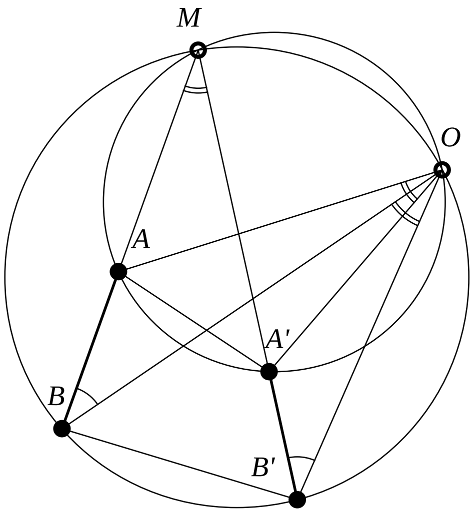


Figura 115

Deoarece $\widehat{AOA'} = \widehat{AOB} + \widehat{BOA'}$și $\widehat{BOB'} = \widehat{BOA'} + \widehat{A'OB'}$, obținem că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$ (5).

Relațiile (1) și (5) arată că $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$ și, în consecință, O este punctul dublu al asemănării.

Remarca 30

i) Omotetia este un caz particular de asemănare.
ii) În cazul omotetiei, centrul de similitudine este centrul omotetiei.

Teorema68

Două figuri asemenea pot fi făcute omotetice printr-o rotație în jurul centrului lor de similitudine.

Demonstrație

Dacă figurile $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$ sunt asemenea și au centrul de similitudine O și raportul de asemănare este k, rotim figura $\mathcal{F}'$ în jurul punctului O cu un unghi $\varphi = măs(\widehat{AOA'})$ unde A și A' sunt puncte omoloage ce aparțin figurilor $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}'$. Atunci punctul A' va ocupa poziția A'' pe raza OA, de asemenea din cauza asemănării $\Delta AOB \sim \Delta A'OB'$, punctul B' va ocupa poziția B'' pe raza OB și vom avea $\frac{OB''}{OB} = k$. Raționamentul aplicat lui B' este valabil pentru orice punct $X' \in \mathcal{F}'$, aceasta va trece după rotație în X'' pe raza omoloagă OX și vom avea $\frac{OX''}{OX} = k$. Figura $\mathcal{F}'$ ocupă după rotație o nouă poziție $\mathcal{F}''$ și $\mathcal{F}''$ este omotetică figurii $\mathcal{F}$ prin omotetia de centru O și de raport k.

Remarca 31

i) Două drepte omoloage AB și $A'B'$ formează între ele un unghi de măsură φ egală cu măsura unghiului de rotație care transformă figurile asemenea în figuri omotetice.

ii) Raportul distanțelor centrului de similitudine, la două drepte omoloage AB și $A'B'$ este constant și egal cu raportul de asemănare.

Teorema69

Locul geometric al centrelor de similitudine a două cercuri neconcentrice și necongruente date este cercul cu diametrul determinat de centrele de omotetie a celor două cercuri.

Demonstrație

Fie $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $r_1 < r_2$, cercurile date (vezi *Figura 116*).

NotămA și B centrele lor de omotetie directă și inversă. Dacă M este un centru de similitudine a celor două cercuri, atunci $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{r_1}{r_2}$ (evident punctele A și B aparțin locului geometric deoarece ele sunt centre de similitudine).

Din $\frac{BO_1}{BO_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{MO_1}{MO_2}$ rezultă că MB este bisectoare interioară în triunghiul MO_1O_2, iar din $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{MO_1}{AM}$, obținem că MA este bisectoare exterioară în triunghiul MO_1O_2.

Deoarece bisectoarele interioară și exterioară corespunzătoare aceluiași unghi al unui triunghi sunt perpendiculare, avem că $m(\widehat{AMB}) = 90^0$ și în consecință punctul M aparține cercului de diametru $[AB]$.

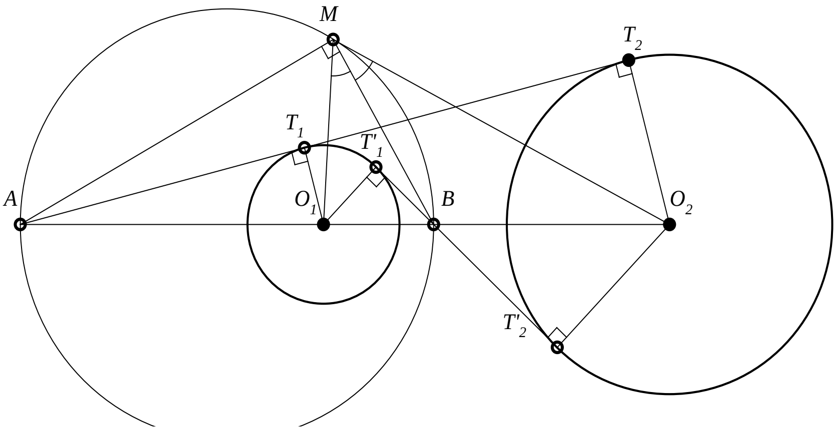


Figura 116

Remarca 32

i) Dacă cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sunt secante în punctele M și N, atunci evident aceste puncte sunt centre de similitudine pentru cercurile date.

ii) Dacă ABC este un triunghi oarecare dat, locul geometric al punctelor M din panul triunghiului ABC pentru care $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ este un cerc, numit *cercul A-Apollonius* al triunghiului ABC.

8.2.2 Aplicații

1. Fie $OA_1B_1C_1$ și $OA_2B_2C_2$ două pătrate în plan cu aceeași orientare. Demonstrați că A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.

Soluție

$\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OA_2B_2$. Deoarece $[A_1B_1]$ și $[A_2B_2]$ sunt segmente analoage în pătratele direct asemenea date și O este punctul de similitudine al lor, rezultă că A_1A_2 și B_1B_2 se intersectează în al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise pătratelor, punct ce a fost notat cu M în *Figura 117*. Același raționament se aplică și segmentelor omoloage B_1C_1 și B_2C_2, deci și B_1B_2 se intersectează cu C_1C_2 în M.

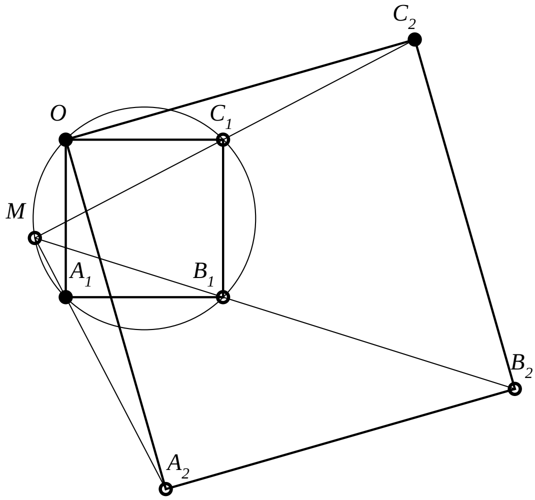


Figura 117

2. Fie ABC un triunghi și A_1 - B_1 - C_1 o transversală ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$). Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, ABC, BA_1C_1 și A_1CB_1 au un punct comun (*cercurile lui Miquel*).

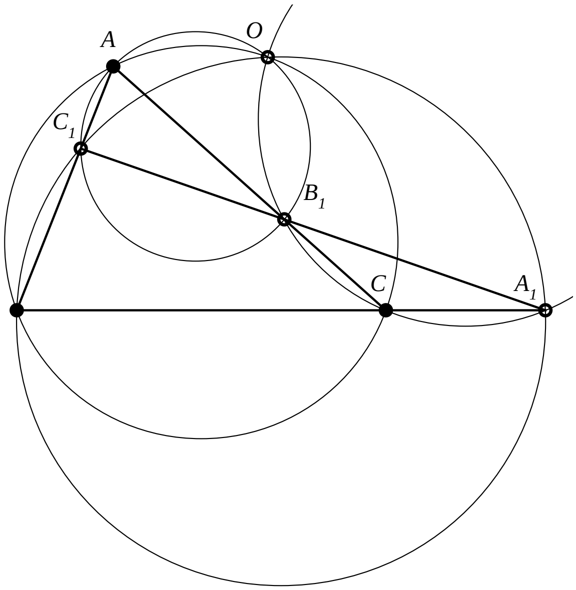


Figura 118

Soluție

Fie O al doilea punct comun al cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1 și ABC. Acest punct este centru de similitudine al segmentelor omoloage (C_1B) și (B_1C) (vezi *Figura 118*).

Deci există o asemănare a astfel încât $a(O) = O$, $a(C_1) = B_1$, $a(B) = C$. Există de asemenea o asemănare a' astfel încât $a'(O) = O$, $a'(C_1) = B_1$, $a'(B) = C$, atunci cercurile circumscrise triunghiurilor B_1A_1C și C_1A_1B trec prin punctul O.

8.3 Anexa 3: Punctul, triunghiul și cercurile lui Miquel

8.3.1 Definiții și teoreme

Teorema 70 (J. Steiner, 1827)

Cele patru cercuri circumscrise triunghiurilor formate de patru drepte care se intersectează două câte două trec printr-un același punct (*punctul lui Miquel*).

Demonstrație

Fie A, B, C și A_1, B_1, C_1 punctele de intersecție a celor patru drepte din enunț (patrulaterul $BCB_1C_1A_1A$ este patrulater complet, vezi *Figura 119*). Notăm cu M al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1 și CB_1A_1.

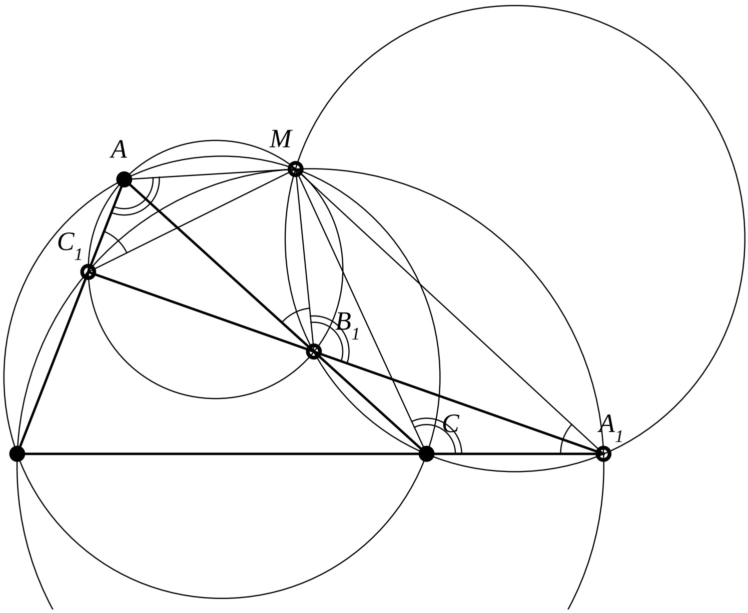


Figura 119

Patrulaterele MAC_1B_1 și MB_1CA_1 fiind inscriptibile obținem relația:

$\sphericalangle MC_1A \equiv \sphericalangle MB_1A \equiv \sphericalangle MA_1C = \varphi.$ (1)

Din (1), reținem că:

$\sphericalangle MC_1A \equiv \sphericalangle MA_1B,$ (2)

relație care arată că patrulaterul MC_1BA_1 este inscriptibil, prin urmare cercul circumscris BA_1C_1 trece prin punctul M. Tot din inscriptibilitatea patrulaterelor anterioare, obținem că:

$\sphericalangle MAC_1 \equiv \sphericalangle MB_1A_1 \equiv \sphericalangle MCA_1.$ (3)

Reținând din această relație că: $\sphericalangle MAC_1 \equiv \sphericalangle MCA_1$, conchidem că patrulaterul $MABC$ este inscriptibil, în consecință cercul circumscris triunghiului ABC trece prin M și teorema este demonstrată.

Observația 77

a) Punctul M de concurență a celor 4 cercuri se numește *punctul lui Miquel* al patrulaterului complet $BCB_1C_1A_1A$.
b) Teorema precedentă poate fi reformulată și astfel: Cercurile circumscrise celor patru triunghiuri ale unui patrulater complet au un punct comun.

Teorema 71 (J. Steiner, 1827)

Centrele cercurilor circumscrise celor patru triunghiuri ale unui patrulater complet și *punctul lui Miquel* al acestui patrulater sunt cinci puncte conciclice (*cercul lui Miquel*).

Demonstrație

Fie O, O_1, O_2, O_3 respectiv centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CB_1A_1 (vezi *Figura 119*). Am notat $m\left(\widehat{MC_1A}\right) = \varphi$, atunci $m\left(\widehat{MO_1A}\right) = 2\varphi$.

Deoarece $OO_1 \perp AM$ rezultă că $m\left(\widehat{MO_1O}\right) = 180^0 - \varphi$. Pe de altă parte, $m\left(\widehat{MA_1B}\right) = \varphi$ și $m\left(\widehat{MO_2B}\right) = 2\varphi$, iar $O_2O \perp MM$ conduce la$m\left(\widehat{MO_2O}\right) = \varphi$. Din $m\left(\widehat{MO_1O}\right) = 180^0 - \varphi$ și $m\left(\widehat{MO_2O}\right) = \varphi$, reiese că patrulaterul MO_1OO_2 este inscriptibil, dacă punctele M, O_1, O, O_2 sunt conciclice.

Un raționament analog conduce la $m\left(\widehat{MO_3O}\right) = \varphi$ și cum $m\left(\widehat{MO_1O}\right) = 180^0 - \varphi$, avem că punctele M, O_1, O, O_3. Obținem că punctele M, O, O_1, O_2, O_3 sunt conciclice.

Cercul lor se numește *cercul lui Miquel*.

Remarca 33

a) Din *Teorema 70*, se observă că punctele coliniare A_1 - B_1 - C_1 sunt proiecțiile punctului M (ce aparține cercului circumscris triunghiului ABC), sub unghiul de măsură φ și în același sens (măsurat) pe laturile triunghiului ABC. Are loc astfel *Teorema Simson* generalizată (de unghi φ).

Teorema Simson generalizată a fost demonstrată de L. Carnot și se enunță astfel:
Proiecțiile unui punct al cercului circumscris sub același unghi și sens pe laturile triunghiului sunt coliniare.

În cazul *Figurii 119*, avem:

$m(MA_1, BC) = m(MA_1, CA) = m(MC_1, AB) = \varphi.$

Se poate demonstra că *Teorema 70* și *Teorema Simson* generalizată sunt echivalente.

b) Echivalenta teoremelor precedente conduce la:

Teorema 72

Cercurile descrise pe coardele MA, MB, MC ale cercului circumscris triunghiului ABC dat capabile de același unghi φ se intersectează două câte două în punctele coliniare A_1, B_1, C_1 situate pe laturile triunghiului ABC.

Această teoremă pentru cazul unghiului drept este datorată matematicianului irlandez G. Salmon (1819-1904).

În *Teorema 70*, punctele A_1 - B_1 - C_1 ce aparțin laturilor triunghiului ABC sunt coliniare; arătăm în continuare că și în ipoteza când A_1, B_1, C_1 nu sunt coliniare putem defini *punctul lui Miquel*.

Teorema 73

Dacă punctele A_1, B_1, C_1 aparțin repectiv laturilor BC, CA și AB ale triunghiului ABC, atunci cercurile circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1 și CA_1B_1 trec printr-un același punct (punctul lui Miquel).

Demonstrație

Considerăm A_1, B_1, C_1 pe laturile (BC), (CA), (AB) (vezi *Figura 120*). Notăm cu M punctul al doilea de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor AC_1B_1 și BC_1A_1. Patrulaterul AC_1MB_1 și BC_1MA_1 sunt inscriptibile, prin urmare:

$\sphericalangle MB_1A \equiv \sphericalangle MC_1B,$ (1)

$\sphericalangle MC_1B \equiv \sphericalangle MA_1C.$ (2)

Relațiile precedente implică:

$\sphericalangle MB_1A \equiv \sphericalangle MA_1C,$ (3)

iar această relație arată că punctele M, A_1, C, B_1 sunt pe un cerc.

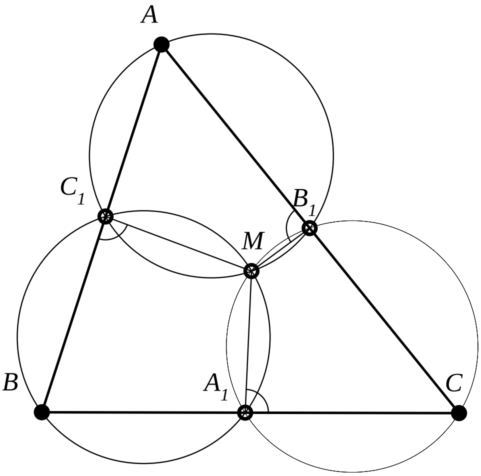


Figura 120

Observația 78

a) Teorema se demonstrează în același mod și dacă unul dintre punctele A_1, B_1, C_1 sunt pe o latură, iar celelalte două pe prelungirile celorlalte două laturi.

b) Triunghiul $A_1B_1C_1$ a fost numit *triunghiul lui Miquel* corespunzător punctului M al lui Miquel, iar cercurile circumscrise triunghiurilor AC_1B_1, BC_1A_1 și CA_1B_1 *cercurile lui Miquel*.

Propoziția 79

Dacă M este un punct fixat în planul triunghiului ABC, atunci putem construi oricâte *triunghiuri Miquel* dorim, corespunzătoare punctului M.

Într-adevăr, putem construi din M drepte MA_1, MB_1, MC_1 care fac cu BC, CA, AB același unghi măsurat în același sens, sau putem proceda astfel:

Ducem prin M și A un cerc oarecare care taie AB și AC în C_1 și B_1. Construim cercul circumscris triunghiului BMC_1; acesta va intersecta BC a doua oară în punctul A_1. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este un *triunghi Miquel* corespunzător punctului M.

Teorema 71

Toate *triunghiurile lui Miquel* corespunzătoare unui punct M dat în planul triunghiului ABC sunt direct asemenea, iar punctul M este punctul dublu (centrul de asemănare al lor):

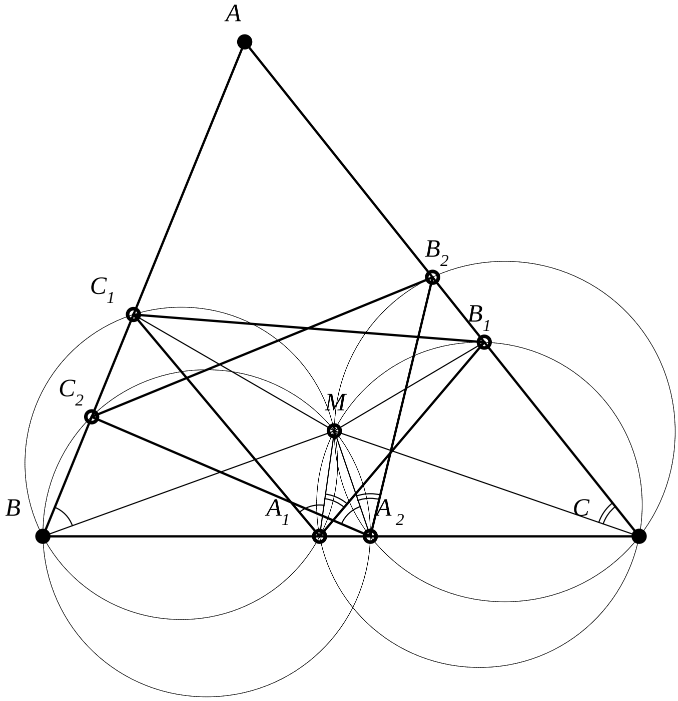


Figura 121

Demonstrație

Fie M un *punct Miquel* pentru triunghiul ABC și $A_1B_1C_1$ *triunghiul Miquel* corespunzător acestui punct M presupus fixat. Atunci cunoaștem coordonatele unghiulare ale lui M, deci unghiurile $\widehat{BMC}$, $\widehat{CMA}$, $\widehat{AMB}$ (vezi *Figura 121*). Nu este dificil de stabilit că:

$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle BMC - \sphericalangle BAC;$
$\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle AMC - \sphericalangle ABC;$
$\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle AMB - \sphericalangle ACB.$

După cum se observă, măsurile acestor unghiuri sunt bine determinate când punctul M este fixat. Dacă vom considera triunghiul $A_2B_2C_2$ – *triunghi Miquel* corespunzător punctului M, unghiurile $\sphericalangle B_1A_2C_2$, $\sphericalangle A_2B_2C_2$ și $\sphericalangle B_2C_2A_2$ vor fi date de aceleași formule, prin urmare $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.

Apoi, $\sphericalangle A_1MB_1 \equiv \sphericalangle A_2MB_2 = 180^0 - m(\hat{C})$, $\sphericalangle MA_1B_1 \equiv \sphericalangle MCA$, $\sphericalangle MA_2B_2 \equiv \sphericalangle MCA$, în consecință $\Delta MA_1B_1 \sim \Delta MA_2B_2$, ceea ce arată că punctul M este centru de asemănare al celor duoă *triunghiuri Miquel*.

8.3.2 Aplicații

1. Fie M un *punct Miquel* în interiorul triunghiului ABC și fie $A_1B_1C_1$ *triunghiul Miquel* corespunzător lui. Notăm cu A_2, B_2, C_2 intersecțiile semidreptelor $(AM$,$(BM$, $(CM$ cu cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstrați că $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$.

