



مؤلف الكتاب
الدكتورة: ميسم أحمد جديد



مؤسس علم النيتروسوفيك
العالم فلورنتين سمارانداكه

النماذج الخطية النيتروسوفيقية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

تأليف

الدكتورة: ميسم أحمد جديد

عضو هيئة تدريس - جامعة دمشق - كلية العلوم

2022-2023

النماذج الخطية النيتروسوفيقية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

تأليف

الدكتورة: ميسو أحمد جديد

عضو هيئة تدريس - جامعة دمشق - كلية العلوم

ISBN 978-1-59973-778-2



9 781599 737782 >

Biblio Publishing
Publishing for the 21st Century

Biblio Publishing
1091 West 1st Ave
Grandview Heights, OH 43212
United States of America
Ph. 614.485.0721

Em. Info@BiblioPublishing.com

<https://BiblioPublishing.com/>

2022-2023



مؤسس علم النيتروسوفيك
العالم الأمريكي فلورنتين سمارانداكه

Florentin Smarandache

University of New Mexico, Mathematics, Physics and Natural Sciences
Division 705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, USA

smarand@unm.edu

- ولد العالم فلورنتين في العاشر من شهر ديسمبر عام 1954 في مدينة Balcesi _ رومانيا.
- حاصل على Ph.D. في PostDocs.
- أستاذ فخري للرياضيات في جامعة نيو مكسيكو، الولايات المتحدة.
- حصل على درجة الماجستير في الرياضيات وعلوم الكمبيوتر من جامعة كرايوفا، رومانيا.
- دكتوراه في الرياضيات من جامعة كيشينيف الحكومية.
- ما بعد الدكتوراه في الرياضيات التطبيقية من جامعة أوكاياما للعلوم، اليابان، جامعة قوانغدونغ للتكنولوجيا، قوانغتشو، الصين.
- مؤسس النيوترسوفيا (تعميم الديالكتيك)، والمجموعة النيتروسوفيكية، المنطق والاحتمالات والإحصاء منذ عام 1995
- نشر مئات الأوراق البحثية والكتب عن الفيزياء النيوترسوفية، والفيزياء الفائقة للضوء والفيزياء اللحظية غير المادة، مفارقات الكم، النظرية النسبية المطلقة، الانزياح الأحمر والانزياح الأزرق بسبب متوسط التدرج ومعامل الانكسار بالإضافة إلى تأثير دوبلر، المفارقة، الفن الخارجي، العدالة كفرع جديد من الفلسفة، قانون تتضمن مجموعة متوسطة ومتعددة المساحات ومتعددة الهياكل ومجموعة HyperSoft، مجموعة TreeSoft، مجموعة IndetermSoft ومجموعة IndetermHyperSoft

SuperHyperGraph، الطوبولوجيا الفائقة الفائقة، الجبر الفائق الفائق، الدالة

الفائقة الفائقة، النيتروسوفيكية

SuperHyperAlgebra، درجة الاعتماد والاستقلال بين مكونات نيوتروسوفية، مجموعة نيوتروسوفية مكررة، مجموعة نيوتروسوفية زائدة عن الحد، مجموعة بليثوجينية / منطوق / احتمالية / إحصائيات، بليثوجينيك رمزي الهياكل الجبرية، الهياكل النيوتروسوفية الثلاثية والمزدوجة، الرباعية الهياكل النيتروسوفيكية، امتداد الهياكل الجبرية إلى الجبر النيتروسوفيكي و مكافحة الجبر، الهندسة النيوتولوجية والهندسة المضادة، الطوبولوجيا النيوتولوجية و مكافحة الطوبولوجيا، الطوبولوجيا النيتروسوفيكية المكررة، والطوبولوجيا النيتروسوفيكية المكررة ، الطوبولوجيا ونظرية

Dezert-Smarandache

- مراجع علمي للعديد من المجالات العالمية والعديد من الكتب.
- شارك في العديد من المؤتمرات الدولية حول العالم من خلال الأوراق البحثية والمحاضرات.
- أصدر العديد من الكتب الشعرية والدرامية وقصص الأطفال، ترجمات ومقالات وروايات، ومجموعات التراث الشعبي وذكريات السفر والألبومات الفنية.

<http://fs.unm.edu/FlorentinSmarandache.htm>



مؤلف الكتاب

ميسم أحمد جديد

Maissam Ahmad Jdid

Faculty of Science, Damascus University, Damascus, Syria.

maissam.jdid66@damascusuniversity.edu.sy

Correspondence: jdidmaisam@gmail.com

- من مواليد دمشق في اليوم السابع والعشرون من شهر نيسان عام 1966
- المنشأ: طرطوس – حصين البحر.
- الشهادة العلمية: دكتوراه (Ph. D) في النمذجة الرياضية من جامعة تغير الحكومية – روسيا.
- مكان العمل الحالي:
- عضو هيئة تدريس في جامعة دمشق - كلية العلوم – قسم الرياضيات منذ عام 2006
- مكان العمل سابقاً:
- محاضرة في جامعة الشام الخاصة – كلية الهندسة المعلوماتية من 2015-2023م.
- محاضرة في جامعة انطاكية السورية الخاصة عام 2022-2023
- كلية الهندسة المدنية – كلية الهندسة المعمارية.