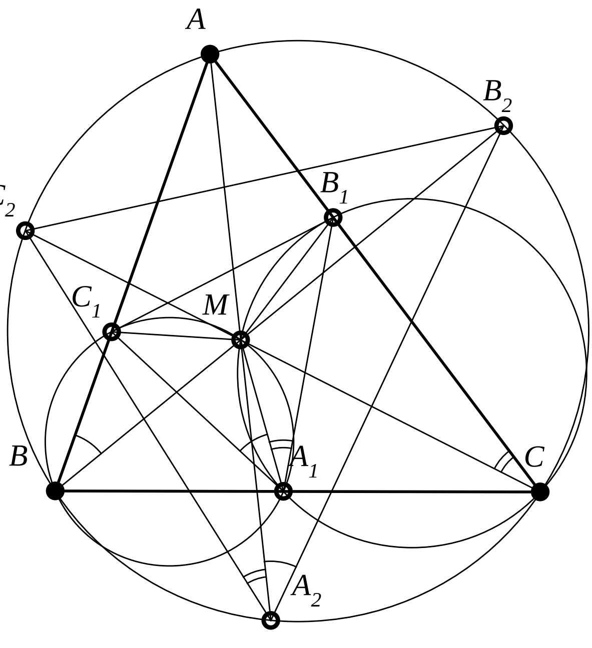


Figura 122

Soluție

$\sphericalangle B_2A_2C_2 = \sphericalangle B_2A_2A + \sphericalangle AA_2C_2$ (vezi *Figura 122*). Dar $\sphericalangle B_2A_2A = \sphericalangle B_2BA$ și $\sphericalangle B_2BA \equiv \sphericalangle MA_1C_1$, $\sphericalangle AA_2C_2 \equiv \sphericalangle ACC_2$ și $\sphericalangle ACC_2 \equiv \sphericalangle MA_1B_1$. Obținem că $\sphericalangle B_2A_2C_2 \equiv \sphericalangle B_1A_1C_1$. Analog se arată că $\sphericalangle A_2B_2C_2 \equiv \sphericalangle A_1B_1C_1$.

2. Fie M *punctul lui Miquel* corespunzător *triunghiului Miquel* $A_1B_1C_1$, cu vârfurile pe laturile triunghiului ABC. Trei ceviene concurente în punctul P din interiorul triunghiului ABC intersectează a doua oară cercurile Miquel în punctele A_2, B_2, C_2. Demonstrați că punctele A_2, B_2, C_2, M sunt conciclice.

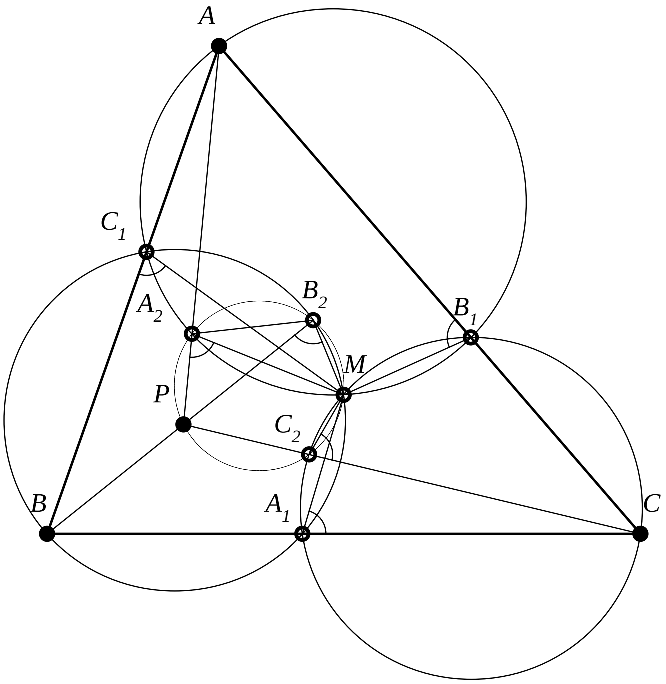


Figura 123

Soluție

În Figura 123, fie A_2 intersecția cevienei AP cu *cercul Miquel* (AB_1C_1). Notăm $\widehat{MA_1C} = \widehat{MB_1A} = \widehat{MC_1B} = \varphi$. Avem $\sphericalangle MA_2P = 180^0 - \varphi$, $\sphericalangle MB_2P = 180^0 - \sphericalangle BB_2M = 180^0 - \varphi$. Rezultă că $\sphericalangle MC_2P = \varphi$, deci punctele M, A_2, B_2, C_2, P sunt conciclice.

3. Trei cercuri trec respectiv prin vârfurile A, B, C ale triunghiului ABC se intersectează toate într-un punct S din interiorul triunghiului și a doua oară în punctele D, E, F ce aparțin laturilor (BC), (CA), (AB). Prin A, B, C se duc trei paralele cu o direcție dată ce intersectează a doua oară fiecare cerc respectiv în punctele P, Q și R. Demonstrați că punctele P, Q, R sunt coliniare.

Van Khea – Peru, Geometrico 2017

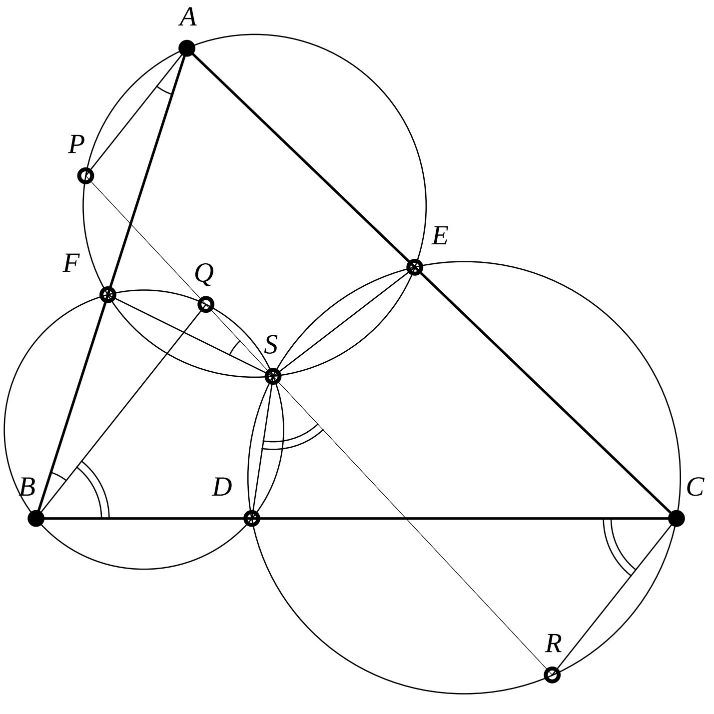


Figura 124

Soluție

Patrulaterul $APFS$ este înscris, deci $\sphericalangle PAF \equiv \sphericalangle FSP$. (1)

Din paralelismul dreptelor AP și BQ, reținem că $\sphericalangle PAF \equiv \sphericalangle FBQ$. (2)

Patrulaterul $FBSQ$ este înscris, prin urmare $\sphericalangle FBQ \equiv \sphericalangle FSQ$. (3)

Relațiile (1) – (3) conduc la $\sphericalangle PSF \equiv \sphericalangle FSQ$. (4)

Această relație arată că punctele P, Q, S sunt coliniare. Deoarece patrulaterul $BQSD$ este înscris, avem că $\sphericalangle QBD \equiv \sphericalangle DSR'$. (5)

Am notat cu R' intersecția dreptei QS cu cercul ce trece prin C și S(vezi *Figura 124*).

Patrulaterul $DSCR'$ este înscris, prin urmare $\sphericalangle DSR' \equiv \sphericalangle DCR'$. (6)

Relațiile (5) și (6) conduc la $\sphericalangle QBD \equiv \sphericalangle DCR'$. (7)

Pe de altă parte, BQ este paralelă cu CR, deci: $\sphericalangle QBD \equiv \sphericalangle DCR$. (8)

Relațiile (7) și (8) arată că R'=R. Având P, Q, S coliniare și Q, S, R coliniare rezultă că P, Q, R coliniare.

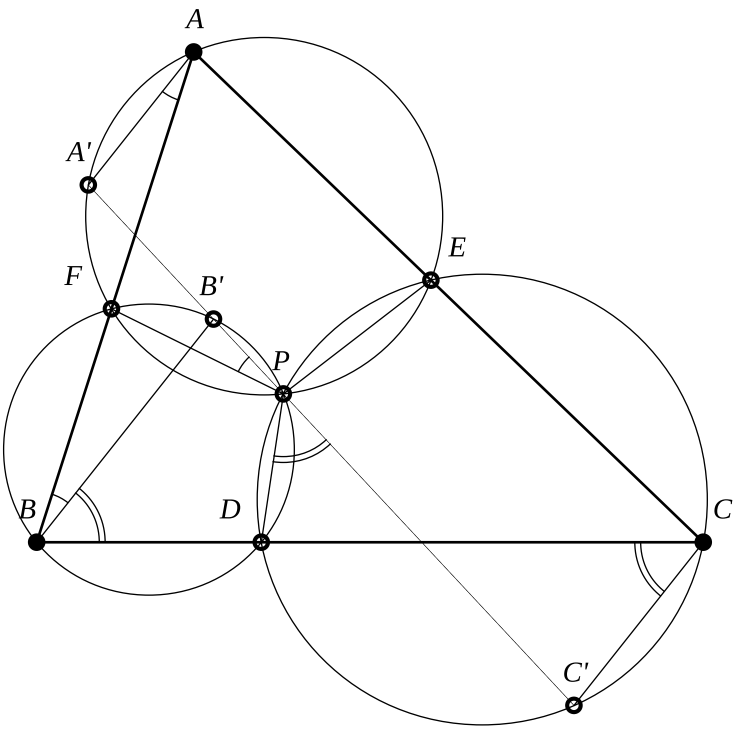


Figura 125

4. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Cercurile circumscrise triunghiurilor AEF, BDF și CDE se intersectează într-un punct P. O dreaptă arbitrară ce trece prin punctul P intersectează a doua oară cercurile circumscrise triunghiurilor AEF, BDF și CDE respectiv în punctele A', B' și C'. Arătați că dreptele AA', BB', CC' sunt paralele.

Mihai Miculița – O reciprocă a unei probleme de Van Khea

Soluție (Mihai Miculița)

Patrulaterul $AA'FP$ este înscris, atunci $\sphericalangle FAA' \equiv \sphericalangle FPA'$. (1)

Patrulaterul $BPB'F$ este înscris, deci $\sphericalangle FPA' \equiv \sphericalangle FBB'$. (2)

Din relațiile (1) și (2), obținem că $\sphericalangle FAA' \equiv \sphericalangle FBB'$. Aceasta implică în consecință că $AA' \parallel BB'$(vezi *Figura 12*5). (3)

Patrulaterul $PB'BD$ este înscris, deci $\sphericalangle B'BD \equiv \sphericalangle DPC$. (4)

Patrulaterul înscris $PDC'C$ conduce la $\sphericalangle DPC \equiv \sphericalangle DCC'$. (5)

Relațiile (4) și (5) implică $\sphericalangle B'BD \equiv \sphericalangle DCC'$.

Consecința este că$BB' \parallel CC'$. (6)

În sfârșit, relațiile (3) și (6) conduc la concluzia cerută, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

9

PROBLEME ÎN LEGĂTURĂ CU TRIUNGHIURILE ORTOLOGICE

9.1 Probleme propuse

1. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt simetrice față de dreapta d. Demonstrați că ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri ortologice.

2. În triunghiul ABC notăm cu E și F contactele cercului înscris (de centru I) cu AC, respectiv AB. Fie M, N, P mijloacele segmentelor BC, CE și respectiv BF. Demonstrați că perpedincularele duse din punctele I, B și C respectiv pe NP, PM și MN sunt concurente.

Ion Pătrașcu

3. Fie O_1, O_2, O_3 respectiv centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MBC, MAC, MAB, unde M este un punct oarecare în interiorul triunghiului ABC. Demonstrați că triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sunt ortologice, precizați centrele de ortologie.

4. Fie ABC un triunghi nedreptunghic, H ortocentrul său și P un punct pe AH. Perpendicularele duse din H pe BP și pe CP intersectează AC și AB în B_1, respectiv C_1. Demonstrați că dreptele B_1C_1 și BC sunt paralele.

Ion Pătrașcu

5. Dacă P și P' sunt puncte în interiorul triunghiului ABC și $A'B'C'$și $A''B''C''$ sunt triunghiurile pedale ale lor, iar mulțimea centrelor de ortologie a triunghiurlor ABC, $A'B'C'$ și ABC cu $A''B''C''$ este formată numai din punctele P, P', arătați că punctele P și P' sunt conjugate izogonal.

6. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, iar AD înălțime a sa, $D \in (BC)$. Notăm K mijocul lui AD, iar P proiecția lui K pe mediatoarea laturii BC. Fie Q intersecția semidreptei $(AP$ cu cercul circumscris triunghiului ABC (al cărui centru este punctul O), iar S simetricul lui Q față de BC. Demonstrați că *dreapta lui Simson* a punctului S este paralelă cu OK.

Ion Pătrașcu

7. Fie ABC un triunghi echilateral. Să se găsească pozițiile punctelor A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, CA respectiv AB, astfel încât dreptele AA_1, BB_1, CC_1 să fie concurente, iar perpendicularele ridicate pe laturile respective în punctele A_1, B_1, C_1 să fie de asemenea concurente.

8. În triunghiul ABC de ortocentru H, fie A_1diametralul lui A în cercul circumscris și A_2 proiecția lui A_1 pe BC, iar B_2, C_2 puncte analoage. Fie A_b, A_c intersecțiile paralelelor duse prin B și C la AH cu AC, respectiv AB, iar B_c, B_a, C_a, C_b puncte analoage. Arătați că perpendicularele din A_2, B_2, C_2 respectiv pe A_bA_c, B_CB_Q, C_aC_b sunt concurente în H.

Nicolae Mihăileanu – Corelativa unei propoziții – Victor Thébault, *G.M.* vol. 41, 1936

9. Fie AA_1, BB_1, CC_1 ceviene concurente în punctul P din interiorul triunghiului ABC și fie Q centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC. Notăm cu $\{A'\} = B_1C_1 \cap AA_1$, $\{B'\} = C_1A_1 \cap BB_1$, $\{C'\} = A_1B_1 \cap CC_1$și cu R centrul de ortologie al triunghiului $A'B'C'$ în raport cu triunghiul ABC. Demonstrați că:

i) Punctele R, P, Q sunt coliniare dacă și numai dacă P este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$;

ii) Dacă P este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$, atunci punctele R, P, Q, S sunt coliniare (S estecentrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul$A'B'C'$.

Vincențiu Pașol – Ion Pătrașcu

10. Fie ABC un triunghi oarecare, H ortocentrul său și P un punct arbitrar pe AH. Notăm cu B' și cu C' mijloacele laturilor AC și AB, iar cu Q punctul de intersecție a perpendicularei duse din B' pe dreapta CP cu

perpendiculara dusă din C' pe dreapta BP. Arătați că punctul Q se găsește pe mediatoarea laturii BC.

Turneul orașelor – Rusia, 2010

11. Fie ABC un triunghi dreptunghic, pe ipotenuza BC se construiește în exteriorul triunghiului dreptunghiul $BCDE$. Notăm cu I intersecția perpendicularei dusă din D pe AB cu perpendiculara dusă din E pe AC. Demonstrați că triunghiurile ABC și IDE sunt ortologice.

Ion Pătrașcu

12. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, O centrul cercului circumscris și A_1, B_1, C_1 simetricele lui O față de laturile BC, CA respectiv AB.

a) Demonstrați că triunghiul ABC și $A_1B_1C_1$ sunt bilogice;

b) Demonstrați că centrul de omologie a triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ apaține *dreptei lui Euler* a triunghiului ABC;

c) Dacă O_1 este centrul de omologie a triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$, calculați $\frac{O_1H}{O_1O}$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.

13. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și O centrul cercului său circumscris. Pe semidreptele $(BA$ și $(CA$ construim punctele B' respectiv C', astfel încât $BB' = CC' = BO$. Pe semidreapta $(AA_1$, unde A_1 este piciorul înălțimii din A, construim A' astfel încât $AA' = AO$. Demonstrați că perpendicularele duse din A, B, C, respectiv $B'C'$, $C'A'$ și $A'B'$ sunt concurente.

14. În triunghiul oarecare ABC, fie B_1C_1 paralelă la BC, cu $B_1 \in (AB)$, $C_1 \in (AC)$ și A_1 proiecția ortogonală a lui A pe BC. Demonstrați că perpendiculara dusă din B pe A_1C_1, perpendiculara dusă din C pe A_1B_1 și AA_1 sunt concurente.

Ion Pătrașcu

15. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct din planul său. Notăm A', B', C' simetricele lui M față de BC, CA, respectiv AB, și avem că $AA' = BB' = CC'$. Demonstrați că triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sunt ortologice și au centrul de ortologie comun.

16. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice, iar centrele de ortologie sunt O respectiv O_1. Fie $A'_1B'_1C'_1$ translatatul triunghiului $A_1B_1C_1$, prin translația de vector $\overrightarrow{O_1O}$. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A'_1B'_1C'_1$ sunt polar reciproce față de un cerc cu centrul O.

17. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, H ortocentrul său și $A'B'C'$ triunghiul său ortic. Notăm $\{P\} = B'C' \cap BC$,$\{Q\} = A'B' \cap AB$, $\{R\} = A'C' \cap AC$, $\{U\} = AP \cap CQ$, $\{V\} = BR \cap CQ$, $\{W\} = AP \cap BR$. Demonstrați că triunghiul median $M_aM_bM_c$ al triunghiului ABC și triunghiul UVW sunt ortologice.

Ion Pătrașcu

18. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și fie $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic. Notăm cu A_2, B_2 respectiv C_2 proiecțiile vârfurilor A, B, C respectiv pe B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1. Demonstrați că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt triunghiuri bilogice.

19. Fie ABC un triunghi oarecare. Notăm cu B_1 și C_1 intersecțiile unui cerc dus prin punctele B și C cu laturile (AC) respectiv (AB). Notăm cu M_a, M_b, M_c mijloacele segmentelor B_1C_1, B_1C respectiv BC_1. Demonstrați că triunghiurile $M_aM_bM_c$ și ABC sunt ortologice.

20. Fie$A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ două triunghiuri omologice situate în plane diferite și fie O centrul lor de omologie. Notăm cu A_0, B_0, C_0 proiecțiile punctelor A_1, B_1, C_1 pe planul$(A_2B_2C_2)$. Demonstrați că dacă cele două triunghiuri $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt ortologice, atunci triunghiurile $A_0B_0C_0$ și $A_2B_2C_2$ sunt triunghiuri bilogice.

Ion Pătrașcu

21. Fie ABC un triunghi și $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$. Să se demonstreze că:

a) Perpendicularele din A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB sunt concurente dacă și numai dacă:

$$BC \cdot BA' + CA \cdot CB' + AB \cdot AC' = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

b) În ipoteza de la *a)*, avem inegalitatea:
$BA'^2 + CB'^2 + AC'^2 \geq \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

a) Dacă punctele A', B', C' sunt mobile și are loc ipoteza de la *a)*, suma $BA'^2 + CB'^2 + AC'^2$ este minimă dacă și numai dacă punctul de concurență al celor trei perpendiculare este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Ovidiu Pop, profesor, Satu Mare
(Concursul anual al rezolvitorilor*G.M.* 1990)

22. Fie triunghiul ABC și puncteleA_1, $A_2 \in (BC)$, B_1, $B_2 \in (CA)$, C_1, $C_2 \in (AB)$, astfel încât:$BA_1 = CA_2$; $CB_1 = AB_2$; $AC_1 = BC_2$. Demonstrați că centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul determinat de intersecțiile liniilor centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor: ABA_1 și ACA_2; BCB_1 și BAB_2; CAC_1 și CBC_2 este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Ion Pătrașcu

23. Fie $ABCD$ patrulater convex și A_1,B_1,C_1 respectiv ortocentrele triunghiurilor BCD; ACD și ABD. Demonstrați că perpendicularele duse din A, B și C respectiv pe A_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1 sunt concurente.

24. Arătați că, dacă ABC și $A_1B_1C_1$ sunt două triunghiuri echilaterale, ortologice și triunghiul $A_1B_1C_1$ este înscris în triunghiul ABC $\left(A_1 \in (BC), B_1 \in (CA), C_1 \in (AB)\right)$, atunci $A_1B_1C_1$ este triunghiul median al triunghiului ABC.

Ion Pătrașcu

25. Fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al centrului cercului înscris, I, în triunghiul ABC. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice dacă și numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

Reformulare a problemei O: 695, *G.M.* nr. 710-11-12/1992.
Autor: M. Bârsan, Iași

26. Fie ABC un triunghi echilateral de latură a, iar M un punct în interiorul său. Notăm A_1, B_1, C_1 proiecțiile lui M pe laturi. Să se arate că:

a) $A_1B + B_1C + C_1A = \frac{3}{2}a$.

b) Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurentedacă și numai dacă M este situat pe una dintre înălțimile triunghiului.

Laurențiu Panaitopol, Olimpiada județeană 1990.

27. În triunghiul ABC notăm cu A_1, B_1, C_1 picioarele simedianelor din A, B, C. Să se demonstreze că perpendicularele în punctele A_1, B_1, C_1 respectiv pe dreptele BC, CA, AB sunt concurente dacă și numai dacă triunghiul este isoscel.

F. Enescu, elev, București – Problema C. 1125, *G.M.* 5/1991.
Concursul anual al rezolvitorilor, clasele VII-VIII

28. Fie ABC un triunghi echilateral și $A_1B_1C_1$ un triunghi înscris în ABC, astfel încât $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Arătați că:

a) Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

b) Dacă P este centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu ABC și O este centrul cercului circumscris lui ABC, atunci: $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$.

29. Fie ABC un triunghi echilateral dat și M un punct în interiorul său. Arătați că există o infinitate de triunghiuri echilaterale $A'B'C'$ ortologice cu ABC și având ca centru de ortologie punctul M.

Ion Pătrașcu

30. Două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sunt omologice (dreptele AA', BB', CC' se întâlnesc într-un punct I). Perpendicularele înA pe AB, AC întâlnesc $A'B'$, $A'C'$ respectiv în A_c, A_b. Analog, perpendicularele duse în B și C pe dreptele (BA, BC), (CB, CA) determină pe $(B'A', B'C')$, $(C'B', C'A')$ puncteleB_c, B_a,C_a, C_b. Să se arate că perpendicularele coborâte din A, B, C pe dreptele A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b sunt concurente.

Gh. Țițeica

31. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi dreptunghic în A_1și D piciorul perpendicularei din A_1. Notăm cu K mijlocul lui A_1D și fie $\{N\} = A_2K \cap A_1A_3$, $\{M\} = A_3K \cap A_1A_2$. Notăm cu $\{B_1\} = MN \cap A_2A_3$ șiB_2, B_3

proiecțiile lui B_1 pe A_1A_3 respectiv A_1A_2. Demonstrați că $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ sunt triortologice.

Ion Pătrașcu

32. Notăm cu A', B', C' proiecțiile ortogonale ale punctului P din interiorul triunghiului ABC pe laturile BC, CA respectiv AB. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ intersectează a doua oară laturile BC, CA, AB în punctele A_1, B_1, respectiv C_1. Demonstrați că perpendicularele duse din A, B și C respectiv pe B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1 sunt concurente.

33. Fie triunghiul ABC. Se construiesc pe laturile acestuia,în exteriorul său, triunghiurile echilaterale ABC_1, BCA_1, CAB_1. Fie α, β,γ mijloacele segmentelor B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1. Să se arate că perpendicularele duse din α, β, γ pe laturile BC, CA respectiv AB sunt concurente.

Dan Voiculescu

34. Fie ABC un triunghi oarecare înscris într-un cerc de centru O. Paralele duse prin A, B, C la BC, CA respectiv AB intersectează cercul a doua oară în punctele A', B', C'. Demonstrați că perpendicularele duse din A', B', C' pe laturile BC, CA, AB sunt concurente.

35. Fie ABC un triunghi oarecare și A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor sale. Notăm A_2, B_2, C_2 picioarele înălțimilor triunghiului $A_1B_1C_1$. Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor AA_1A_2, AB_1B_2, AC_1C_2 au încă un punct comun.

Ion Pătrașcu

36. Fie ABC un triunghi și $M \in (AC)$, $N \in (AB)$, $P \in (BC)$ astfel încât $MN \perp AC$, $NP \perp AB$ și $MP \perp BC$. Să se arate că, dacă *punctul lui Lemoine* al triunghiului ABC coincide cu centrul de greutate al triunghiului MNP, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Ciprian Manolescu, Problema O: 830, *G.M.* nr. 10/1996.

37. Fie $ABCD$ un dreptunghi de centru O. Notăm cu E și cu F intersecțiile mediatoarei diagonalei BD cu AB și BC. Fie M, N, P respectiv mijloacele laturilor AB, AD, DC și fie L intersecția cu AB a perpendicularei

dusă din D pe PF. Demonstrați că triunghiurile DLB și NEM sunt ortologice.

Ion Pătrașcu

38. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de diametru AC. Se știe că există punctul E pe (CD) și punctul F pe (BC) astfel încât dreapta AE este perpendiculară pe DF și dreapta AF este perpendiculară pe BE. Să se arate că $AB = AD$.

Problema nr. 4, Olimpiada Națională de Matematică, clasa a IX-a, 2014

39. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, $AB = AC$. Notăm cu M mijlocului lui AB, punctul Q este definit de $4 \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC}$, $R \in BC$, astfel încât $\overrightarrow{QR}$este coliniar cu $\overrightarrow{AB}$, iar P este mijlocul lui CM. Demonstrați că triunghiurile PRQ și ABC sunt ortologice și precizați centrele lor de ortologie.

Ion Pătrașcu

40. FieAA_1, BB_1, CC_1ceviene concurente în triunghiulABC, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$, astfel încât AA_1 este mediană și triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel sau BB_1 și CC_1 sunt mediane.

Florentin Smarandache

41. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic; demonstrați că există un triunghi $A_1B_1C_1$ înscris în ABC, cu $C_1 \in (AB)$, $B_1 \in (AC)$, $A_1 \in (BC)$, astfel încât $A_1B_1 \perp BC$, $C_1B_1 \perp AC$,$A_1C_1 \perp AB$. Notăm cu O_1, O_2, O_3 respectiv mijloacele segmentelor BA_1, CB_1, AC_1. Demonstrați că triunghiurile $B_1C_1A_1$ și $O_1O_2O_3$ sunt ortologice.

Ion Pătrașcu

42. Fie $\mathcal{C}(O_1)$, $\mathcal{C}(O_2)$, $\mathcal{C}(O_3)$ trei cercuri având centrele în puncte necoliniare și fiind exterioare două câte două. Notăm cu A punctul situat pe O_2O_3 care are puteri egale față de cercurile $\mathcal{C}(O_2)$ și $\mathcal{C}(O_3)$; cu B notăm punctul situat pe O_3O_1 care are puteri egale față de $\mathcal{C}(O_3)$ și $\mathcal{C}(O_1)$; și cu C punctul ce aparține dreptei O_1O_2 și are puteri egale față de $\mathcal{C}(O_1)$ și $\mathcal{C}(O_2)$.

Arătați că triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sunt ortologice. Precizați centrele lor de ortologie.

43. Fie ABC un triunghi oarecare și $C_aC_bC_c$ triunghiul său de contact. Notăm cu H_a, H_b,H_c respectiv ortocentrele triunghiurilor AC_bC_c, BC_aC_c, CC_aC_b. Demonstrați că triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $C_aC_bC_c$ sunt ortologice. Precizați centrele lor de ortologie.

Ion Pătrașcu

44. Arătați că triunghiul determinat de punctele de tangentă cu laturile triunghiului ABC ale cercului său A-exînscris și triunghiul ABC sunt ortologice și au același centru de ortologie.

45. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice, $A_1B_1C_1$ este înscris înABC, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$, $B_1C_1 \parallel BC$, $B_1A_1 \parallel AB$. Demonstrați că $A_1B_1C_1$ este triunghiul complementar (median) al triunghiului ABC.

46. Fie ABC un triunghi nedreptunghic și O centrul cercului său circumscris. Mediatoarele segmentelor AO, BO și CO determină triunghiul $A_1B_1C_1$ (B_1, C_1 aparțin mediatoarei segmentului AO). Demonstrați că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice și au centrul de ortologie comun.

47. Fie AA', BB', CC' trei ceviene concurente în punctul P din interiorul triunghiului ABC. Construim mediatoarele segmentelor AP, BP, CP și notăm $A_1B_1C_1$ triunghiul determinat de acestea (B_1 și C_1 aparțin mediatoarei segmentului AP). Arătați că $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC și precizați centrul lor de ortologie.

48. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice de centru M (M este centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu ABC). Fie $A'B'C'$ triunghiul de contact al triunghiului ABC, notăm A_1', B_1', C_1' respectiv unul dintre punctele de intersecție cu cercul înscris al perpendicularelor duse din A, B, C pe B_1C_1, C_1A_1 respectiv A_1B_1. Notăm cu X intersecția dintre tangenta dusă în A_1' la cercul înscris cu paralela dusă prin I (centrul cercului

înscris) la B_1C_1, fie Y intersecția dintre tangenta dusă prin B_1'la cercul înscris cu paralela dusă prin I la C_1A_1 și fie Z intersecția tangentei dusă prin C_1'la cercul înscris cu paralela dusă prin I la A_1B_1.

Demonstrați că punctele X, Y, Z sunt coliniare.

Ion Pătrașcu

49. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii BC. Perpendicularele duse din M pe AB și AC intersectează respectiv în P și Q perpendicularele ridicate în B' și C' pe BC. Punctele B' și C' sunt simetrice față de M și sunt situate pe BC. Notăm $\{R\} = AB \cap PQ$ și $\{S\} = AC \cap PQ$.

Demonstrați că triunghiurile ARS și AQP sunt ortologice.

50. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$. Considerăm punctul E pe latura CD și fie M mijlocul laturii AB. Construim $MP \perp AE$, $P \in AD$ și $MQ \perp BE$, $Q \in BC$. Notăm cu R și S intersecțiile dreptei PQ cu AE respectiv BE.

Demonstrați că triunghiul ESR și EPQ sunt ortologice.

Ion Pătrașcu

51. Fie ABC un triunghi, U un punct în interiorul său și V conjugatul izogonal al lui U. Dacă triunghiul U-circumpedal al triunghiului ABC și triunghiul ABC sunt ortologice, atunci și triunghiul V-circumpedal al triunghiului ABC și triunghiul ABC sunt ortologice.

52. Fie ABC un triunghi oarecare. Se construiesc în exteriorul triunghiului pe laturile sale pătratele $BCMN$, $ACPQ$ și $ABRS$. Notăm $\{A_1\} = MP \cap NR$, $\{B_1\} = MP \cap SQ$ și $\{C_1\} = NR \cap SQ$.

Demonstrați că triunghiurile ABC și$A_1B_1C_1$ sunt ortologice. Ce punct important al triunghiului ABC este centrul de ortologie al acestuia în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$?

53. Dacă segmentele AA', BB', CC' ce unesc vârfurile a două triunghiuri ortologice ABC și $A'B'C'$ sunt împărțite prin punctele A'', B'', C'' și A''', B''', C''' în segmente proporționale, atunci triunghiurile $A''B''C''$ și $A'''B'''C'''$ sunt de asemenea ortologice.

J. Neuberg

54. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC. Pe semidreptele $(HA$, $(HB$, $(HC$ considerăm punctele A', B', C', cu $HA' \equiv BC$, $HB' \equiv CA$ și $HC' \equiv AB$. Demonstrați că:

a) Centrul de ortologie al triunghiuluiABC în raport cu triunghiul $A'B'C'$ este centrul de greutate G al triunghiului ABC.

b) Dacă$\{A''\} = BC \cap B'C'$, $\{B''\} = CA \cap C'A'$, atunci $HG \perp A''B''$.

55. În exteriorul triunghiului ABC construim pătratele $BCMN$, $ACPQ$ și $ABRS$. Fie C_1 intersecția dreptelor SQ și RN, B_1 intersecția dreptelor SQ și MP și A_1 intersecția dreptelor MP și RN. Demonstrați că perpendicularele din B_1, A_1 și C_1 pe dreptele AC, BC respectiv AB sunt concurente.

Petru Braica, Satu Mare, Problema 27089, *G.M.* nr. 1/2015

56. Fie ABC un triunghi oarecare. Construim cu A, B, C ca centre trei cercuri congruente care taie laturile AB și AC în A', A''; laturile BA și BC în B', B''; laturile CB, CA în C', C''. Notăm $B'B'' \cap C'C'' = \{A_1\}$, $A'A'' \cap C'C'' = \{B_1\}$ și $A'A'' \cap B'B'' = \{C_1\}$. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice și precizați centrele lor de ortologie.

57. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex cu proprietățile: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Arătați că perpendicularele duse din A, C și E respectiv pe dreptele FB, BD și DF sunt concurente.

58. Fie A', B' și C' picioarele înălțimilor unui triunghi ABC. Se consideră punctele $M \in AA'$, $N \in BB'$,$P \in CC'$ și se notează $MN \cap AB = \{K\}$, $MP \cap AC = \{L\}$. Dacă punctele N și P sunt fixe, iar M mobil, se cere:

a) Să se demonstreze că ML se rotește în jurul unui punct fix.

b) Să se găsească locul geometric al intersecțiilor perpendicularelor coborâte din B și C respectiv pe MP și MN.

V. Sergiescu, elev, București, Problema 8794, *G.M.* nr. 1/1969

59. Fie ABC un triunghi oarecare și AM o ceviana a sa. Notăm cu A', B' și C' proiecțiile vârfului *A* pe BC și proiecțiile lui B și C pe AM. Demonstrați că triunghiul ABC este ortologic în raport cu triunghiul $A'B'C'$.

Ion Pătrașcu

60. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, H ortocentrul său și P un punct pe AH. Perpendicularele duse din H pe BP și pe CP intersectează AC și AB în B, respectiv C. Demonstrați că dreptele B_1C_1 și BC sunt paralele.

Ion Pătrașcu

61. Fie ABC un triunghi dat și $A_1B_1C_1$ triunghiul format de intersecțiile paralelelor duse prin A, B, C la bisectoarele interioare ale triunghiului ABC (paralela dusă prin A la bisectoarea BB' se intersectează cu paralela dusă din B la bisectoarea CC' în C_1, ...). Demonstrați că triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu *triunghiul lui Fuhrmann* al triunghiului ABC.

Ion Pătrașcu

62. Fie K mijlocul laturii AB a triunghiului ABC, iar $L \in (AC)$ și $M \in (BC)$ două puncte astfel încât să avem $\sphericalangle CLK \equiv \sphericalangle CMK$. Arătați că perpendicularele ridicate în punctele K, L și M respectiv pe AB, AC și BC sunt concurente într-un punct P.

Middle European MO: 2012 Team Competition

63. Fie ABC un triunghi dat și $A_1B_1C_1$ triunghiulpodar al centrului I_a al cercului A-exînscris triunghiului. Notăm Γ_a intersecțiile cevienelor AA_1, BB_1, CC_1 și fie $\{X\} = B_1C_1 \cap BC$, $\{Y\} = A_1C_1 \cap AC$. Demonstrați că $I_a\Gamma_a \perp XY$.

64. Fie ABCun triunghi ascuțitunghic înscris în cercul de centru O. Notăm cu A_1,B_1, C_1 respectiv mijloacele arcelor mari ale cercului, susținute de coardele BC, CA și AB. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$sunt ortologice.

65. În triunghiul oarecare ABC, fie A_1, B_1,C_1 proiecțiile centrelor cercurilor exînscrise, I_a, I_b, I_c respectiv pe mediatoarele laturilor BC, CA și AB. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri bilogice.

66. Fie ABC un triunghi oarecare și K mijlocul laturii AB. Construim cercuri congruente care trec prin A și K, și prin B și K, și care au centrele de aceeași parte a dreptei AB ca și punctul C. Aceste cercuri taie a doua oară laturile AC și BC în L respectiv M. Demonstrați că triunghiurile MLK și

ABC sunt ortologice. Determinați locul geometric al centrului P de ortologie al acestor triunghiuri.

Ion Pătrașcu, Mihai Miculița

67. Fie $ABCD$ un romb de centru O; notăm cu E proiecția lui O pe AD și cu F simetricul lui O față de mijlocul segmentului AD. Perpendiculara dusă din F pe AD se intersectează cu perpen-diculara dusă din D pe EB în H. Demonstrați că $AH \perp CE$.

Ion Pătrașcu, Problema S: L.17.299 – *G.M.* nr. 11/2017

68. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 2$ și $BC = \sqrt{3}$. Notăm cu M mijlocul laturii AB, cu P mijlocul segmentului DM, iar cu S simetricul lui P față de AB. Intersecția dreptelor AC și DS o notăm cu T, iar V este intersecția perpendicularei din D pe DM cu paralela dusă prin P la AB. Fie Q intersecția bisectoarei unghiului AMD cu perpendiculara dusă din D pe CV. Demonstrați că punctele P, Q, T sunt coliniare.

Ion Pătrașcu

69. Fie $A_1B_1C_1$ și ABC două triunghiuri ortologice de centru P. Notăm cu A_2, B_2 și C_2 simetricele lui P față de mijloacele laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$. Demonstrați că triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic cu triunghiul $A_2B_2C_2$.

70. Se cer următoarele:

a) Găsiți condiția pe care trebuie să o satisfacă un triunghi asuțitunghic pentru ca să nu existe triunghiul ortic al triunghiului său ortic;
b) Găsiți un triunghi astfel încât să nu existe triunghiul ortic al triunghiului ortic al triunghiului ortic al triunghiului dat;
c) Fie ABC un triunghi, $A'B'C'$ triunghiul său ortic și $A'B'C'$ triunghiul ortic al triunghiului $A''B''C''$. Ce puteți afirma despre relația de ortologie relativă la triunghiurile ABC și $A''B''C''$?

71. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, notăm cu D proiecția lui B pe AC și cu E proiecția lui C pe AB, iar cu K, L, M respectiv mijloacele segmentelor BE, CD și DE. Demonstrați că:

a) Triunghiurile MKL și ABC sunt ortologice;

b) Axa de ortologie este perpendiculară cu KL.

72. Fie ABC un triunghi oarecare și $A'B'C'$ triunghiul său I-circumpedal (I – centrul cercului înscris în triunghiul ABC). Demonstrați că:

a) Triunghiul ABC este ortologic în raport cu triunghiul $A'B'C'$;
b) Cercurile $\mathcal{C}(A';\ A'B)$, $\mathcal{C}(B';\ B'C)$, $\mathcal{C}(C';\ C'A)$ se intersectează în centrul de ortologie al triunghiurilor de la punctul *a)*;
c) Fie $\{X\} = B'C' \cap BC$, $\{Y\} = A'B' \cap AB$ și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC; atunci: $OI \perp XY$.

73. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $AB < AC$ și de ortocentru H. Mediatoarea laturii BC intersectează laturile BC, CA și AB respectiv pe punctele M, Q și P. Notăm cu N mijlocul segmentului PQ. Demonstrați că triunghiurile BHM și QAN sunt ortogonale.

74. Cercul ω intersectează laturile (BC), (CA) și (AB) ale triunghiului ABC în A_1A_2;B_1B_2 respectiv C_1, C_2. Demonstrați că dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ și triunghiul ABC sunt ortologice, atunci și triunghiul $A_2B_2C_2$ și ABC sunt ortologice.

Reformulare a unei probleme dată la Concurs Ungaria, 1914.

75. Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri situate în plane distincte și astfel încât perpendicularele duse din A, B, C respectiv pe B_1C_1, C_1A_1și A_1B_1sunt concurente într-un punct H. Demonstrați că triunghiul $A'B'C'$ (proiecția lui ABC pe planul $A_1B_1C_1$) și triunghiul $A_1B_1C_1$sunt ortologice.

Ion Pătrașcu

76. Fie ABC un triunghi isoscel, $AB = AC$; H este ortocentrul său și $A_1B_1C_1$ este triunghiul său ortic. Arătați că triunghiul HBC este ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$.

77. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi neisoscel ABC. Cercul circumscris triunghiului OBC intersectează a doua oară dreptele AB și AC în punctele A_c respectiv A_b; cercul circumscris triunghiului OAC intersectează a doua oară dreptele AB și BC în punctele B_c respectiv B_a; iar cercul circumscris triunghiului OAB intersectează a doua oară dreptele BC

și AC în punctele C_a respectiv C_b. Arătați că A_bB_a, A_cC_a și B_cC_b sunt trei drepte concurente.

Olimpiada Națională de Matematică, Brazilia, 2009

78. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor triunghiului ascuțitunghic ABC și $X \in (B_1C_1)$, $Y \in (C_1A_1)$, $Z \in (A_1B_1)$, astfel încât:

$\frac{C_1X}{XB_1} = \frac{b\cos C}{c\cos B}$, $\frac{A_1Y}{YC_1} = \frac{c\cos A}{a\cos C}$ și $\frac{B_1Z}{ZA_1} = \frac{a\cos B}{b\cos A}$.

Arătați că dreptele AX, BY și CZ sunt concurente.

Petru Braica, Problema 27309, *G.M.* nr. 12/2016

79. Fie ABC un triunghi dat și fie $A_1B_1C_1$ un triunghi înscris în ABC și ortologic cu acesta. Notăm cu O centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu ABC. Considerăm pe perpendiculara ridicată în O pe planul ABC punctul P, iar pe segmentele PA_1, PB_1, PC_1, respectiv punctele A_2, B_2, C_2. Demonstrați că triunghiurile $A_2B_2C_2$ și ABC sunt ortologice cu un singur centru de ortologie.

Ion Pătrașcu

80. Fie E și F picioarele înălțimilor din vârfurile B și C ale triunghiului ascuțitunghic ABC, iar M mijlocul laturii BC. Notăm cu $\{N\} = AM \cap EF$ și $P = Pr_{BC}^{(N)}$, iar cu $R = Pr_{AC}^{(P)}$ și $S = Pr_{AB}^{(P)}$. Arătați că N este ortocentrul triunghiului ARS.

Nguyễn Minh Hả

81. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ și $P \in (AB)$, astfel încât:

$\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB} = k$.

Fie a perpendiculara din M pe BC. Definim analog dreptele b și c. Atunci: a, b, c sunt concurente dacă și numai dacă $k = 1$.

M. Monea, Problema 4, Olimpiada Națională de Matematică, faza zonală, 2003

82. Fie (T_a), (T_b), (T_c) tangentele în vârfurile A, B, C ale triunghiului ABC la cercul circumscris triunghiului. Să se demonstreze că perpendicularele duse din mijloacele laturilor opuse pe (T_a), (T_b), (T_c) sunt concurente și să se determine punctul lor de concurență.

83. Se dă un triunghi echilateral ABC și D un punct arbitrar în planul său. Notăm A_1, B_1 și C_1 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile BCD, CAD și ABD. Demonstrați că perpendicularele duse din vârfurile A, B, C respectiv pe laturile B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1 sunt concurente.

I. Shariguin, *Culegere de probleme*, Problema II.17

84. Fie d o dreaptă dată și d_1, d_2, d_3 trei drepte perpendiculare pe d. Considerăm A, B, C puncte pe d, astfel încât:

$d(A, d_2) = a_1, d(A, d_3) = a_2,$

$d(B, d_3) = b_1, d(B, d_1) = b_2,$

$d(C, d_1) = c_1, d(C, d_2) = c_2.$

Găsiți condiția pe care trebuie să o satisfacă a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 astfel încât oricare ar fi punctele A_1, B_1, C_1 pe d_1, d_2 respectivd_3, perpendicularele din A, B, C pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 să fie concurente.

85. Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC. Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC și $A_1B_1C_1$ este triunghiul format din proiecțiile ortogonale ale punctului M pe laturile BC, CA respectiv AB, arătați că triunghiul $M_aM_bM_c$ și triunghiul $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri ortologice.

86. Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri ortologice și O un punct oarecare în planul lor. Notăm cu $A'B'C'$ triunghiul simetric față de O al triunghiului ABC. Arătați că triunghiurile $A'B'C'$ și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

87. Fie $ABCD$ un trapez ortodiagonal de baze BC și AD; notăm cu O intersecția diagonalelor, cu E proiecția lui O pe AD și cu F simetricul lui O față de mijlocul segmentului AD. Perpendiculara din F pe AD se intersectează cu perpendiculara dusă din D pe EB în H. Demonstrați că $AH \perp CE$.

Ion Pătrașcu, Problema 27447, *G.M.* nr. 11/2017

88. Arătați că centrul de ortologie al unui triunghi ABC în raport cu triunghiul podar al centrului simedian este centrul de greutate al triunghiului ABC, iar centrul de ortologie al triunghiului podar al centrului simedian în

raport cu triunghiul ABC este centrul de greutate al triunghiului podar al centrului simedian.

89. Arătați că:

a) Două triunghiuri echilaterale ABC și $A'B'C'$, invers orientate, sunt de trei paralelogice și anume cu ordinele: $\begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} ABC \\ B'C'A' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} ABC \\ C'A'B' \end{pmatrix}$.

b) Dacă notăm cu P_1, P_2, P_3 punctele de paralelogice corespunzătoare ternelor de mai sus, atunci triunghiul $P_1P_2P_3$ este echilateral, cu vârfurile pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Constantin Cocea

90. Fie triunghiul ABC și $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic, iar A_2,B_2, C_2 proiecțiile vârfurile triunghiului ABC respectiv pe B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1. Demonstrați că triunghiurile $A_2B_2C_2$ și ABC sunt ortologice.

I. Shariguin, Culegere de probleme

91. Pe laturile triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc în exteriorul său triunghiurile echilaterale BCK, CAL, ABM. Arătați că triunghiul median al triunghiului KLM și triunghiul ABC sunt ortologice.

92. Fie ABC un triunghi oarecare și fie $A_1B_1C_1$ triunghiul podar al centrului simedian K al triunghiului ABC. Notăm cu A_2, B_2, C_2 simetricele punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu K. Demonstrați că triunghiurile $A_2B_2C_2$ și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

93. Fie $BCDE$ un patrulater convex înscris în cercul de centru Oîn careBEeste neparalelă cu DC. Notăm cu Q și R mijloacele laturilor CD și BE și cu A intersecția dreptelor BE și DC. Demonstrați că perpendicularele duse din A, B, C respectiv pe RQ, CE și BD sunt concurente.

Ion Pătrașcu

94. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Arătați că triunghiurile BFD și ECA sunt triortologice. Specificați centrele de ortologie.

Ion Pătrașcu

95. Fie ABC un triunghi dreptunghic în B cu $m(\hat{A}) = 60^0$ și $BC = \sqrt{7}$. Se duc paralele la BC, AB și CA situate la distanțele $\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ și respectiv $\frac{\sqrt{7}}{7}$ care intersectează interiorul triunghiului.

Demonstrați că:

a) Paralelele sunt concurente într-un punct M;
b) Triunghiul podar al punctului M, pe care îl notăm $A_1B_1C_1$ este echilateral;
c) Triunghiul ABC și $A_1B_1C_1$ nu sunt bilogice.

Ion Pătrașcu

96. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, O centrul cercului său circumscris și M, D intersecțiile semidreptei $(AO$ cu BC respectiv cu cercul circumscris. Tangenta în D la cercul circumscris intersectează AB în K și AC în L. Cercurile circumscrise triunghiurilor DMC și DMB intersectează a doua oară AC și AB respectiv în F și E. Demonstrați că triunghiul DEF este ortologic cu triunghiul AKL și centrul de ortologie este simetricul punctului D față de M.

97. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, $A_1B_1C_1$ este triunghiul său ortic, iar MNP este triunghiul său median. Notăm cu cu A_2, B_2, C_2 mijloacele medianelor $(AM), (BN), (CP)$. Demonstrați că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt ortologice.

Ion Pătrașcu

98. Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri ortologice. Notăm cu P centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ și cu P_1 centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu ABC. Atunci, coordonatele baricentrice ale lui P în raport cu ABC sunt egale cu coordonatele baricentrice ale lui P_1în raport cu $A_1B_1C_1$.

99. Fie ABC un triunghi înscris în cercul de centru O. Bisectoarele AD, BE, CF sunt concurente în I. Perpendicularele duse din I pe BC, CA și AD intersectează EF, ED și DE respectiv în M, N, P. Arătați că AM, BN, CP sunt concurente într-un punct situat pe OI.

Nguyễn Minh Hả

100. Fie ABCun triunghi și P un punct în interiorul său. Notăm cu D, E, F picioarele perpendicularelor duse din P pe BC, CA, respectiv AB. Presupunem că:

$$AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = CP^2 + PE^2.$$

Notăm cu I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise triunghiuluiABC. Arătați că P este centrul cercului circumsris triunghiului$I_a I_b I_c$.

Problema G3 – Short-listed – 44th International Mathematical Olimpiad, Tokyo, Japan, 2003

9.2 Probleme deschise

1. Triunghiul pedal al izogonalului *punctului lui Gergonne* al triunghiului ABC este ortologic cu triunghiul ABC dacă și numai dacă triunghiulABC este triunghi isoscel.

2. Triungiul pedal al izogonalului *punctului lui Nagel* în triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul ABCdacă și numai dacă ABC este triunghi isoscel.

3. Dacă $A'B'C'$ este triunghiul M-pedal al punctului M din interiorul triunghiului ABC și triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice, iar $A''B''C''$ este triunghiul M'-pedal al izogonalului M' al punctului M în raport cu triunghiul ABC, triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt ortologice.

4. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul G-circumpedal al triunghiului ABC (G este centrul de greutate al triunghiului ABC). Este adevărat că ABC și $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri ortologice dacă și numai dacă ABC este triunghi echilateral?

5. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC$, și G centrul său de greutate. Dacă U și V sunt centrele de ortologie ale triunghiurilor ortologice ABC și G - circumpedal, iar aceste puncte sunt simetrice față de G, aflați măsura unghiurilor triunghiului ABC.

6. Triunghiul podar al ortocentrului H al triunghiului ABC este ortologic cu triunghiul H-circumpedal. Ce condiții trebuie să îndeplinească punctul

M din interiorrul triunghiului ABC pentru ca podarul său și M-circumpedalul său să fie triunghiuri ortologice?

7. Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri echilaterale invers asemenea. Notăm cu O_1, O_2, O_3 centrele de ortologie ale triunghiului ABC în raport cu triunghiurile $A_1B_1C_1$, $B_1C_1A_1$ și $C_1A_1B_1$. Fie O_1', O_2', O_3' centrele de ortologie ale triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiurile ABC, BCA și CAB. Se știe că triunghiurile $O_1O_2O_3$ și $O_1'O_2'O_3'$ sunt echilaterale, invers asemenea și triortologice. Dacă continuăm pentru aceste triunghiuri construcția făcută pentru ABC și $A_1B_1C_1$, și apoi pentru cele determinate de centrele lor de ortologie, ș.a.m.d., procesul poate continua la nesfârșit sau se oprește?

8. Fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al centrului cercului circumscris O al triunghiului ascuțitunghic ABC. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice dacă și numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

Ion Pătrașcu, Mihai Dinu

10

SOLUȚII, INDICAȚII, RĂSPUNSURI LA PROBLEMELE DE ORTOLOGIE PROPUSE

1. *Soluția 1.*Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice dacă și numai dacă $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$. Fiind simetrice față de dreapta d, avem că $AB_1 = BA_1$, $BC_1 = CB_1$ și $CA_1 = AC_1$, prin urmare relația de mai sus este verificată.

Soluția 2. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt asemenea și invers orientate. Se aplică acum *Teorema 26.*

2. Demonstrăm că triunghiurile BIC și MNP sunt ortologice. Perpendiculara din M pe BC este mediatoarea lui BC. Perpendiculara din N pe CI este axa radicală a cercului înscris și a cercului nul $\mathcal{C}$, iar perpendiculara din P pe BI este axa radicală a cercului înscris și a cercului nul $\mathcal{B}$. Axa radicală a cercurilor nule $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ este mediatoarea lui BC. Axele radicale a trei cercuri sunt concurente în centrul lor radical Ω. Deoarece perpendicularele din M, N, P pe BC, CI și BI sunt concurente, înseamnă că triunghiurile MBP și BIC sunt ortologice, deci și perpendicularele duse din I, B, C respectiv pe NP, MP și MN vor fi concurente.

Observație

Problema rămâne valabilă și dacă în locul cercului înscris (I) se consideră cercul A-exînscris (I_a).

3. Perpendicularele duse din O_1, O_2, O_3 respectiv pe BC, CA, AB sunt mediatoarele acestor laturi, deci sunt concurente în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC, punct ce este centru de ortologie al triunghiurilor $O_1O_2O_3$ și ABC.

Perpendicularele duse din A, B, C pe O_2O_3, O_3O_1 respectiv O_1O_2 sunt coardele AM, BM, CM, așa că M este al doilea centru de ortologie.

4. Triunghiurile B_1C_1A și BPC sunt ortologice, deoarece perpendiculara dusă din A pe BC, perpendiculara din B_1 pe BP și perpendiculara dusă din C_1 pe CP sunt concurente în H. Conform teoremei triunghiurilor ortologice proprietatea este adevărată și invers, adică perpendiculara dusă din C pe C_1A și perpendiculara dusă din P pe B_1C_1 sunt concurente. Deoarece primele două perpendiculare sunt înălțimile triunghiului ABC, deci sunt concurente în H, rezultă că și a treia perpendiculară trece prin H, deci PH este perpendiculară în B_1C_1. Pe de altă parte, PH este perpendiculară pe BC, deci BC și B_1C_1 sunt paralele.

5. Triunghiul ABC și triunghiul $A'B'C'$sunt triunghiuri ortologice. Unul dintre centrele de ortologie este P și fie P'' al doilea centru de ortologie. Se știe că P'' este conjugatul izogonal al punctului P. Dacă P''' este al doilea centru de ortologie al triunghiului ABC și $A''B''C''$ (primul este P'), atunci P''' este conjugatul izogonal al punctului P'. Deoarece mulțimea centrelor de ortologie este formată numai din P și P', înseamnă că P''și P''' trebuie să coincidă cu P', respectiv P, și atunci P și P'sunt conjugate izogonal.

6. Dacă A', B', C' este dreapta Simson a punctului S, avem$\sphericalangle SBA \equiv \sphericalangle SA'C'$ (patrulaterul $SA'BC'$ este inscriptibil). Deoarece$\sphericalangle SBA \equiv \sphericalangle SQA$, rezultă că $\sphericalangle SA'C' \equiv \sphericalangle SQA$, deci $A'C' \parallel AQ$. Patrulaterul $AKOP$ este paralelogram deoarece $AK \parallel PO$ și $AK \equiv PO$, rezultă $OK \parallel AQ$. $A'C' \parallel AQ$ și $AQ \parallel OK$ conduc la $A'C' \parallel OK$.

7. Considerăm latura triunghiului echilateral de lungime 1 și fie $AC_1 = x$, $BA_1 = y$, $CB_1 = z$. Din teorema lui Ceva și din teorema Carnot, rezultă:

$xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ și

$x^2 + y^2 + z^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2$.

Din relația a doua, reținem că: $x + y + z = \frac{3}{2}$, deci și $(1-x) + (1-y) + (1-z) = \frac{3}{2}$.

De asemenea, avem:

$xy + yz + zx = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} - (x^2 + y^2 + z^2)\right)$.

Analog:

$$(1-x)(1-y) + (1-y)(1-z) + (1-z)(1-x) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} - (x^2 + y^2 + z^2)\right).$$

Dacă $x = y \neq z$, atunci avem soluțiile $\{x, z, 1-x, 1-z\}$, de unde rezultă că $x = 1 - z$, în orice situație obținem din nou că $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Dacă x, y, z sunt toate diferite, atunci $\{x, y, z\} = \{1-x, 1-y, 1-z\}$. Dacă $x = 1 - x$, atunci $x = \frac{1}{2}$, iar dacă$x = 1 - y$, atunci $y = 1 - x$ și $z = 1 - z$ duce la $z = \frac{1}{2}$. Prin urmare, soluțiile ecuației sunt $\left\{x, 1-x, \frac{1}{2}\right\}$.

În concluzie, toate pozițiile punctelor A_1, B_1, C_1 sunt date de tripletele $\left(x, 1-x, \frac{1}{2}\right)$ și permutatele lor, cu $x \in (0, 1)$, prin urmare unul dintre puncte este mijlocul unei laturi, iar celălalte sunt egal depărtate de vârfurile laturii respective.

8. Fie $\{X\} = A_bA_c \cap BC$, presupunem că triunghiul ABC este ascuțitunghic și $\hat{B} > \hat{C}$. Avem $A_cC = a\tan B$, $A_bB = a\tan C$, $\tan\left(\widehat{A_bXC}\right) = \tan B - \tan C$. Se observă că A_2 este izotomicul lui A' piciorul înălțimii din A, cum $BA' = c \cdot \cos B$, rezultă că:

$$A'A_2 = a - 2c \cdot \cos B = 2R\sin A - 4R\sin C\cos B$$
$$= 2R(\sin A - 2\sin C\cos B).$$

$HA' = \cot C \cdot BA' = \frac{C \cdot \cos B \cdot \cos C}{\sin C} = 2R\cos B\cos C$.

$$\tan\left(\widehat{HA_2A'}\right) = \frac{HA'}{A'A_2} = \frac{\cos B \cdot \cos C}{\sin A - 2\sin C \cdot \cos B}$$
$$= \frac{\cos B \cdot \cos C}{\sin(B + C) - 2\sin C \cdot \cos B}$$
$$= \frac{\cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B - 2\sin C \cdot \cos B}$$
$$= \frac{\cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \cos C - \sin C \cdot \cos B} = \frac{1}{\tan B - \tan C}.$$

Deoarece $\tan\left(\widehat{A_bXC}\right) = \cot\left(\widehat{HA_2A'}\right)$, rezultă că $A_2H \perp A_bA_c$. Analog, se demonstrează că $B_2H \perp B_aB_c$ și că $C_2H \perp C_bC_a$.

Observație

Problema exprimă faptul că triunghiurile $A_2B_2C_2$ și cel cu laturile determinate de dreptele A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b sunt ortologice, iar H este centrul lor de ortologie.

9. i) Presupunem că R, P, Q sunt coliniare; fie $\frac{RP}{PQ} = \lambda$,

$\Delta A'RP \sim \Delta A_1QP \Longrightarrow \frac{A'R}{A_1Q} = \frac{A'P}{A_1P} = \lambda$ (1)

Analog,

$\Delta B'RP \sim \Delta B_1QP \Longrightarrow \frac{B'R}{B_1Q} = \frac{B'P}{B_1P} = \lambda,$ (2)

$\Delta C'RP \sim \Delta C_1QP \Longrightarrow \frac{C'R}{C_1Q} = \frac{C'P}{C_1P} = \lambda.$ (3)

Relațiile (1), (2) și (3) conduc la $A'B' \parallel A_1B_1$, $B'C' \parallel B_1C_1$, $A'C' \parallel A_1C_1$.Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A'B'C'$ au laturile respectiv paralele, rezultă că patrulaterele $A'C'B'C_1$ și $A'C'A_1B'$ sunt paralelograme, deci $A'C' = C_1B'$și $A'C' = A_1B'$, în consecință B' este mijlocul laturii A_1C_1, analog A' este mijlocul laturii B_1C_1 și C' este mijlocul laturii A_1B_1, deci P este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$.

Fie acum P centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$ și Q centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu ABC. Dacă R este centrul de ortologie al triunghiului $A'B'C'$ în raport cu ABC, atunci, deoarece triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt omologice de centru P, conform teoremei lui Sondat obținem că punctele Q, P și S sunt coliniare (S este centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $A_1B_1C_1$). Pe de altă parte, triunghiul$A'B'C'$ este triunghi median al triunghiului $A_1B_1C_1$, așa că perpendicularele duse din A, B, C pe laturile lui $A_1B_1C_1$ sunt perpendiculare și pe laturile triunghiului $A'B'C'$, așa că S este centru de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $A'B'C'$. Conform teoremei lui Sondat, ținând seama că $A'B'C'$ și ABC sunt omotetice cu centrul omotetiei P, avem că punctele S, R, P sunt coliniare. Din Q, P, S și S,R, P coliniare, rezultă că Q, R, S, P sunt coliniare.

ii) Rezultă din i).

10. Triunghiul PBC este ortologic cu triunghiul $A'B'C'$ (am notat A' mijlocul lui BC). Centrele de ortologie sunt H și Q.

11. Triunghiurile ABC și IED sunt congruente (U.L.U.). Din $AB \parallel IE$ și $AB = IE$, rezultă că patrulaterul $BEIA$ este paralelogram, prin urmare $AI \parallel BE$. Deoarece $BE \perp BC$, rezultă că și $AI \perp BC$, deci AI este înălțimea din A a triunghiului ABC. Am obținut că perpendicularele duse din I, D, E respectiv pe BC, AB și AE sunt concurente, prin urmare triunghiurile IDE și ABC sunt ortologice.

12. a) Evident triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt ortologice, centrul de ortologie fiind O. Dacă notăm M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB, se observă că NP este paralelă cuB_1C_1 și cum NP este paralelă cu BC, rezultă că perpendiculara dusă din A pe B_1C_1 este înălțimea AA'. Obținem raționând analog că al doilea centru de ortologie a triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ este ortocentrul H al triunghiului ABC.

b) Patrulaterul AHA_1O este paralelogram deoarece $AH = 2OM$ și $AH \parallel OA_1$; rezultă că AA_1 trece prin mijlocul O_1 al segmentului OH.

Analog, obținem că BB_1 și CC_1 trec prin O_1, deci centrul de omologie este O_1, și acesta aparține dreptei lui Euler OH a triunghiului ABC.

c) Din b), avem că $\frac{O_1H}{O_1O} = 1$.

13. Triunghiul $A'B'C'$este ortologic în raport cu ABC și centrul de ortologie este A. Atunci și ABC este ortologic în raport cu $A'B'C'$.

14. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt ortologice. Într-adevăr, perpendiculara dusă din A_1 pe BC, perpendiculara dusă din B_1 pe AC (înălțimea triunghiului AB_1C_1) și perpendiculara dusă din C_1 pe AB (adică înălțimea triunghiului AB_1C_1) sunt concurente. Centrul de ortologie este ortocentrul H_1 al triunghiului AB_1C_1.

15. Este clar că M trebuie să fie în interiorul triunghiului ABC. Avem: $\Delta ABB' \equiv \Delta ACC'$ (L.L.L.) rezultă că $\sphericalangle B'AC \equiv \sphericalangle C'AB$, deci și $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CAM}$ și, prin urmare, AM este bisectoare, deci înălțime în ABC. Analog, arătăm că BM este înălțime în triunghiul ABC, prin urmare M trebuie să fie ortocentrul acestui triunghi. Mai mult, AA', BB', CC' sunt înălțimi în ABC. Centrul comun de ortologie este H.

16. Notăm a, b, c proiecțiile ortogonale ale punctului O pe laturile triunghiului ABC și cu a_1, b_1, c_1 proiecțiile lui O pe laturile triunghiului A_1', B_1',C_1'. Patrulaterele $aA_1'b_1B$, b_1BcC_1', $cC_1'a_1A$, a_1AbB_1', $bB_1'c_1C$, c_1CaA_1' sunt inscriptibile având câte două unghiuri opuse drepte.

Rezultă:

$$\overrightarrow{O_a} \cdot \overrightarrow{OA_1'} = \overrightarrow{O_b} \cdot \overrightarrow{OB_1'} =$$
$$= \overrightarrow{O_c} \cdot \overrightarrow{OC_1'} = \overrightarrow{O_{a_1}} \cdot \overrightarrow{OA} =$$
$$= \overrightarrow{O_{b_1}} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O_{c_1}} \cdot \overrightarrow{OC} = k^2.$$

Aceasta arată că A_1', B_1', C_1' sunt polii laturilor BC, CA respectiv AB față de cercul $\mathcal{C}(O; k)$, adică triunghiurile $A_1'B_1'C_1'$ și ABC sunt polar reciproce față de acest cerc. *(G.M. XXII)*

17. Considerăm cercul circumscris patrulaterului $CB'C'B$; fie M_a centrul acestui cerc. Polara lui P față de acest cerc este AH, iar polara lui A față de acest cerc este PH; rezultă că H este polul dreptei AP și, prin urmare, $M_aH \perp AP$ sau $M_aH \perp UW$. Analog, se arată că $M_bH \perp VW$ și că $M_cH \perp UV$. În consecință, triunghiurile $M_aM_bM_c$ și UVW sunt ortologice cu centrul de ortologie H.

18. Se arată că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt omologice cu ajutorul teoremei lui Ceva;$\frac{A_2C_1}{A_2B_1} = \frac{b \cdot \cos C}{c \cdot \cos B}$. Ortologia rezultă din faptul că AA_2 fiind perpendiculară pe B_1C_1 (care este antiparalelă cu BC) trece prin centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC.

19. Notăm M_d mijlocul laturii BC. Patrulaterul $M_aM_bM_dM_c$ este paralelogram. Perpendicularele ridicate în punctele M_a, M_b, M_d, M_c pe B_1C_1, B_1C, BC respectiv pe AB sunt concurente în centrul cercului din enunț.

20. Fie A_1', B_1', C_1' proiecțiile punctelor A_1, B_1, C_1 pe B_2C_2; C_2A_2 respectiv A_2B_2. Notăm $\{Q\} = A_1A_1' \cap B_1B_1' \cap C_1C_1'$. Din reciproca teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $A_0A_1' \perp B_2C_2$, $B_0B_1' \perp A_2C_2$ și $C_0C_1' \perp A_2B_2$. Pe de altă parte, planele $(A_0A_1A_1')$, $(B_0B_1B_1')$, $(C_0C_1C_1')$ având în comun punctul Q și conținând respectiv dreptele A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0

paralele, înseamnă că au în comun o dreaptă paralelă cu acestea, care trece prin Q și intersectează planul $A_2B_2C_2$ în Q'. Acest punct Q' este pe fiecare din dreptele A_0A_1', B_0B_1', C_0C_1', prin urmare aceste drepte sunt concurente în Q' și acest punct este centrul de ortologie al triunghiului $A_0B_0C_0$ față de $A_2B_2C_2$. Notăm cu M, N, P axa de omologie a triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ (dreapta de intersecție a planelor lor). Deoarece proiecția dreptei B_1C_1 pe planul $(A_2B_2C_2)$ este B_0C_0 și $B_1C_1 \cap (A_2B_2C_2) = \{M\}$, rezultă că $M \in B_0C_0$, deci $\{M\} = B_0C_0 \cap B_2C_2$, analog $\{N\} = A_0C_0 \cap A_2C_2$ și $\{P\} = A_0B_0 \cap A_2B_2$.

21. a) Perpendicularele în A', B', C' respectiv pe BC, AC, AB sunt concurente dacă și numai dacă:

$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$.

Această relație este echivalentă cu:

$(A'B - A'C) \cdot BC + (B'C - B'A) \cdot AC + (C'A - C'B) \cdot AB = 0$.

Dar: $A'C = BC - A'B$; $B'A = AC - B'C$; $C'B = AB - C'A$.

Înlocuind aceste relații în precedenta, obținem relația cerută.

b) Se știe că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$.

Luând $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ și $A'B = x,\ B'C = y,\ C'A = z$ se obține, ținând seama de inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz și de relația de la a), relația b).

c) $BA'^2 + CB'^2 + AC'^2$ este minimă dacă și numai dacă are loc egalitatea în inegalitatea de la b), adică dacă și numai dacă $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Notăm $\frac{y}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$.

Din a), rezultă:

$ax + by + cz = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$;

$a^2k + b^2k + c^2k = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$, deci $k = \frac{1}{2}$, ceea ce arată că A', B', C' sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB și, prin urmare, punctul de intersecție a perpendicularelor în A', B', C' pe BC, CA, AB este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

22. Este suficient să demonstrăm că medianele triunghiului ABC sunt perpendiculare pe liniile centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor respective. Demonstrăm că AM (mediana din A) este perpendiculară pe O_1O_2 (O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului ABA_1, iar O_2 este centrul cercului circumscris ABA_2).

Notăm $AO_1 = \mathrm{r}_1$, $AO_2 = \mathrm{r}_2$, $d(O_1, BC) = d_1$, $d(O_2, BC) = d_2$, $\frac{1}{2}BA_1 = x$ și $MB = \frac{1}{2}a$.

$AM \perp O_1O_2 \Leftrightarrow AO_1^2 - AO_2^2 = MO_1^2 - MO_2^2$.

$MO_1^2 = d_1^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$;

$MO_2^2 = d_2^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$.

Pe de altă parte, $d_1^2 = \mathrm{r}_1^2 - x^2$, $d_2^2 = \mathrm{r}_2^2 - x^2$.

Rezultă că $MO_1^2 - MO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = O_1A^2 - O_2A^2$.

23. Perpendiculara din A_1 pe BC, perpendiculara din B_1 pe CA și perpendiculara din C_1 pe AB se intersectează în D, cu alte cuvinte, triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic cu triunghiul ABC, iar centrul de ortologie este punctul D.

24. *Soluția 1.* Notăm $BC = a$ și $BA_1 = x$, $CB_1 = y$, $AC_1 = z$.

Din $A_1B_1 = B_1C_1$, obținem:

$(a - x)^2 + y^2 - (a - x)y = (a - y)^2 + z^2 - (a - y) \cdot z$,

echivalentă cu:

$(x - z)(x + y + z - a) = a(x - y)$. (1)

Analog, din $B_1C_1 = A_1C_1$, rezultă:

$(y - x)(x + y + z - a) = a(y - z)$. (2)

Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ fiind ortologice, avem că:

$$x^2 - (a - x)^2 + y^2 - (a - y)^2 + z^2 - (a - z)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2ax + 2ay + 2az = 3a^2 \Leftrightarrow$$

$x + y + z = \frac{3}{2}a$. (3)

Substituind $x + y + z$ din (3) în (1) și (2), obținem că $x = y = z = \frac{a}{2}$, ceea ce arată că $A_1B_1C_1$ este triunghiul median al triunghiului ABC.

Soluția 2. Păstrând notațiile precedente, demonstrăm că $x = y = z$, demonstrând că $\Delta AB_1C_1 \equiv \Delta BC_1A_1 \equiv \Delta CA_1B_1$.

Într-adevăr, dacă notăm $m\widehat{AB_1C_1} = \alpha$, atunci $m\widehat{AC_1B_1} = 120^0 - \alpha$, și cum $m\widehat{A_1C_1B_1} = 60^0$, obținem că: $m\widehat{BC_1A_1} = \alpha$, deci $m\widehat{BA_1C_1} = 120^0 - \alpha$. Analog, obținem $m\widehat{B_1A_1C} = \alpha$ și $m\widehat{A_1B_1C} = 120^0 - \alpha$.

Congruența triunghiurilor evidențiate rezultă acum cu criteriul U.L.U. Apoi, continuarea ca în *Soluția 1*.

25. Dacă triunghiul ABC este isoscel, de exemplu AB=AC, demonstrăm că ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice, arătând că este adevărată relația:

$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0. \qquad (1)$$

Deoarece $A'B = A'C$, rămâne să arătăm că $B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$. BB' și CC' sunt bisectoare și AB=AC, obținem fără dificultate că $B'C = BC'$ și $B'A = C'A$, deci (1) este verificată.

Observație

În această ipoteză, putem demonstra concurența perpendicularelor duse în A', B', C' pe BC, CA, AB și astfel:

Notăm O_1 intersecția perpendicularei în B' pe AC cu AA'. Din congruența triunghiurilor $AB'O$ și $AC'O$, rezultă că $\sphericalangle AC'O_1 = 90^0$, deci și perpendiculara în C' pe AB trece prin O_1.

Reciproc, dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice, are loc relația (1), să demonstrăm că triunghiul ABC este isoscel.

Cu teorema bisectoarei, găsim: $A'B = \frac{ac}{b+c}$, $A'C = \frac{ab}{b+c}$, $B'C = \frac{ab}{a+c}$, $B'A = \frac{bc}{a+c}$, $C'A = \frac{bc}{a+b}$, $C'B = \frac{ac}{a+b}$.

Obținem:

$$\frac{a^2(c-b)}{b+c} + \frac{b^2(a-c)}{a+c} + \frac{c^2(b-a)}{b+a} = 0.$$

Efectuând calculele, se obține:

$$(a-c)(b-a)(b-c)(a+b+c)^2 = 0,$$

de unde rezultă că $a = b$ sau $b = c$ sau $c = a$, deci triunghiul ABC este isoscel.

26. a) Condiția de concurență a dreptelor MA_1, MB_1, MC_1 este echivalentă cu:

$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$, sau:

$$(A_1B - A_1C)(A_1B + A_1C) + (B_1C - B_1A)(B_1C + B_1A) + (C_1A - C_1B)(C_1A + C_1B) = 0.$$

Obținem:

$A_1B + B_1C + C_1A = A_1C + B_1A + C_1B = \frac{3a}{2}$.

b) Notăm: $A_1B = x,\ B_1C = y,\ C_1A = z$. Condiția de concurență a dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 este echivalentă cu $\frac{a-x}{x} \cdot \frac{a-y}{y} \cdot \frac{a-z}{z} = 1$ sau:

$a^3 - (x + y + z)a^3 + (xy + yz + zx)a - 2xyz = 0.$

Deoarece: $x + y + z = \frac{3a}{2}$, rezultă:

$-a^3 + 2(xy + yz + zx)a - 4xyz = 0.$ (1)

Pe de altă parte:

$(a - 2x)(a - 2y)(a - 2z) = a^3 - 2(x + y + z)a^2 + 4(xy + yz + zx)a - 8xyz = a^3 - 3a^3 + 4(xy + yz + zx)a - 8xyz = -2a^3 + 4(xy + yz + zx)a - 8xyz.$ (2)

Din relațiile (1) și (2) avem că:

$(a - 2x)(a - 2y)(a - 2z) = 0$, de unde $x = \frac{a}{2}$ sau $y = \frac{a}{2}$ sau $z = \frac{a}{2}$, deci M se află pe una dintre înălțimi.

27. Fie K punctul lui Lemoine în triunghiul ABC; se știe că: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c^2}{b^2}$; $\frac{B'C}{B'A} = \frac{a^2}{c^2}$; $\frac{C'A}{C'B} = \frac{b^2}{a^2}$.

Obținem:

$A'B = \frac{ac^2}{b^2+c^2}$; $A'C = \frac{ab^2}{b^2+c^2}$; $B'C = \frac{ba^2}{a^2+c^2}$; $B'A = \frac{bc^2}{a^2+c^2}$; $C'A = \frac{cb^2}{a^2+b^2}$; $C'B = \frac{ca^2}{a^2+b^2}$.

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice dacă și numai dacă:

$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0.$ (1)

Dacă presupunem că triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC$, atunci AA' este mediană, deci $A'B = A'C$; de asemenea, găsim că $B'A = C'A$și $B'C = C'B$, și relația (1) este satisfăcută.

Dacă are loc relația (1), atunci obținem că:

$\frac{a^2(c^2-b^2)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2+c^2} + \frac{c^2(b^2-a^2)}{a^2+b^2} = 0.$

Această relație este echivalentă cu:

$$a^2(c^2-b^2)(a^2+c^2)(a^2+b^2)+b^2(a^2-c^2)(b^2+c^2)(a^2+b^2)$$
$$+c^2(b^2-a^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)=0.$$
$$a^2(c^2-b^2)(a^2+c^2)(a^2+b^2)$$
$$+(b^2+c^2)[b^2(a^4+a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)$$
$$+c^2(a^2b^2-a^4+b^2c^2-a^2c^2)]=0.$$
$$a^2(c^2-b^2)(a^2+c^2)(a^2+b^2)$$
$$+(b^2+c^2)[-a^4(c^2-b^2)-a^2(c^4-b^4)$$
$$+b^2c^2(c^2-b^2)]=0$$
$$(c^2-b^2)\{a^2(a^2+c^2)(a^2+b^2)$$
$$+(b^2+c^2)[-a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2]\}=0$$
$$(c^2-b^2)[a^6-a^4b^2+a^4c^2+a^2b^2c^2-a^4b^2-a^2b^4-a^2b^2c^2+b^4c^2$$
$$-a^4c^2-a^2b^2c^2-a^2c^4+b^2c^4]=0$$

Se obține:
$(a^2-b^2)(c^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)=0$, deci:
$(a-b)(c-b)(a-c)(a+b)(b+c)(a+c)(a^2+b^2+c^2)=0$.
Prin urmare, a=b sau b=c sau a=c, deci triunghiul ABC este isoscel.

28. a) Condiția dată este echivalentă cu ortologia triunghiurilor.

b) Ducem prin punctul P paralelele MN, RS, UV la BC, CA respectiv AB. Evident, triunghiurile PVR, PNU și PSM sunt echilaterale.

Avem:
$\overrightarrow{PA_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PV}+\overrightarrow{PR}\right)$;
$\overrightarrow{PB_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PU}\right)$;
$\overrightarrow{PC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PM}\right)$.
$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$.

S-a ținut seama că patrulaterele $PUAS$; $PMBV$; $PRCN$ sunt paralelograme.

Pentru orice punct P din planul triunghiului ABC are loc $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$, unde G este centrul de greutate. În cazul nostru, $G=0$ pentru că ABC este echilateral, prin urmare $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PG}$.

29. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul podar al lui M. Avem $m(\sphericalangle A_1MB_1)=m(\sphericalangle B_1MC_1)=m(\sphericalangle C_1MA_1)=120^0$. Dacă pe semidreptele $(MA_1$, $(MB_1$,

(MC_1 considerăm punctele A', B', C', astfel ca $MA' = MB' = MC'$, atunci $A'B'C'$ și ABC sunt ortologice, iar centrul de ortologie este punctul M.

30. Perpendicularele duse din I pe BC, CA, AB întâlnesc respectiv$B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ înT_1, T_2, T_3. Triunghiurile ABC și $T_1T_2T_3$ sunt prin construcție ortologice (I este unul dintre centrele lor de ortologie). Dreptele A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b sunt paralele cu laturile triunghiului $T_1T_2T_3$, deci perpendicularele duse din A,B, respectiv C pe ele sunt concurente în al doilea centru de ortologie al triunghiurilor ABC și $T_1T_2T_3$.

31. Observăm că triunghiul $B_1B_2B_3$ este triunghiul podar al punctului B_1 în raport cu triunghiul $A_1A_2A_3$, în consecință triunghiurile $B_1B_2B_3$ și $A_1A_2A_3$ sunt ortologice, centrul de ortologie fiind B_1. De asemenea, triunghiul $A_1A_2A_3$ este ortologic cu triunghiul $B_1B_2B_3$, centrul de ortologie fiind punctul A_1. Să demonstrăm acum că perpendiculara din A_1 pe B_3B_1, perpendiculara din A_2 pe B_1B_2 și perpendiculara din A_3 pe B_2B_3 sunt concurente. Observăm că primele două perpendiculare sunt concurente în A_2; demonstrăm că și perpendiculara din A_3 pe B_2B_3 trece prin A_2, practic vom demonstra că $B_2B_3 \perp A_2A_3$.

Patrulaterul $B_1B_2A_1B_3$ este dreptughi, rezultă că $\sphericalangle B_1B_2B_3 \equiv \sphericalangle B_1A_1B_3$. Din $\sphericalangle A_1A_3A_2 \equiv \sphericalangle A_2A_1D$, obținem că $\sphericalangle B_1B_2B_3 \equiv \sphericalangle A_2A_1D$.

Aceste unghiuri au $B_1B_2 \parallel A_2A_1$, rezultă că și $B_2B_3 \parallel A_1D$ și cum$A_1D \perp A_2A_3$, rezultă că $B_2B_3 \perp A_2A_3$.

Am obținut că al doilea centru de ortologie al triunghiurilor $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ este A_2. Rezultă că triunghiul $B_1B_2B_3$ este de două ori ortologic cu triunghiul$A_1A_2A_3$. Arătăm că al doilea centru de ortologie este B_2. Într-adevăr perpendiculara din B_1 pe A_3A_1 este B_1B_2, deci trece prin B_2. Perpendiculara din B_2 pe A_1A_2 trece prin B_2, și perpendiculara din B_3pe A_2A_3 am demonstrat anterior că este B_2B_3.

Nu este dificil de arătat că perpendiculara din A_1 pe B_1B_2, perpendiculara din A_2 pe B_2B_3 și perpendiculara din A_3 pe B_3B_1 sunt concurente în A_3, deci A_3 este al treilea centru de ortologie al triunghiului $A_1A_2A_3$ în raport cu $B_1B_2B_3$. Al treilea centru de ortologie al triunghiului $B_1B_2B_3$ în raport cu $A_1A_2A_3$ este B_3.

32. Arătăm că triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic cu ABC. Notăm O' centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, evident mediatoarele segmentelor $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ trec prin O'. Perpendiculara în A_1 pe BC trece prin P', simetricul lui P față de O'. (Într-adevăr, patrulaterul $A_1A'PP'$ este trapez dreptunghic și mediatoarea lui A_1A' conține linia mijlocie a acestui trapez.) Analog, rezultă că P' aparține și perpendicularelor în B_1 pe AC și în C_1 pe AB_1. În consecință, triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt ortologice.

33. Vom arăta că $\alpha B^2 - \alpha C^2 + \beta C^2 - \beta A^2 + \gamma A^2 - \gamma B^2 = 0$. Calculăm αB și αC ca mediane în triunghiurile BB_1C_1 și CC_1B_1. Este ușor de remarcat din congruența triunghiurilor BAB_1 și CAC_1 că $BB_1 = CC_1$. Avem:

$\alpha B^2 = \frac{1}{4}[2(c^2 + BB_1^2) - B_1C_1^2]$,

$\alpha C^2 = \frac{1}{4}[2(b^2 + CC_1^2) - B_1C_1^2]$.

Deci $\alpha B^2 - \alpha C^2 = \frac{1}{2}(c^2 - b^2)$.

Analog, găsim:

$\beta C^2 - \beta A^2 = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$,

$\gamma A^2 - \gamma B^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

34. Patrulaterele $AA'CB$; $BB'CA$; $CC'AB$ sunt, în general, trapeze isoscele. Avem $A'C = AB$; $A'B = AC$etc. Arătăm că $A'B'C'$ este ortologic cu ABC; calculând:

$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2$,

se obține zero, deci $A'B'C'$ este ortologic cu ABC. Centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $A'B'C'$ este chiar O.

35. Fie H_1 ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$ și X_1 intersecția semidreptei $(AH_1$ cu cercul circumscris triunghiului AA_1A_2. Avem: $AH_1 \cdot H_1X_1 = A_1H_1 \cdot H_1A_2$ (1) (puterea punctului H_1 față de cercul AA_1A_2).

Notăm X_2 intersecția semidreptei $(AH_1$ cu cercul AB_1B_2. Avem: $AH_1 \cdot H_1X_2 = B_1H_1 \cdot H_1B_2$ (2).

Analog, dacă X_3 este intersecția semidreptei $(AH_1$ cu cercul AC_1C_2, avem: $AH_1 \cdot H_1X_3 = C_1H_1 \cdot H_1C_2$ (3).

Din relațiile (1), (2), (3), datorită faptului că $A_1H_1 \cdot H_1A_2 = B_1H_1 \cdot H_1B_2 = C_1H_1 \cdot H_1C_2$ (4).

Rezultă că $X_1 = X_2 = X_3$, în consecință cercurile din enunț mai au încă un punct comun.

Relația (4) rezultă din proprietatea simetricelor ortocentrului unui triunghi de a fi pe cercul circumscris acestuia și din puterea ortocentrului față de cercul circumscris triunghiului.

Raționamentul este analog în cazul triunghiului obtuzunghic.

36. Fie K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC și A_1, B_1, C_1 proiecțiile lui K pe BC, CA respectiv AB. Vom folosi următorul rezultat: "punctul lui Lemoine K al triunghiului ABC este centrul de greutate al triunghiului său podar și reciproc".

Știm despre K că este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$ și al triunghiului MNP, avem deci:

$\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KB_1} + \overrightarrow{KC_1} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN} = \vec{0}$.

Deoarece $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{A_1P}$; $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KB_1} + \overrightarrow{B_1M}$ și $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KC_1} + \overrightarrow{C_1N}$, obținem că: $\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{B_1M} + \overrightarrow{C_1N} = 0$.

Dacă notăm M', N', P' proiecțiile lui K pe laturile triunghiului MNP, rezultă relația $\overrightarrow{KP'} + \overrightarrow{KM'} + \overrightarrow{KN'} = 0$, ceea ce exprimă faptul că punctul K este centrul de greutate al triunghiului său podar $M'N'P'$ în raport cu triunghiul MNP, prin urmare K este centrul simedian al triunghiului MNP.

Deoarece în triunghiul MNP centrul simedian coincide în centrul de greutate obținem că acest triughi este echilateral. Pe de altă parte, triunghiul MNP construit ca în enunț este asemenea cu triunghiul ABC. Triunghiul MNP fiind echilateral, rezultă că și ABC va fi echilateral.

37. Fie $\{H\} = EF \cap AD$, deoareceMN este linie mijlocie în ABD, rezultă că $NM \parallel BD$, de asemenea $EH \perp NM$. Cum $NA \perp EM$ rezultă că H este ortocentrul triunghiului NEM, prin urmare $NM \perp EH$.Patrulaterul $PHMF$este paralelogram de centru O, prin urmare $PF \parallel HM$ și cum $DL \perp NE$, rezultă că $MH \perp DL$.Perpendiculara dusă din N pe LB este NA, perpendiculara dusă din E pe DB este EO, iar perpendiculara dusă din M pe LD este MH, aceste perpendiculare sunt înălțimile triunghiului NEM care

sunt concurente în H. Centrul de ortologie al triunghiului NEM în raport cu DLB este H – ortocentrul triunghiului NEM, iar centrul de ortologie al triunghiului DLB în raport cu triunghiul NEM este ortocentrul triunghiului DLB.

38. Observăm că triunghiurile ACB și AFD sunt ortologice. Într-adevăr, perpendiculara din A pe FD, perpendiculara din C pe AD și perpendiculara din B pe AF sunt concurente în E. Punctul E este centrul de ortologie al triunghiului ACB în raport cu AFD. Conform teoremei triunghiurilor ortologice, avem că și triunghiul AFD este ortologic în raport cu ACB, prin urmare perpendiculara din A pe CB, perpendiculara din F pe AB şi perpendiculara din D pe AC sunt concurente. Deoarece perpendiculara din A pe BC și perpendiculara din F pe AB sunt concurente în B, rezultă că și perpendiculara din D pe AC trebuie să treacă prin B, și cum AC este diametru în cerc, rezultă că B trebuie să fie simetricul lui D față de AC, prin urmare $AD = AB$.

39. Din $QR \parallel AB$, M mijlocul lui AB și $\{N\} = QR \cap CM$obținem că la: N este mijlocul lui QR. De asemenea, din $AQ = \frac{1}{4} \cdot AC \Longrightarrow MN = \frac{1}{4} \cdot CM$, deci $PN = \frac{1}{2} \cdot CP$, adică Peste centrul de greutate al triunghiului CQR (dreptunghi isoscel), în consecință $QP \perp CB$. Perpendiculara din R pe AC este chiar RQ, iar perpendiculara din Q pe AB este QA.

Din cele de mai sus rezultă că triunghiul PRQ este ortologic cu triunghiul ABC centrul de ortologie fiind punctul Q. Teorema triunghiurilor ortologice arată că și triunghiul ABC este ortologic în raport cu PRQ centrul de ortologie fiind vârful C.

40. Notăm $BA_1 = CA_1 = \frac{a}{2}$, $B_1C = y$, $B_1A = b - y$, $C_1A = z$, $C_1B = c - z$. Din teorema lui Ceva, găsim:

$$y = \frac{b}{c}(c - z). \tag{1}$$

Triunghiul ABC fiind ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$, avem:

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0.$$

Obținem:

$$2by - b^2 + 2cz - c^2 = 0. \tag{2}$$

Substituind y în (2), rezultă:

$2z(c^2 - b^2) - c(c^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (c - b)(c + b)(2z - c) = 0.$

Dacă $z = \frac{c}{2}$, atunci CC_1 ar fi mediană și de asemenea BB_1. Dacă $b = c$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

41. a) Presupunând problema rezolvată, din condițiile date, găsim că $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B$, $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle C$, prin urmare $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta BCA$. Construim mai întâi un triunghi $A'B'C'$ cu $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ și $\Delta A'B'C' \sim \Delta BCA$. Fixăm $A' \in (BC)$ și construim $B' \in (AC)$, astfel încât $A'B' \perp BC$. Construim apoi perpendiculara în B' pe AC. Construim pe această perpendiculară punctul C', astfel ca $\sphericalangle C'A'B' \equiv \sphericalangle B$. Acum trasăm dreapta CC' și notăm cu C_1 intersecția acesteia cu (AB). Construim $C_1B_1 \perp AC$ cu $B_1 \in (AC)$, construim $B_1A_1 \perp BC$ cu $A_1 \in (BC)$. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este cel cerut. Demonstrația construcției rezultă din faptul că $A'B'C'$ este asemenea cu BCA ($\sphericalangle B' = \sphericalangle C$ și $\sphericalangle A' \equiv \sphericalangle B$). Triunghiul $A'B'C'$ și triunghiul $A_1B_1C_1$ sunt omotetice, așa că $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta BCA$. De asemenea, rezultă că $A_1C_1 \perp AB$.

b) Perpendicularele duse din O_1, O_2, O_3 respectiv pe A_1C_1, A_1B_1 și B_1C_1 sunt mediatoarele triunghiului $A_1B_1C_1$.

42. Perpendicularele ridicate în A, B, C respectiv pe O_2O_3, O_3O_1 și O_1O_2 sunt axele radicale ale perechilor de cercuri:$\left(\mathcal{C}(O_2), \mathcal{C}(O_3)\right)$ și $\left(\mathcal{C}(O_3), \mathcal{C}(O_1)\right)$ respectiv $\left(\mathcal{C}(O_1), \mathcal{C}(O_2)\right)$. După cum este cunoscut, aceste axe radicale sunt concurente în centrul radical Ω al cercurilor date. În consecință, triunghiulABC și triunghiul $O_1O_2O_3$ sunt ortologice și centrul de ortologie este Ω. Centrul de ortologie al triunghiului $O_1O_2O_3$ în raport cu ABC (având în vedere că ABC este triunghiul podar al lui Ω în raport cu $O_1O_2O_3$ va fi Ω' conjugatul izogonal al lui Ω.

43. Triunghiul AC_bC_c este isoscel. Înălțimea din A a acestuia este bisectoarea din A a triunghiului ABC, prin urmare perpendiculara din A pe C_bC_c trece prin I – centrul cercului înscris. Analog, perpendicularele duse din H_b respectiv H_c pe C_aC_c trec prin I, în consecință, triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $C_aC_bC_c$ sunt ortologice și centrul de ortologie este I. Patrulaterele $H_aC_cIC_b$, $H_bC_aIC_c$ și $C_aH_cC_bI$ sunt romburi. În triunghiulIH_bH_c, dreapta

MN, unde M este mijlocul lui C_aC_c și N este mijlocul lui C_aC_b, este linie mijlocie, deci $MN \parallel H_bH_c$. Atunci, perpendiculara dusă din C_a peH_bH_c este perpendiculară pe MN și, prin urmare, este înălțimea din C_a a triunghiului de contact. Centrul de ortologie al triunghiului $H_aH_bH_c$în raport cu $C_aC_bC_c$este ortocentrul triunghiului de contact.

44. Fie D, E, F contactele cu BC, AB respectiv AC ale cercului A-exînscris. Triunghiul DEF este ortologic în raport cu ABC deoarece perpendicularele duse în D, E, F pe BC, AB și AC sunt concurente în centrul I_a al cercului A-exînscris. Deoarece $AE = AF$ (tangente duse dintr-un punct exterior la cerc), înseamnă că perpendiculara din A pe EF este bisectoare în triunghiul ABC și conține, prin urmare, punctul I_a, analog perpendicularele duse din B și din C pe ED respectiv DF trec prin I_a.

45. Din $C_1B_1 \parallel BC$ rezultă că $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_1}{B_1C}$ (1). Din $B_1A_1 \parallel AB$ rezultă că $\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{A_1C}{A_1B}$ (2). Triunghiul ABC fiind ortologic cu $A_1B_1C_1$ și $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1B_1 \parallel AB$ înseamnă că centrul de ortologie este H, ortocentrul lui ABC, și atunci ar însemna că A_1C_1 trebuie să fie paralelă cu AC.

Din (1) și (2) obținem: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{A_1B}{A_1C}$ (3). Pentru că $A_1C_1 \parallel AC$, avem: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA_1}{BA_1}$ (4).

Relațiile (3) și (4) conduc la $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_1C}{A_1B}$, deci $A_1B = A_1C$, prin urmare A_1 este mijlocul lui BC. Având $A_1B_1 \parallel AB$, obținem că B_1 este mijlocul lui AC, iar $B_1C_1 \parallel BC$ conduce la concluzia C_1 este mijlocul lui AB. În consecință, $A_1B_1C_1$ este triunghiul complementar (median) al triunghiului ABC.

46. Evident, O este centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$. Deoarece B_1C_1 este mediatoarea lui AO, avem că $B_1A = BO_1$; cum B_1A_1 este mediatoarea lui CO, avem $B_1O = B_1C$. Din egalitățile anterioare, reținem că $B_1A = B_1C$, deci B_1 este pe mediatoarea laturii AC a triunghiului ABC, analog rezultă că perpendiculara din A_1 pe BC este mediatoarea lui BC și perpendiculara din C_1 pe AB este mediatoarea lui AB.

În consecință, O – centrul cercului circumscris este și centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu ABC.

47. Triunghiul ABC și triunghiul $A_1B_1C_1$ sunt evident ortologice, centrul ortologiei fiind P. Din teorema triunghiurilor ortologice avem că și $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu ABC. Deoarece A_1 aparține mediatoarelor segmentelor BP și CP, rezultă că A_1 este centrul cercului circumscris triunghiului BPC, așa că perpendiculara dusă din A_1 pe BC este mediatoarea lui BC, în consecință centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC este O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

48. Triunghiul ABC fiind ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$, înseamnă că perpendicularele duse din A, B, C pe B_1C_1, C_1A_1 respectiv A_1B_1 sunt concurente în centrul N de ortologie. Polul perpendicularei dusă din A pe B_1C_1 este chiar punctul X, polul perpendicularei dusă din B pe C_1A_1 este Y, iar polul perpendicularei dusă din C pe A_1B_1 este Z. Perpendicularele anterioare fiind concurente în N, înseamnă că polii lor în raport cu dualitatea relativă la cercul înscris sunt puncte coliniare. În concluzie, X, Y, Z sunt puncte coliniare.

49. Deoarece perpendiculara din Q pe AS și perpendiculara din P pe AR sunt concurente în M, pentru a fi ortologice triunghiurile AQP și ARS este necesar ca și perpendiculara dusă din A pe RS să treacă prin M. Construim cercul circumscris triunghiului $PB'B$și cercul circumscris triunghiului $QC'C$. Punctul M are puteri egale față de aceste cercuri deoarece:

$$MB \cdot MB' = MC \cdot MC'. \qquad (1)$$

Contruim cercul circumscris triunghiului APP' și cercul circumscris triunghiului AQQ', unde $\{P'\} = MP \cap AB$, $\{Q'\} = MQ \cap AC$, fie O_1 și O_2 centrele lor și fie T al doilea punct de intersecție a lor.

Din $MP \cdot MP' = MB \cdot MB'$și $MQ \cdot MQ' = MC \cdot MC'$ (2) și din relația (1), rezultă că punctul M are puteri egale față de aceste cercuri, deci aparține axei radicale AT.

Deoarece $AT \perp O_1O_2$ și $O_1O_2 \parallel PQ$ (este linie mijlocie în triunghiul APQ) rezultă că $AM \perp RS$.

50. Deoarece perpendiculara dusă din P pe ER și perpendiculara dusă din Q pe E sunt concurente în M, pentru a fi ortologice triunghiurile EPQ și ESR trebuie ca și perpendiculara dusă din E pe RS să treacă prin M. Vom demonstra deci că$ME \perp PQ$. Construim cercurile circumscrise triunghiurilor MAP și MBQ, notăm cu T al doilea lor punct de intersecție și notăm cu A' respectiv B' al doilea lor punct de intersecție cu AE respectiv BE. Din $m(\widehat{MTP}) = m(\widehat{MTQ}) = 90^0$, rezultă că T aparține dreptei PQ. Punctul A' este simetricul lui A față de MP, iar B' este simetricul lui B față de MQ. Patrulaterul $AA'B'B$este inscriptibil ($MA = MA' = MB' = MB$), atunci $EA' \cdot EA = EB' \cdot EB$, prin urmare E are puteri egale față de cercurile APM și BMQ, în consecință E aparține axei radicale a acestor cercuri, adică coardei comune MT. Aceasta este perpendiculară pe linia centrelor cercurilor care este paralelă cu PQ, așa că $ME \perp PQ$.

51. Notăm $A_1B_1C_1$ – triunghiul U-circumpedal al lui ABC și $\alpha = \sphericalangle BAA_1, \beta = \sphericalangle CAA_1, \delta = \sphericalangle B_1BA, \gamma = \sphericalangle B_1BC, \varphi = \sphericalangle C_1CB, \varepsilon = \sphericalangle C_1CA$. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice, prin urmare:

$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0.$ (1)

Din teorema sinusurilor, rezzultă că $BA_1 = 2R\sin\alpha,\ CA_1 = 2R\sin\beta$ și analoagele. R este raza cercului circumscris triunghiului ABC. Cu aceste substituiri, relația (1) devine:

$\sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\delta + \sin^2\varepsilon - \sin^2\varphi = 0.$ (2)

Deoarece V este conjugatul izogonal al lui U, avem (notând $A_2B_2C_2$ circumpedalul lui V):$\sphericalangle A_2AB = \beta, \sphericalangle A_2AC = \alpha, \sphericalangle B_2BA = \gamma, \sphericalangle B_2BC = \delta, \sphericalangle C_2CA = \varphi, \sphericalangle C_2CB = \varepsilon$.

Relația (2) se poate scrie:

$\sin^2\beta - \sin^2\alpha + \sin^2\delta - \sin^2\gamma + \sin^2\varphi - \sin^2\varepsilon = 0.$

Această relație este echivalentă cu:

$A_2B^2 - A_2C^2 + B_2C^2 - B_2A^2 + C_2A^2 - C_2B^2 = 0,$

ceea ce exprimă ortologia triunghiului V-circumpedal ABC cu triunghiul ABC.

52. Arătăm că perpendiculara dusă din A pe SQ este mediană în triunghiul ABC. Fie T al patrulea vârf al paralelogramului $AQTS$. Se observă că triunghiul SAT se obține din triunghiul ABC dacă acestuia din urmă i se

aplică o translație de vector $\overrightarrow{AS}$ și apoi o rotație de centru S și de unghi drept. Prin aceste transformări, mediana SO a triunghiului AST ($\{O\} = SQ \cap AT$) este transformata medianei din A a triunghiului ABC. Aceste drepte sunt perpendiculare, prin urmare mediana din A a triunghiului ABC este perpendiculară pe SQ. Analog, mediana din B este perpendiculară pe A_1C_1, iar cea din C este perpendiculară pe A_1B_1. Centrul de ortologie este G – centrulde greutate al triunghiului ABC.

53. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$. ABC și $A'B'C'$ fiind ortologice, avem că:

$a(c'-b') + b(a'-c') + c(b'-a') = 0.$ (1)

Deoarece $\frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} = \frac{CC''}{C''C'} = \lambda$, avem că:

$A''\left(\frac{a+\lambda a'}{1+\lambda}\right)$, $B''\left(\frac{b+\lambda b'}{1+\lambda}\right)$, $C''\left(\frac{c+\lambda c'}{1+\lambda}\right)$.

$\overrightarrow{A''B''}\left(\frac{b-a+\lambda(b'-a')}{1+\lambda}\right)$;

$\overrightarrow{A''B''}\left(\frac{c-b+\lambda(c'-b')}{1+\lambda}\right)$;

$\overrightarrow{C''A''}\left(\frac{a-c+\lambda(c'-a')}{1+\lambda}\right)$.

Evaluăm:

$$\frac{a[(c-b)+\lambda(c'-b')]}{1+\lambda} + \frac{b[(a-c)+\lambda(a'-c')]}{1+\lambda} + \frac{c[(b-a)+\lambda(b'-a')]}{1+\lambda}.$$

Ținând seama de (1) și de faptul că $a(c-b) + b(a-c) + c(b-a) = 0$, obținem că suma anterioară este zero; prin urmare ABC și $A''B''C''$ sunt triunghiuri ortologice.

Analog se arată că $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt ortologice. Acum $A'B'C'$ preluând rolul lui ABC, $A''B''C''$ preluând rolul lui $A'B'C'$ și $A'''B'''C'''$ preluând rolul lui $A''B''C''$ din demonstrația precedentă găsim că triunghiurile $A''B''C''$ și $A'''B'''C'''$ sunt ortologice.

54. a) Fie M mijlocul laturii BC. Vom arăta că $AM \perp B'C'$.

Avem:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HC'} - \overrightarrow{HB'}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB'}.$$

Deoarece $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB'} = 0$, avem:

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\left[b \cdot c \cdot \cos\left(\widehat{C'CA}\right) - c \cdot b \cdot \cos\left(\widehat{B'BA}\right)\right] =$
$\frac{1}{2} bc \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + A\right) - cos\left(\frac{\pi}{2} + A\right)\right] = 0,$
prin urmare$AM \perp B'C'$ sau $AG \perp B'C'$.

Analog, rezultă că $BG \perp C'A'$ și $CG \perp A'B'$, în concluzie triunghiul ABC este ortologic în raport cu $A'B'C'$ și centrul de ortologie este centrul de greutate G al triunghiului ABC.

b) Centrul de ortologie al triunghiului$A'B'C'$ în raport cu triunghiul ABC este evident H. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt omologice de centru H. Din teorema lui Sondat, rezultă că axa de ortologie HG este perpendiculară pe axa de omologie $A''B''$.

55. Vom demonstra că triunghiul ABC este ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$ și că centrul de ortologie respectiv este centrul de greutate al triunghiului ABC. Notăm cu A' și cu A'' intersecția perpendicularei duse din A pe B_1C_1 cu B_1C_1 respectiv cu BC. Atunci: $\frac{BA''}{\sin(\widehat{BAA''})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{BA''A})}$ și $\frac{A''C}{\sin(\widehat{CAA''})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{CA''A})}$. Rezultă că: $\frac{BA''}{CA''} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\widehat{BAA''})}{\sin(\widehat{CAA''})} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\cos(\widehat{SAA'})}{\cos(\widehat{QAA'})} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AQ}{AS} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$. În consecință, AA'' este mediană în triunghiul ABC. Analog rezultă că perpendicularele din B și C sunt mediane.

56. Perpendicularele duse din A, B, C pe B_1C_1; C_1A_1 și A_1B_1 sunt bisectoarele triunghiului ABC, deci I – centrul cercului înscris este centru de ortologie. Centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC este O_1 – centrul centrului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$.

57. Triunghiurile DFB și ACE sunt ortologice. Centrul ortologiei este centrul cercului circumscris triunghiului ACE.

58. a) Triunghiurile ABC și MNP sunt evident omologice. Notăm $\{I\} = NP \cap BC$, cum NP și BC sunt fixe, rezultă că I este fix. Axa de omologie a triunghiurilor ABC și MNP este $I - K - L$, deci KL trece prin I.

b) Triunghiurile ABC și MNP sunt ortologice, centrul de ortologie este H – ortocentrul lui ABC. Atunci și perpendicularele duse din B pe MP, din C pe MN și din A pe NP sunt concurente. Punctele locului geometric aparțin perpendicularei duse din A pe NP (dreaptă fixă).

59. Perpendiculara din A' pe BC este înălțimea din A a triunghiului ABC, perpendiculara din B' pe AC și perpendiculara din C' pe AB se intersectează într-un punct P pe înălțimea AA'; acest punct este ortopolul dreptei AM în raport cu triunghiul ABC și este centrul de ortologie al triunghiului $A'B'C'$ în raport cu ABC. Teorema triunghiurilor ortologice implică și concluzia că ABC esteortologic cu $A'B'C'$.

60. Triunghiul B_1C_1A și triunghiul CBP sunt ortologice: într-adevăr perpendiculara dusă din A pe BC, perpendiculara dusă din B_1 pe BP și perpendiculara dusă din C_1 pe CP sunt concurente în H. Din teorema triunghiurilor ortologice, rezultă că și triunghiul CBP este ortologic în raport cu B_1C_1A. Deci perpendiculara dusă din C pe C_1A, din B pe B_1A și din P pe B_1C_1 sunt concurente; cum perpendicularele duse din C pe C_1A și din B pe B_1A sunt concurente în H, rezultă că și perpendiculara din P pe B_1C_1 trece prin H, adică $PH \perp B_1C_1$, însă $PH \perp BC$, deci $B_1C_1 \parallel BC$.

61. Se folosește proprietatea: *perpendicularele duse din vârfurile triunghiului Fuhrmann pe bisectoarele interioare sunt concurente în ortocentrul triunghiului*. Centrul de ortologie al triunghiului lui Fuhrmann $F_aF_bF_c$ în raport cu $A_1B_1C_1$ este H – ortocentrul triunghiului ABC.

62. *Soluția 1 (Mihai Miculița).*Notăm cu P punctul de intersecție al perpendicularei ridicată în L pe AC cu perpendiculara ridicată în M pe latura BC, iar cu K proiecția lui P pe latura AB. Pentru a rezolva problema, trebuie arătat că punctul K este mijlocul laturi (AB).

Din $\left.\begin{matrix} PK \perp AB \\ PL \perp AC \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ patrulaterul $AKPL$ este inscriptibil, deci:

$\sphericalangle KLA \equiv \sphericalangle KPA$. (1)

Din $\left.\begin{matrix} PK \perp AB \\ PM \perp BC \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ patrulaterul $BMPK$ este inscriptibil, deci:
$\sphericalangle KPB \equiv \sphericalangle KMB$. (2)

Din ipoteză, $\sphericalangle KLC \equiv \sphericalangle KMC$, iar de aici rezultă că suplementele lor sunt congruente, deci:
$\sphericalangle KLA \equiv \sphericalangle KMB$. (3)

Relațiile (1), (2) și (3) conduc la $\sphericalangle KPA \equiv \sphericalangle KPB$. Această relație, împreună cu $KP \perp AB$, implică $[AK] \equiv [BK]$.

*Soluția 2 (Ion Pătrașcu).*Relațiile din ipoteză$[AK] \equiv [BK]$ și $\sphericalangle ALK \equiv \sphericalangle BMK$ împreună cu teorema sinusurilor aplicată în triunghiul AKL și BKM conduc la concluzia că cercurile circumscrise acestor triunghiuri sunt congruente.

Fie O_1 respectiv O_2 centrele acestor cercuri, ele sunt situate de aceeași parte a dreptei AB ca și vârful C și avem că $O_1O_2 \parallel AB$.

Notăm cu P al doilea punct de intersecție al cercurilor anterioare. Vom demonstra că P este punctul cerut de enunț. Punctul P fiind simetricul lui K față de O_1O_2 și $O_1O_2 \parallel AB$, avem că $PK \perp AB$.

Din $PK \perp KA$ rezultă că (AP) este diametru în cercul de centru O_1. Unind P cu L, avem că $PL \perp AC$ (unghiul ALP este înscris în semicerc). Judecând analog în cercul de centru O_2, avem că (BP) este diametru și $PM \perp AB$.

Observații și comentarii

Problema în discuție cerea pratic, în ipotezele respective, să demonstrăm că triunghiul MLK este ortologic în raport cu triunghiul ABC și că centrul de ortologie al lui MLK în raport cu ABC este punctul P.

Este cunoscut faptul că, dacă ABC este un triunghi ortologic în raport cu $A'B'C'$ și centrul de ortologie este P, atunci și$A'B'C'$ este ortologic în raport cu BC, centrul de ortologie fiind P', conjugatul izogonal al lui P (vezi [2]). Astfel, rezultă că perpendicularele duse din A pe LK, din B pe KM și din C pe ML sunt concurente într-un punct P' conjugatul izogonal al lui P în triunghiul ABC. Într-adevăr, dacă ducem perpendiculara din A pe KL și notăm cu A' piciorul acesteia, avem că $\sphericalangle KAA' \equiv \sphericalangle PAL$, deoarece complementele lor $\sphericalangle AKA'$, respectiv $\sphericalangle APL$ sunt congruente, în consecință AA' este izogonala lui AP.

Propunem în acest sens cititorului să soluționeze această problemă, demonstrând că perpendiculara din A pe KL, perpendiculara din B pe KM și perpendiculara din C pe ML sunt concurente.

63. I_a este centrul de ortologie al triunghiurilor bilogice ABC și $A_1B_1C_1$. Centrul omologiei acestor triunghiuri esteΓ_a, iar XY este axa de omologie. Conform teoremei lui Sondat avem $I_a\Gamma_a \perp XY$.

64. Perpendiculara din A_1 pe BC este mediatoarea lui BC, deci O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC este centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC. Din teorema triunghiurilor ortologice, rezultă că și triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu triunghiul ABC.

65. Demonstrăm mai întâi că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente. Fie D_a contactul cercului A-exînscris cu BC și fie D'_a diametralul lui D_a în cercul A-exînscris. Notăm C_a și C'_a contactul cercului înscris cu BC și diametralul său în cercul înscris.

Cercurile înscris și A-exînscris sunt omotetice prin omotetia de centru A și raport $\frac{r_a}{r}$; prin aceeași omotetie punctului I îi corespunde I_a, punctului C'_a îi corespunde D_a, iar punctului C_a îi corespunde D'_a. Proiecția lui I pe mediatoarea laturii BC notată cu A' este astfel încâtAA' conține punctul lui Nagel al triunghiului ABC. Deoarece C_a și D_a sunt puncte izotomice, rezultă că A_1 aparține lui AC_a, deci AA_1 trece prin Γ (punctul lui Gergonne). Analog, BB_1 și CC_1 se arată că conțin Γ.

Triunghiul $A_1B_1C_1$ este evident ortologic în raport cu ABC deoarece perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA și AB sunt mediatoarele triunghiului ABC, prin urmare O este centrul de ortologie.

66. Notăm O_1 și O_2 centrele cercurilor; cercurile fiind congruente, rezultă că $O_1O_2 \parallel AB$ (coardele AK și BK fiind egale, sunt egal depărtate de centre). Notăm P simetricul lui K față de O_1O_2, evident P este al doilea punct de intersecție a cercurilor de centre O_1 și O_2. Cum $O_1O_2 \parallel AB$ și $O_1O_2 \perp PK$, obținem că A, O_1, P sunt coliniare și B, O_2, P sunt coliniare. Deoarece AP este diametru, avem că $\sphericalangle PLA = 90^0$, de asemenea BP este diametru și $\sphericalangle PMB = 90^0$. Având $PM \perp BC$, $PL \perp AC$ și $PK \perp AB$, înseamnă că P este centrul de ortologie al triunghiului MLK în raport cu ABC. Locul geometric al punctului P (centrul de ortologie al triunghiului

MLK în raport cu ABC) este semidreapta de origine K perpendiculară pe AB și situată în semiplanul de frontieră AB ce conține punctul C.

67. Triunghiul EBC este ortologic în raport cu triunghiul FAD. Într-adevăr, perpendiculara din E pe AD este EO, perpendiculara din B pe FD este BO (pentru că $ODFA$ este dreptunghi), iar perpendiculara din C pe FA este CO, prin urmare O este centrul de ortologie.Relația de ortologie fiind simetrică, înseamnă că și triunghiul FAD este ortologic în raport cu triunghiul EBC, deci perpendiculara din F pe BCeste FH(este și perpendiculară pe AD), perpendiculara din D pe EB și perpendiculara din A pe EC sunt concurente. Deoarece perpendiculara din F pe AD și perpendiculara din D pe EB se intersectează în H, rezultă că și perpendiculara din A pe EC trece prin H.

68. Triunghiurile DAM și SCV sunt omologice și T este centrul de omologie (T este punctul lui Toricelli al triunghiului DAM).

Triunghiul SCV este ortologic în raport cu DAM și centrul de ortologie este punctul P (într-adevăr, perpendiculara din S pe AM, perpendiculara din C pe DM și perpendiculara din V pe AD sunt concurente în P – mijlocul lui DM).

Din teorema triunghiurilor ortologice, rezultă că și triunghiul DAM este ortologic în raport cu SCV, iar centrul de ortologie este Q. Teorema lui Sondat, implică coliniaritatea punctelor T, P, Q.

69. Fie $A'B'C'$ triunghiul median al lui $A_1B_1C_1$. Atunci triunghiul $A_2B_2C_2$ este omoteticul triunghiului $A'B'C'$ prin omotetia de centru P și de raport 2. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu $A'B'C'$ și centrul de ortologie este ortocentrul lui $A_1B_1C_1$. Triunghiul $A_2B_2C_2$ având laturile paralele cu ale triunghiului $A'B'C'$, înseamnă că ortocentrul lui $A_1B_1C_1$ este și centru de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu $A_2B_2C_2$.

70. i) Dacă ABC este un triunghi ascuțitunghic și $A'B'C'$ este triunghiul său ortic, atunci $A'B'C'$ este ascuțitunghic și $m(\widehat{A'}) = 180^0 - 2\hat{A}$,$m(\widehat{B'}) = 180^0 - 2\hat{B}$, $m(\widehat{C'}) = 180^0 - 2\hat{C}$. Dacă $A''B''C''$ este triunghiul ortic al triunghiului $A'B'C'$, atunci: $m(\widehat{A''}) = 4\hat{A} - 180^0$,

$m(\widehat{B''}) = 4\hat{B} - 180^0$, $m(\widehat{C''}) = 4\hat{C} - 180^0$. Am văzut că un triunghi dreptunghic nu are triunghi ortic, deci ar fi necesar ca triunghiul ABC să aibă un unghi cu măsura de 45^0.

ii) Dacă triunghiul ABC are de exemplu $m(\hat{A}) = 112^0 30'$, atunci triunghiul său ortic $A'B'C'$ are $m(\widehat{A'}) = 45^0$, $m(\widehat{B'}) = 2m(\hat{B})$, $m(\widehat{C'}) = 2m(\hat{C})$. Triunghiul $A''B''C''$ - triunghiul ortic al lui $A'B'C'$ are $m(\widehat{A''}) = 90^0$, $m(\widehat{B''}) = 180^0 - 4m(\hat{B})$, $m(\widehat{C''}) = 180^0 - 4m(\hat{C})$. Triunghiul $A''B''C''$ fiind dreptunghic nu are triunghi ortic.

iii) Dacă ABC este un triunghi echilateral, atunci și $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt echilaterale și ABC este ortologic în raport cu $A''B''C''$. În general, ABC și $A''B''C''$ nu sunt ortologice.

71. a) Perpendiculara dusă din K pe AC este chiar KM pentru că fiind linie mijlocie în triunghiul ABD avem $KM \parallel BD$, deci $KM \perp AC$. Analog, perpendiculara din L pe AB este LM, evident că și perpendiculara din M pe BC trece prin M, prin urmare M este centrulde ortologie al triunghiului MKL în raport cu ABC.

b) Celălalt centru de ortologie este A; într-adevăr, perpendiculara din B pe ML este BA, perpendiculara din C pe KM este CA și perpendiculara din A pe KL trece evident prin A. Deoarece în triunghiulAKL punctul M este ortocentru (KL și LM sunt înălțimi) rezultă că și AM este înălțime, prin urmare $AM \perp KL$.

72. a) Deoarece AA' este bisectoare, avem că arcele $\overset{\frown}{BA'} \equiv \overset{\frown}{CA'}$, deci $BA' = CA'$ și perpendiculara din A' pe BC este mediatoarea lui BC. Astfel, obținem că triunghiul I-circumpedal este ortologic în raport cu ABC și centrul de ortologie este O – centrul cercului circumscris.

Se poate arăta și direct că ABC este ortologic în raport cu $A'B'C'$ și centrul ortologiei este I.

b) Am văzut că $A'B = A'C$, triunghiul $A'BI$ este isoscel ($A'B = A'I$) pentru că $\sphericalangle A'BI \equiv \sphericalangle A'IB$, deci cercul $\mathcal{C}(A';\, A'B)$ trece prin I; analog rezultă că și celelalte cercuri trec prin I.

c) Triunghiul ABC și triunghiul $A'B'C'$ sunt omologice, axa de omologie este XY, iar axa de ortologie este OI; conform teoremei lui Sondat, $OI \perp XY$.

73. Evident $BH \perp AQ$, $BM \perp QN$. Demonstrăm că avem și $MH \perp AN$.

Observăm că $m(\widehat{AQM}) = m(\widehat{MQC}) = 90^0 - \hat{C} = \widehat{HBC}$.

De asemenea, $m(\widehat{BHC}) = m(\widehat{PAQ}) = 180^0 - \hat{A}$, prin urmare: $\Delta BHC \sim \Delta QAP$.

De aici rezultă că și $\Delta BHM \sim \Delta QAN$.

Reținem că $\sphericalangle ANQ \equiv \sphericalangle HMB$; deoarece $NM \perp BC$ avem că $m(\widehat{HMN}) + m(\widehat{ANQ}) = 90^0$, în consecință $MH \perp NA$.

Observație

Se poate observa că punctul $\{S\} = MN \cap NA$ aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

74. Dacă P este centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul ABC, iar O este centrul cercului ω, adică intersecția mediatoarelor segmentelor (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2), și perpendiculara în A_2 pe BC intersectează PO în Q, punctul Q va fi simetricul lui P față de O.

Analog, perpendiculara din B_2 pe AC va trece prin simetricul lui P față de O, adică prin Q, și la fel Q aparține perpendicularei în C_2 pe AB. În consecință: punctul Q este centru de ortologie al triunghiului $A_2B_2C_2$ în raport cu triunghiul ABC.

75. Notăm cu H' proiecția lui H pe planul $A_1B_1C_1$ și cu A'', B'', C'' proiecțiile punctelor A, B, C respectiv pe B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1. Din $AA' \perp (A_1B_1C_1)$ și $AA'' \perp B_1C_1$, obținem că $A'A'' \perp B_1C_1$ (reciproca teoremei celor trei perpendiculare). Pe de altă parte, planul $(AA'A'')$ fiind perpendicular pe $(A_1B_1C_1)$, conține pe HH', mai mult: $H' \in A'A''$. Analog arătăm că $H' \in B'B''$ și $H' \in C'C''$. Punctul H' este centru de ortologie al triunghiului$A'B'C'$ în raport cu $A_1B_1C_1$.

76. Perpendiculara din H pe B_1C_1 este mediatoarea lui BC, perpendiculara din B pe A_1C_1trece prin O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și, de asemenea, perpendiculara din C pe A_1B_1care este antiparalelă la AB trece prin O. Deci O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC este centrul de ortologie al triunghiului HBC în raport cu $A_1B_1C_1$.

77. *Soluție* (Mihai Miculița). Voi arăta că dreapta A_bB_a este mediatoarea laturii AB. Avem: $OA = OB \Longrightarrow \sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle ABO$.

$$\left.\begin{array}{r} AOB_aC - \text{inscriptibil} \Rightarrow \sphericalangle OAB_a \equiv \sphericalangle OCB \\ OB = OC \Rightarrow \sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle OBC \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle OAB_a \equiv \sphericalangle OBC$$

$\Rightarrow m\left(\widehat{BAB_a}\right) = m\left(\widehat{BAO}\right) + m\left(\widehat{OAB_a}\right) = m\left(\widehat{ABO}\right) + m\left(\widehat{OBC}\right) = m\left(\widehat{ABB_a}\right) \Rightarrow B_aA = B_aB$. (1)

Pe de altă parte, din:

$OA = OB \Longrightarrow \sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle ABO$,

$$\left.\begin{array}{r} OA = OC \Rightarrow \sphericalangle OAC \equiv \sphericalangle OCA \\ COBA_b - \text{inscriptibil} \Rightarrow \sphericalangle OCA \equiv \sphericalangle OBA_b \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle OAC \equiv \sphericalangle OBA_b$$

$\Rightarrow m\left(\widehat{BAA_b}\right) = m\left(\widehat{BAO}\right) + m\left(\widehat{OAC}\right) = m\left(\widehat{ABO}\right) + m\left(\widehat{OBA_b}\right) = m\left(\widehat{ABA_b}\right) \Rightarrow \widehat{BAA_b} \equiv \widehat{ABA_b} \Rightarrow A_bA = A_bB$. (2)

Relațiile (1) și (2) ne arată că dreapta A_bB_a este mediatoarea laturii AB, așa că avem: $A_bB_a \cap A_cC_a \cap B_cC_b = \{O\}$.

Observație

Triunghiurile $A_bA_cB_c$ și CBA sunt ortologice; centrul de ortologie este O. De asemenea, triunghiurile $B_aC_bC_a$ și CAB sunt ortologice de centru O.

78. Avem $\frac{A_1C}{B_1C} = \frac{b\cos C}{c\cos B} = \frac{C_1X}{XB_1}$. Ducem $AX' \perp B_1C_1$, $X' \in (B_1C_1)$.

$B_1X' = AB_1 \cdot \cos B$, $C_1X' = AC_1 \cdot \cos C$.

$AB_1 = c \cdot \cos A$, $AC_1 = b \cdot \cos A$.

$\frac{C_1X'}{B_1X'} = \frac{b\cos C}{c\cos B} = \frac{C_1X}{XB_1}$, rezultă că $X' = X$.

Triunghiurile ABC și triunghiul său ortic $A_1B_1C_1$ sunt ortologice, așa că AX, BY și CZ sunt concurente. Punctul de concurență este centrul de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $A_1B_1C_1$, deci O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

79. Evident, triunghiul $A_2B_2C_2$ este ortologic în raport cu ABC, deoarece cum $PA_1 \perp BC$ și $A_2 \in (PA_1)$ din teorema celor 3 perpendiculare rezultă că $A_1A_2 \perp BC$, analog$B_1B_2 \perp AC$ și $C_2C_1 \perp AB$, iar$A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2 = \{P\}$, prin urmare P este centru de ortologie. Fie $BB' \perp A_1C_1$și fie O_1 centrul

de ortologie al triunghiului ABC în raport cu $A_1B_1C_1$, $B' \in (A_1C_1)$. Din $B'A_1^2 - B'C_1^2 = PA_1^2 - PC_1^2$.

80. *Soluție* (Mihai Miculița).

Notăm Q – mijlocul segmentului EF arătăm că $Q \in [AP]$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c} BE \perp AC \\ MB = MC \end{array}\right\} \Rightarrow ME = \frac{1}{2}BC \\ \left.\begin{array}{c} CF \perp AB \\ MB = MC \end{array}\right\} \Rightarrow MF = \frac{1}{2}BC \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} ME = MF \\ QE = QF \end{array}\right\} \Longrightarrow MQ \perp EF. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, întrucât:

$$\left.\begin{array}{l} BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{array}\right\} \Longrightarrow BCEF - \text{inscriptibil} \Longrightarrow \begin{cases} \sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle ABC \\ \sphericalangle QAF \equiv \sphericalangle MAC \end{cases}. \qquad (2, 3)$$

Ținând seama de relațiile (1) și (3), obținem că:

$$\left.\begin{array}{l} MQ \perp EF \\ NP \perp BC \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} MNQP \text{ inscriptibil} \\ \sphericalangle AQE \equiv \sphericalangle AMB \end{array}\right\} \Rightarrow Q \in AP \Rightarrow (AQ = (AP. \qquad (4)$$

Din relațiile (3) și (4), rezultă că punctele N și P sunt puncte omoloage ale triunghiurilor asemenea $\Delta AEF \sim \Delta ABC$. Așa că avem:

$$\frac{NE}{NF} = \frac{PB}{PC}. \qquad (5)$$

Din relațiile (4) și (5) rezultă acum că:

$$\frac{NE}{NF} = \frac{RE}{RC} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} RN \parallel CF \\ CF \perp AB \end{array}\right\} \Longrightarrow RN \perp AC. \qquad (6)$$

În mod analog, se arată că $SN \perp AC$. (7)

În fine, relațiile (6) și (7) ne arată că dreptele AN și SN sunt înălțimi ale triunghiului ARS, deci N este ortocentrul acestui triunghi.

Observație

Pe parcursul soluției am rezolvat problema următoare: Fie E și F – picioarele înălțimilor duse din vârfurile B și C ale unui triunghi ascuțitunghic ABC, iar M – mijlocul laturii BC. Notăm cu $\{N\} = AM \cap EF$ și cu P proiecția lui N pe BC. Arătați că semidreapta $(AP$ este o simediană a triunghiului ABC.

81. Evident dacă $k = 1$, dreptele a, b, c sunt concurente fiind mediatoarele triunghiului ABC. Reciproc, fie $a \cap b \cap c = \{S\}$. Atunci $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, adică $(\overrightarrow{r_S} - \overrightarrow{r_M})(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = 0$.

De aici, $\overrightarrow{r_S} \cdot (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = \frac{\overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_C}}{1+k}(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B})$.

Scriem relațiile analoage și le adunăm. Obținem:

$\sum(\overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_C})\,(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = 0.$ (1)

Considerăm un sistem de axe având orginea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Presupunem că acest cerc are raza 1. Atunci:

$\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_B} = 1.$

Egalitatea (1) devine:

$\sum(\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + k - 1 - k \cdot \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C}) = 0$, adică:

$(k-1)(3 - \overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_C} \cdot \overrightarrow{r_A}) = 0.$

Dar:

$|\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_C} \cdot \overrightarrow{r_A}| < |\overrightarrow{r_A}||\overrightarrow{r_B}| + |\overrightarrow{r_B}||\overrightarrow{r_C}| + |\overrightarrow{r_C}||\overrightarrow{r_A}| = 3,$

deci $k = 1$.

Observație

Problema exprimă faptul că unicul triunghi MNP înscris în triunghiul ABC cu proprietatea $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$ și ortologic cu ABC este triunghiul median.

82. Notăm $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC și $T_aT_bT_c$ triunghiul tangențial al triunghiului ABC. Triunghiurile $T_aT_bT_c$ și ABC sunt ortologice și O este centrul de ortologie al lor. Într-adevăr, perpendicularele duse din T_a, T_b, T_c pe BC, CA, AB sunt bisectoare în $T_aT_bT_c$ și ca atare trec prin O care este centrul cercului înscris în triunghiul $T_aT_bT_c$. Mai mult, T_aO este mediatoarea lui (BC) și în consecință trece prin M_a, iar T_aM_a fiind mediatoare este perpendiculara pe BC, dar și pe M_bM_c care este linie mijlocie. Din teorema triunghiurilor ortologice rezultă că și perpendicularele duse din M_a, M_b, M_c pe T_bT_c, T_cT_a respectiv T_aT_b sunt concurente. Punctul de concurență este O_9 – centrul cercului Euler al triughiului ABC. Demonstrăm acest fapt. Ducem $M_aM_1 \perp T_bT_c$; notăm $\{H_1\} = M_aM_1 \cap AH$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC. Se știe că $AH = 2OM_a$. Unim O cu A avem că $OA \perp T_bT_c$ și cum $M_aM_1 \perp T_bT_c$ și $AH \parallel OM_a$, rezultă că patrulaterul OM_aH_1A este paralelogram. Din $AH_1 = OM_a$ și $AH = 2OM_a$ obținem că H_1 este mijlocul lui (AH), deciH_1 este pe cercul celor 9 puncte ale triunghiului ABC. Pe acest cerc se găsesc și punctele A' - piciorul înălțimii din A și M_a. Cum$\sphericalangle AA'M_a = 90^0$ rezultă că M_aH_1 este diametru în cercul lui Euler deci mijlocul lui M_aH_1 pe care îl

notăm cu O_9 este centrul cercului Euler. Observăm că și patrulaterul H_1HM_aO este paralelogram, rezultă că O_9 este mijlocul lui OH.

Observație

Triunghiurile $M_aM_bM_c$ și $T_aT_bT_c$ sunt bilogice.

83. Notăm $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$ și $AB = BC = CA = a$; fie A_2, B_2, C_2 contactele cercurilor înscrise în triunghiurile BDC, CDA și ABD cu CB, CA respectiv AB.

Se arată fără dificultate că:

$BA_2 = \frac{y+a-z}{2}$; $CA_2 = \frac{a+z-y}{2}$; $CB_2 = \frac{z+a-x}{2}$; $AB_2 = \frac{a+x-z}{2}$; $AC_2 = \frac{x+a-y}{2}$; $BC_2 = \frac{y+a-x}{2}$.

Arătăm că triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu ABC probând egalitatea $BA_2^2 + CB_2^2 + AC_2^2 = CA_1^2 + AB_2^2 + BC_1^2$. Atunci rezultă că și ABC este ortologic în raport cu $A_1B_1C_1$.

84. Notăm cu x, y, z distanțele punctelor A_1, B_1, C_1 la dreapta d. Pentru ca perpendicularele duse din A, B, C respectiv pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 să fie concurente, trebuie satisfăcută condiția:

$AB_1^2 - AC_1^2 + BC_1^2 - BA_1^2 + CA_1^2 - CB_1^2 = 0.$

Această condiție este echivalentă cu:

$$(a_1^2 + y^2) - (a_2^2 + z^2) + (b_1^2 + z^2) - (b_2^2 + x^2) + (c_1^2 + x^2) - (c_2^2 + y^2) = 0.$$

De unde găsim:

$a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 - c_2^2 = 0$ (nu depinde de x, y, z).

Remarcă

Dacă punctele A, B, C aparțin dreptelor d_1, d_2, d_3 condiția precedentă este evident îndeplinită, iar punctul de concurență a perpendicularelor duse din A, B, C pe B_1C_1, C_1A_1 respectiv A_1B_1 este ortopolul dreptei d în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

85. Perpendiculara din A_1 pe M_bM_c este A_1M, perpendiculara din B_1 pe M_cM_a este B_1M, iar perpendiculara din C_1 pe M_aM_b este C_1M, prin urmare

M este centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu triunghiul median $M_aM_bM_c$.

86. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este ortologic în raport cu ABC, deci perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA, AB sunt concurente într-un punct P.

Triunghiul $A'B'C'$, simetricul față de O al triunghiului ABC are laturile respectiv paralele cu ale acestuia. Pependiculara din A_1 pe BC va fi perpendiculara și pe $B'C'$. Centrul de ortologie al triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu $A'B'C'$ va fi punctul P.

87. Triunghiul EBC este ortologic în raport cu triunghiul FAD, centrul de ortologie fiind O. Într-adevăr, perpendiculara dusă din E pe AD, perpendiculara dusă din B pe FD și perpendiculara dusă din C pe FA se intersectează în O. Relația de ortologie fiind simetrică, rezultă că și triughiul FAD este ortologic în raport cu triunghiul EBC. Atunci perpendiculara din F pe BC, perpendiculara din D pe EB și perpendiculara din A pe EC sunt concurente. Deoarece perpendiculara din D pe EB și perpendiculara din F pe AD se intersectează în H, rezultă că și perpendiculara din A pe EC trece prin H, deci $AH \perp EC$.

88. Notăm cu $A'B'C'$ triunghiul podar al centrului simedian K al triunghiului ABC, de asemenea notăm cu A_1 intersecția perpendicularei din A pe $B'C'$ cu $B'C'$.Avem $\sphericalangle C'AA_1 \equiv \sphericalangle KC'B'$ (1) (au același complement), $\sphericalangle KC'B' \equiv \sphericalangle KAB'$ (2) (patrulaterul $KC'AB'$este inscriptibil).

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle C'AA_1 \equiv \sphericalangle KAB'$ deci AA_1 este izogonala simedianei AK, prin urmare AA_1 trece prin G – centrul de greutate al triunghiului ABC. Este evident că centrul simedian K este centru de ortologie.

Pentru a demonstra că K este centru de greutate al triunghiului $A'B'C'$, se arată că $\text{Aria}(\Delta KB'C') = \text{Aria}(\Delta KC'A') = \text{Aria}(\Delta KA'B')$. Se folosește faptul că are loc relația:

$\frac{KA'}{BC} = \frac{KB'}{AC} = \frac{KC'}{AB}$.

89. a) Notăm cu P_1 intersecția paralelei dusă prin A la $B'C'$ cu paralela dusă prin C la $A'B'$. Avem că $\sphericalangle AP_1C \equiv \sphericalangle B'C'A'$, deci$m(AP_1C) = 60^0$, aceasta arată că P_1 aparține cercului circumscris triunghiului ABC. Din faptul că măsura unghiului BP_1C este de 60^0 și $CP_1 \parallel A'B'$ din reciproca teoremei unghiurilor cu laturile paralele, avem că $BP_1 \parallel A'C'$, prin urmare P_1 est centrul de paralelogie al triunghiului ABC în raport cu triughiul $A'B'C'$. Raționând analog, găsim că P_2 și P_3 centrele de paralelogie ale triughiului ABC în raport cu $B'C'A'$ și $C'A'B'$ sunt pe cercul circumscris triunghiului ABC.

b) AP_2 este paralelă cu $A'C'$ și BP_1 de asemenea este paralelă cu $A'C'$, rezultă că $AP_2 \parallel BP_1$. Trapezul AP_2BP_1 fiind înscris este isoscel, deci diagonalele AB și P_1P_2 sunt congruente. Analog, se arată că $P_2P_3 = BC$ și $P_1P_3 = AC$, în consecință triughiul $P_1P_2P_3$ este echilateral.

90. Pentru a demonstra că triunghiul $A_2B_2C_2$ este ortologic în raport cu ABC, trebuie verificată relația:

$$A_2B^2 - A_2C^2 + B_2C^2 - B_2A^2 + C_2A^2 - C_2B^2 = 0. \qquad (1)$$

Deoarece AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, avem că:

$$C_1A^2 - C_1B^2 + A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 = 0. \qquad (2)$$

Perpendiculara AA_2 pe B_1C_1 – care este antiparalelă la BC trece prin O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC. De asemenea, BB_2 și CC_2 trec prin O. Cevienele AA_2, BB_2 și CC_2 fiind concurente, avem că:

$$A_2C_1^2 - A_2B_1^2 + B_2C_1^2 - B_2A_1^2 + C_2A_1^2 - C_2B_1^2 = 0. \qquad (3)$$

Calculăm $A_2B^2 - B_2A^2$. Vom aplica teorema cosinusului în triunghiurile A_2BC_1 respectiv B_2AC_1. Dreptele B_1C_1 și C_1A_1 fiind antiparalele la BC respectiv AC, rezultă că $\sphericalangle AC_1B_1 \equiv \sphericalangle BC_1A_1$. Triunghiurile AC_1A_2 și BC_1B_2 sunt asemenea; obținem că:

$$AC_1 \cdot C_1B_2 = BC_1 \cdot C_1A_2. \qquad (4)$$

$$A_2B^2 = C_1B^2 + C_1A_2^2 - 2C_1B \cdot C_1A_2 \cdot \cos \sphericalangle BC_1A_2,$$

$$B_2A^2 = C_1A^2 + C_1B_2^2 - 2C_1A \cdot C_1B_2 \cdot \cos \sphericalangle AC_1B_2.$$

Deoarece $\sphericalangle BC_1A_2 \equiv \sphericalangle AC_1B_2$, ținând seama de (4), obținem că:

$$A_2B^2 - B_2A^2 = C_1B^2 - C_1A^2 + C_1A^2 - C_1B_2^2. \qquad (5)$$

Analog, calculăm: $B_2C^2 - C_2B^2$ și $C_2A^2 - A_2C^2$ și, ținând seama de relațiile (5), (2) și (3), obține relația (1).

91. Fie M_1 mijlocul lui LM, M_2 mijlocul lui MK și M_3 mijlocul lui KL. Se arată că:

$M_1B^2 - M_1C^2 + M_2C^2 - M_2A^2 + M_3A^2 - M_3B^2 = 0.$ (1)

Calculăm M_1B^2 cu teorema medianei aplicată în triunghiul MBL, avem:

$M_1B^2 = \frac{2(AB^2+BL^2)-ML^2}{4}$,

$M_1C^2 = \frac{2(AC^2+CM^2)-ML^2}{4}$.

Deoarece $\Delta ABL \equiv \Delta AMC$ (L.U.L), rezultă că $BL = MC$și $M_1B^2 - M_1C^2 = \frac{AB^2-AC^2}{2}$.

Analog se calculează:$M_2C^2 - M_2A^2$ și $M_3A^2 - M_3B^2$.

Înlocuind în (1), aceasta este verificată.

92. Centrul simedian K al triunghiului ABC este centrul de greutate al triunghiului$A_1B_1C_1$. Triunghiurile $A_2B_2C_2$ este simetricul în raport cu K al triunghiului $A_1B_1C_1$, avem $B_1C_1 \parallel B_2C_2$; $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ și $A_1C_1 \parallel A_2C_2$. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt ortologice, iar centrul lor comun de ortologie este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$.

93. Notăm P mijlocul lui DE. Perpendicularele duse din P, Q, R pe BC, BE și CD sunt concurente în punctul M simetricul lui O față de centrul paralelogramului $PQSR$ (S este mijlocul lui BC). Punctul M se numește punctul lui Mathot al patrulaterului inscriptibil $BCDE$. Cu alte cuvinte, triunghiul PRQ este ortologic în raport cu ABC. Rezultă că și ABC este ortologic în raport cu PRQ, deci perpendiculara dusă din A pe RQ, perpendiculara dusă din B pe PQ și perpendiculara dusă din C pe PR sunt concurente. Deoarece $PQ \parallel CE$ și $RP \parallel BD$, obținem concluzia cerută.

94. Perpendicularele duse din B, F, D respectiv pe CA, EA și EC sunt BE, FC și DA, acestea se intersectează în O centrul cercului circumscris hexagonului, punct ce este centru de ortologie comun al triunghiurilor BFD și ECA.

Triunghiul BFD este ortologic în raport cu triunghiul CEA, centrul de ortologie este punctul A. Centrul de ortologie al triunghiului CEA în raport cu BFD este punctul D.

Triunghiul BFD este ortologic în raport cu triunghiul ACE, centrul de ortologie este punctul C. Centrul de ortologie al triunghiului ACE în raport cu BFD este punctul F.

95. a) Fie M intersecția paralelei la BC cu paralela la AC. Patrulaterul MC_1BA_1 este dreptunghi; $MA_1 = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $MC_1 = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $A_1C = \frac{5\sqrt{7}}{7}$. Patrulaterul MA_1CB_1 este inscriptibil; cu teorema sinusurilor, avem că: $A_1B_1 = MC \cdot \sin 30^0$, $A_1B_1 = \frac{1}{2}MC$.

Din triunghiul MA_1C, rezultă $MC = 2$, deci$A_1B_1 = 1$.

${A_1C_1}^2 = \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2 = 1$, deci $A_1C_1 = 1$.

Notăm$MB_1 = x$; aplicând teorema cosinusului în triunghiu A_1MB_1, se obține ecuația $7x^2 + 3\sqrt{7}x - 4 = 0$, cu soluția care convine $x = \frac{\sqrt{7}}{7}$, aceasta arată că M aparține și paralelei dusă la AC.

b) Patrulaterul MB_1AC_1 este inscriptibil; $\sphericalangle B_1MC_1 = 120^0$; calculăm B_1C_1 cu teorema cosinusului, rezultă $B_1C_1 = 1$, deci triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral.

c) În triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$cevienele sunt evident ortologice. Ele nu sunt bilogice pentru că nu sunt omologice, AA_1, BB_1, CC_1 nu sunt concurente.

Într-adevăr, se verifică că:

$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \neq 1$.

96. Evident $AD \perp KL$ (raza este perpendiculară pe tangentă). Deoarece $m\left(\widehat{DCF}\right) = 90^0$, rezultă că și $m\left(\widehat{DMF}\right) = 90^0$ (1). Deoarece $m\left(\widehat{DBA}\right) = 90^0$ (AD diametru), rezultă că și $m\left(\widehat{EMD}\right) = 90^0$ (2).

Relațiile (1) și (2) conduc la E, M, F coliniare.

Triunghiurile DEF și AKL au $EF \parallel KL$ este clar că ortocentrul triunghiului AEF este centrullor de ortologie; îl notăm P.

Patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil (3), $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle PFM$ (4) (au laturile respectiv perpendiculare).

Din (3) și (4), rezultă că $\sphericalangle PFM \equiv \sphericalangle MFD$, deci $\sphericalangle MFD \equiv \sphericalangle MCD$ (5).

În triunghiul PFD, MF este înălțime și bisectoare deci PFD este isoscel, prin urmare $MD = PM$.

97. Este evident că triunghiul MNP este ortologic în raport cu ABC și ccă centrul de ortologie este I_a. Vom arăta că AM, BN, CP sunt concurente folosind teorema lui Ceva – varianta trigonometrică.

Ducem $FF' \perp BC$; $MM' \perp BC$; $EE' \perp BC$, avem $\frac{FM}{ME} = \frac{F'M'}{E'M'}$; $F'M' = BF' + BM'$, $BF' = BF \cdot \cos B$; din teorema bisectoarei exterioare, rezultă $\frac{FB}{FA} = \frac{a}{b}$, găsim $FB = \frac{ac}{b-a}$; $BM' = p - c$.

Atunci: $F'M' = \frac{c(p-a)}{b-a}$;

$E'M' = CE' + CM' = CE \cos C + p - b$.

Dar $CE = \frac{a}{c-a}$, rezultă $E'M' = \frac{b(p-c)}{c-a}$, $FA = \frac{bc}{b-a}$, $EA = \frac{bc}{c-a}$.

Obținem:

$$\frac{\sin BAM}{\sin MAC} = \frac{c(p-b)}{b(p-c)}. \qquad (2)$$

Calculând în mod analog, găsim:

$$\frac{\sin CBN}{\sin NBF} = \frac{Qp}{c(p-b)}, \qquad (3)$$

$$\frac{\sin ECP}{\sin PCB} = \frac{b(p-c)}{ap}. \qquad (4)$$

Înlocuind (2), (3), (4) în relația (1) se verifică egalitatea ce implică concurența dreptelor AM, BN, CP.

98. Coordonatele baricentrice ale unui punct P în raport cu triunghiul ABC sunt trei numere x, y, z proporționale cu ariile triunghiurilor PBC, PCA și PAB.Deoarece $P_1A_1 \perp BC$, $P_1B_1 \perp CA$ și $P_1C_1 \perp AB$, avem că $\sin B_1P_1C_1 = \sin A$, $\sin P_1B_1C_1 = \sin PAC$ și $\sin P_1C_1B_1 = \sin PAB$.

Avem:

$$\frac{\text{Aria}PAC}{\text{Aria}PAB} = \frac{PA \cdot b \cdot \sin PAC}{PA \cdot c \cdot \sin PAB} = \frac{b \cdot \sin P_1B_1C_1}{c \cdot \sin P_1C_1B_1} = \frac{b}{c} \cdot \frac{P_1C_1}{P_1B_1}.$$

Analog, obținem:

$$\frac{\text{Aria}PBC}{\text{Aria}PCA} = \frac{a}{c} \div \frac{P_1C_1}{P_1A_1}.$$

Pe de altă parte, găsim:

$$\frac{\text{Aria}(P_1A_1C_1)}{\text{Aria}(P_1A_1B_1)} = \frac{P_1A_1 \cdot P_1C_1 \cdot \sin B}{P_1A_1 \cdot P_1B_1 \cdot \sin C} = \frac{b}{c} \cdot \frac{P_1C_1}{P_1B_1}.$$

Deci:

$$\frac{\text{Aria}(PAC)}{\text{Aria}(PAB)} = \frac{\text{Aria}(P_1A_1C_1)}{\text{Aria}(P_1A_1B_1)}.$$

Analog:

$$\frac{\text{Aria}(PBC)}{\text{Aria}(PCA)} = \frac{\text{Aria}(P_1B_1C_1)}{\text{Aria}(P_1C_1A_1)},$$

$$\frac{\text{Aria}(PAB)}{\text{Aria}(PBC)} = \frac{\text{Aria}(P_1A_1B_1)}{\text{Aria}(P_1B_1C_1)}$$

99. $\frac{FM}{ME} = \frac{\text{Aria}(FAM)}{\text{Aria}(EAM)} = \frac{FA}{EA} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}$. Am notat $\alpha = \sphericalangle BAM$.

Ducem FF', EE' și MM' perpendiculare pe BC; avem $BM' = p - b$, $\frac{FM}{ME} = \frac{F'M'}{E'M'}$, $BF' = FB \cdot \cos B$. Din teorema bisectoarei, găsim:

$FB = \frac{ac}{a+b}$;

$FB \cdot \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2(a+b)}$;

$F'M' = \frac{a+b+c}{2} - b - \frac{a^2+c^2-b^2}{2(a+b)} = \frac{c(p-c)}{a+b}$;

$E'M' = CM' - CE' = p - c - EC \cdot \cos C$;

$EC = \frac{ab}{a+c}$; găsim $E'M' = \frac{b(p-b)}{a+c}$;

$\frac{FM}{ME} = \frac{F'M'}{E'M'} = \frac{c(p-c)(a+c)}{b(p-b)(a+b)}$;

$\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)} = \frac{F'M'}{E'M'} \cdot \frac{EA}{FA} = \frac{c(p-c)}{b(p-b)}$. (1)

Analog, găsim $\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)} = \frac{a(p-a)}{c(p-c)}$, (2)

$\frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)} = \frac{b(p-b)}{a(p-a)}$. (3)

Am notat $\beta = \sphericalangle NBC$ și $\gamma = \sphericalangle PCA$

Relațiile (1), (2), (3) și teorema lui Ceva – varianta trigonometrică conduc la concurența cevienelor AM, BN, CP.

Dacă notăm $\{X\} = AM \cap BC$, $\{Y\} = BN \cap AC$, $\{Z\} = CP \cap AB$ și cu L punctul de concurență a cevienelor AM, BN, CP, vom găsi:

$\frac{XB}{XC} = \frac{c^2(p-c)}{b^2(p-b)}$. (4)

Relația (4) și relația lui Steiner relativă la cevienele izogonale arată că ceviana AX este izogonala cevienei lui Nagel relativă la BC. Astfel, găsim că punctul L este izogonalul lui Nagel al triunghiului ABC.

Coordonatele baricentrice ale punctelor I, J, O, unde cu J am notat punctul lui Nagel, sunt:

$I\left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right)$;

$J\left(\frac{p-a}{p}, \frac{p-b}{p}, \frac{p-c}{p}\right)$;

$O(\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$.

Coordonatele lui L – izogonalul lui J sunt:

$L\left(\frac{a^2p}{p-a}, \frac{b^2p}{p-b}, \frac{c^2p}{p-c}\right)$.

Pentru a arăta că I, L, O sunt coliniare, trebuie probată condiția:

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{2p} & \frac{b}{2p} & \frac{c}{2p} \\ \frac{a^2p}{p-a} & \frac{b^2p}{p-b} & \frac{c^2p}{p-c} \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Deoarece $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ și $\sin A = \frac{a}{2R}$, condiția (5) este echivalentă cu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{a}{p-a} & \frac{b}{p-b} & \frac{c}{p-c} \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Condiția (6) implică:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{p-a} & \frac{b}{p-b} - \frac{a}{p-a} & \frac{c}{p-c} - \frac{a}{p-a} \\ \cos A & \cos B - \cos A & \cos C - \cos A \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Deci:

$$\begin{vmatrix} \frac{b}{p-b} - \frac{a}{p-a} & \frac{c}{p-c} - \frac{a}{p-a} \\ \cos B - \cos A & \cos C - \cos A \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Ținând cont că $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, se constată că relația (8) este verificată.

100. Din relația dată, rezultă că $AP^2 - PE^2 = BP^2 - PD^2$, deci $AE = BD$; notăm $AE = BD = z$, analog găsim $CD = AF = y$ și $BF = CE = x$. Arătăm că toate punctele D, E, F aparțin laturilor triunghiului ABC. Într-adevăr, dacă, de exemplu, B, C și D sunt în această ordine, atunci avem: $AB + BC = (x + y) + (z - y) = x + z = AC$ – contradicție. Notând a, b,

c lungimile laturilor BC, CA, AB și $p = \frac{a+b+c}{2}$, găsim că $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$.

Aceste relații arată că punctele D, E, F sunt contactele cercurilor ex-înscrise cu BC, CA, AB, prin urmareI_a, D, P sunt coliniare și, de asemenea, I_b, E, Pși I_C, F, P. Astfel, găsim că P este centru de ortologie al triunghiului antisuplementar $I_a I_b I_c$ în raport cu triunghiul dat ABC. Am văzut că acest triunghi și ABC au ca centru de ortologie centrul cercului circumscris triunghiului $I_a I_b I_c$, deci punctul P și centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

BIBLIOGRAFIE

[1] Barbu, C. **Teoreme din geometria triunghiului**. Editura Unique, Bacău, 2008.

[2] Botez, M. Şt. **Probleme de geometrie**. Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.

[3] Buricea B., Pasol V. **Teoreme şi probleme de geometrie clasică**.Editura Lotus, Craiova, 1995.

[4] Brânzei, D. **Bazele raţionamentului geometric**, Editura Academiei, Bucureşti, 1983.

[5] Brânzei, D.**Geometrie circumstanţială**. Editura Junimea, Iaşi, 1984.

[6] Boju V., Funar L. **The Math problems Notebook**, Birichäuser, Boston Basel Berlin, 2007.

[7] Brânzei, D., Negrescu, A. **Probleme de pivotare**. Editura "Recreaţii Matematice", Iaşi, 2011.

[8] Cocea, C. **Noi probleme de geometrie**, Editura Spiru Haret, Iaşi, 1997.

[9] Coşniţă, C. **Teoreme şi problemei de matematici**. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1958.

[10] Coşniţă, C. **Coordonées Baricentiques**. Bucharest, 1941.

[11] Coandă, C. **Geometrie analiticăîn coordonate baricentrice**. Editura Reprograph, Craiova, 2005.

[12] Efremov, D. **Noua geometrie a triunghiului**. Odesa, 1902. Traducere de Mihai Miculiţa, Editura Cril, Zalău, 2010.

[13] Hadamand, J. **Lecţii de geometrie plană**.Editura Tehnică, Bucureşti, 1960.

[14] Lalescu, T. **Geometria triunghiului**. Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.

[15] Mihalescu, C. **Geometria elementelor remarcabile**. Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.

[16] Mihăileanu, N.N. **Lecţii complementare de geometrie**. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[17] Nicolaescu, L., Boskof V. **Probleme practice de geometrie**.Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.

[18] Pop, O., Minculete, N., Bencze, M. **An Introduction to Quadrilateral Geometry**. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2013.

[19] Johnson, A. R. **Advanced Euclidean Geometry**. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2007.

[20] Pătraşcu, Ion. **Probleme de geometrie plană**. Editura Cardinal, Craiova, 1996.

[21] Pătrașcu, I., Smarandache, F. **Variance on topics of plane geometry**. Educational Publishing, Columbus, Ohio, 2013.

[22] Pătrașcu, I., Smarandache, F. **Complements to Classic Topics of Circles Geometry**. Pons Editions, Brussels, 2016.

[23] Smaranda, D., Soare N. **Transformări geometrice**. Editura Academiei R.S.R., București, 1988.

[24] Smarandache, F., Pătrașcu, I. **The Geometry of Homological Triangles**. The Educational Publishing, Columbus, Ohio, 2012.

[25] Smarandache, F. **Multispace & Multistructure Neutrosophic Transdisciplinarity** (*100 Collected Papers of Science*), vol. IV. North-European Scientific Publishers, Honco, Finland, 2010.

[26] Țițeica, Gh. **Culegere de probleme de geometrie**. Editura Tehnică, București, 1965.

Ideea scrierii acestei cărți a venit odată cu cea a cărţii noastre anterioare, *Geometria triunghiurilor omologice*.

Ca şi acolo, am încercat să grefăm pe tema centrală, a triunghiurilor ortologice, cât mai multe rezultate din geometria elementară. În mod special a fost tratată legatura dintre triunghiurile ortologice şi cele omologice, s-au trecut în revistă triunghiurile "S", scoase în evidenţă pentru prima oară de marele matematician român Traian Lalescu.

Cartea se adresează deopotrivă acelora care au studiat şi îndrăgesc geometria, cât şi celor care o descoperă acum,prin studiu şi antrenament, în vederea obţinerii de rezultate deosebite la concursurile şcolare. În acest sens, am căutat să demonstrăm unele proprietăţi şi teoreme în mai multe moduri: sintetic, vectorial, analitic.

Prof. ION PĂTRAŞCU

Prof. FLORENTIN SMARANDACHE

ISBN 978-1-59973-652-5