Honorary Membership

- 1- Neutrosophic Science International Association –University of New Mexico, USA.
- 2- International Association of Paradoxism - University of New Mexico, USA.

Editor-in-Chief

**Journal Prospects for Applied Mathematics and Data Analysis, (ASPG),
USA.**

<https://americaspg.com/articlesvoulume/34>

<https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0003-4413-4783>

<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57353028500>

<https://www.researchgate.net/profile/Maissam-Jdid>

<https://scholar.google.com/citations?user=-5pTuFcAAAAJ&hl=ar>

<https://www.facebook.com/profile.php?id=61551427142439&mibextid=9R9pXO>

<https://digitalrepository.unm.edu/do/search/?q=Jdid&start=0&context=8211305&facet=>

بسم الله الرحمن الرحيم

«فَتَعَالَى اللَّهُ الْمَلِكُ الْحَقُّ وَلَا تَعْجَلْ بِالْقُرْآنِ مِنْ قَبْلِ أَنْ يُقْضَىٰ إِلَيْكَ وَحْيُهُ وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا»

(صدق الله العلي العظيم)

زملائي الأعزاء

إن البحث من أجل الأفضل هو مسار اهتمام الإنسان في كل الأزمنة، وفي سعينا لتقديم الأفضل ومواكبة التطور العلمي الكبير الذي يشهده عالمنا المعاصر.

نقدم لكم هذا العمل المتواضع بعنوان:

(النماذج الخطية النيتروسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها)

العلم هو: الأساس في تدبير شؤون الحياة وفعاليات البشر وإن العيش بدون علم هو ضرب من التيه ونوع من الضياع، إن استخدام الأساليب العلمية يساعدنا على الإحاطة بأسس الاختيار واتخاذ القرارات وتبني الحلول الصائبة عندما تكثر الحلول وتتعدد الخيارات.

نقدم من خلال هذا العمل دراسة للنماذج الخطية باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك، العلم الذي تم بناءه على أساس أنه لا يوجد حقيقة مطلقة ولا يوجد بيانات مؤكدة.

لا يمكن حصر القضايا بالصواب والخطأ فقط بل هناك حالة ثالثة ما بين الخطأ والصواب حالة (غير محددة غير معينة غير مؤكدة) هي: اللاتحديد، أعطى علم النيتروسوفيك لكل قضية ثلاثة أبعاد هي: (T, I, F) الصح بدرجات واللاتحديد بدرجات والخطأ بدرجات أسسه الفيلسوف والرياضي الأمريكي فلورنتين سمارانداكه في عام 1995 وجاء كتعميم للمنطق الضبابي الذي أسسه العالم لطفي زاده عام 1965.

علم النيتروسوفيك علم جديد يدرس الأطياف المختلفة التي يمكن أن يتخيلها الإنسان في قضية واحدة، الأمر الذي يعطي وصف أكثر دقة لبيانات المسألة قيد الدراسة وبالتالي نتائج دقيقة لا تترك مجال للمصادفة تساعد على اتخاذ قرارات تناسب جميع الظروف التي تمر بها بيئة عمل المنظومة قيد الدراسة. في سعينا للبحث عن الأفضل نقدم في هذا الكتاب دراسة

للمناذج الخطية وحوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك. نعم
أن أسلوب البرمجة الخطية هو أحد الأساليب الهامة لبحوث العمليات وهو العلم الذي كان
نتاجاً للتطور العلمي الكبير الذي يشهده عالمنا المعاصر.

تطلق تسمية بحوث العمليات على مجموعة الأساليب العلمية المستخدمة في تحليل المشكلات
والبحث عن الحلول المثلى، علم أحرزت تطبيقاته نجاحاً واسعاً في مختلف مجالات الحياة،
إن الخاصية التي يتسم بها هذا العلم هي:

استحداث نماذج وأدوات وتقنيات رياضية تملك القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة
والندرة في نموذج رياضي محدد تحديداً جيداً بالنسبة لموقف معين، تملك القدرة على استخدام
الأساليب العلمية لحل العضلات المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة في المصانع والمؤسسات
والشركات وتساعد صناع القرار فيها على اتخاذ القرارات العلمية المثلى لسير العمل، وتمت
معالجة هذه المسائل وفق المنطق الكلاسيكي ولكن كان الحل المثالي قيمة محددة مناسبة
للظروف التي تم جمع البيانات فيها، قيمة لا تراعي التغيرات التي يمكن أن تطرأ على بيئة
العمل. ومن أجل الحصول على نتائج أكثر دقة وتتمتع بهامش من الحرية نقدم في هذا
الكتاب دراسة للمناذج الخطية النيتروسوفيكية وحوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها، والمقصود
بالمناذج النيتروسوفيكية هي:

النماذج التي تكون البيانات فيها قيم نيتروسوفيكية، أي أمثال المتغيرات في تابع الهدف والتي
تعبر عن ربح إذا كان النموذج تعظيم وتعبر عن تكلفة إذا كان النموذج تقليل والتي بدورها
تتأثر بالظروف البيئية نأخذها بالشكل $Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$ حيث ε_{ij} هو اللاتحديد ويأخذ
بأحد الأشكال $\varepsilon_j \in [\lambda_{j1}, \lambda_{j2}]$ أو $\varepsilon_j \in \{\lambda_{j1}, \lambda_{j2}\}$ أو غير ذلك وهو عبارة عن أي جوار
للقيمة c_{ij} التي نحصل عليها أثناء جمع البيانات عن المسألة عندها تصبح مصفوفة التكلفة
(أو الربح) $Nc_j = [c_j \pm \varepsilon_j]$ ، أيضاً القيم الثابتة التي تمثل الطرف الأيمن للمتراجحات
(القيود) والتي تعبر عن الإمكانيات المتاحة من رؤوس أموال أو زمن أو مواد أولية أو غير ذلك
وهي أيضاً تتأثر بالظروف البيئية، نأخذها من الشكل $Nb_j = b_j + \delta_j$ حيث δ_j هو

اللاتحديد على الكميات المطلوبة ويمكن أن يأخذ بأحد الأشكال $\delta_j \in [\mu_{i1}, \mu_{i2}]$ أو $\delta_j \in \{\mu_{i1}, \mu_{i2}\}$ ، ونفس الوضع بالنسبة لأمثال المتحولات في القيود والتي تعبر عن الكميات المستهلكة من المواد الأولية في عملية الإنتاج نأخذها من الشكل $Na_{ij} = a_{ij} + \gamma_{ij}$ حيث γ_{ij} هو اللاتحديد على الكميات اللازمة من المادة الأولية i لإنتاج الوحدة الواحدة من المنتج j يمكن أن يأخذ بأحد الأشكال $\gamma_{ij} \in [\varphi_{ij1}, \varphi_{ij2}]$ أو $\gamma_{ij} \in \{\varphi_{ij1}, \varphi_{ij2}\}$ ، الأمر الذي يساعدنا في الحصول على نتائج أكثر دقة وتعطي للشركات هامش من الحرية.

اشتمل هذا الكتاب على ثمان فصول:

الفصل الأول: دراسة جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيقية.

الفصل الثاني: النماذج الخطية النيتروسوفيقية.

الفصل الثالث: الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيقية.

الفصل الرابع: خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيقية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية.

الفصل الخامس: خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيقية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية.

الفصل السادس: خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية.

الفصل السابع: النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيقية والخوارزمية المزدوجة.

الفصل الثامن: بعض التطبيقات على النماذج الخطية النيتروسوفيقية.

أتمنى من الله العلي القدير أن يحقق هذا العمل الفائدة المرجوة من إعدادة.

المؤلف

د. ميسم أحمد جديد

الفهرس

الصفحة

الموضوع

الفصل الأول: دراسة جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية

المقدمة.

2 1-1- جمل المعادلات الخطية وفق المنطق الكلاسيكي.

4 2-1- جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية التي عدد المعادلات فيها يساوي m وعدد المتحولات يساوي n .

6 3-1- طريقة (جاردن - غوص) لحل جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية التي فيها $m = n$.

11 4-1- الحلول القاعدية لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية.

15 5-1- طريقة (جاردان - غوص) لحل جملة معادلات خطية نيتروسوفيكية فيها: $m < n$

18 6-1- الحلول القاعدية غير السالبة لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية.

18 7-1- طريقة السيمبلكس لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لجملة معادلات خطية فيها $m < n$.

الخاتمة.

الفصل الثاني: النماذج الخطية النيتروسوفيقية

مقدمة.

- 25 1 - 2 - الصيغ الأساسية للنماذج الخطية النيتروسوفيقية.
- 25 1-1-2 - الصيغة العامة للنموذج الخطي النيتروسوفيكى
- 26 2-1-2 - الصيغة المعيارية للنموذج الخطي النيتروسوفيكى.
- 28 3-1-2 - الصيغة القياسية النيتروسوفيقية للنموذج الخطي.
- 30 4-1-2 - الصيغة المتناظرة للنموذج الخطي النيتروسوفيكى
- 33 2 - 2 - كيفية الانتقال من صيغة إلى أخرى.
- 34 2 - 3 - أمثلة على ما سبق.

الخاتمة.

الفصل الثالث: الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج

الخطية النيتروسوفيقية

المقدمة.

- 41 1-3 - الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية.
- 42 2-3 - الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية
النيتروسوفيقية.
- 3-3 - كيفية الاستفادة من شروط عدم السلبية لإيجاد الحل الأمثل
- 48 لبعض النماذج الخطية النيتروسوفيقية باستخدام الطريقة
البيانية.
- الخاتمة.

الفصل الرابع: خوارزمية السيمبلكس المباشرة

النيتروسوفيقية للإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

مقدمة.

1-4- استخدام طريقة السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل

58 للنماذج الخطية النيتروسوفيقية الموضوعة بالصيغة المتناظرة

ومن نوع Max .

الخاتمة.

الفصل الخامس: خوارزمية السيمبلكس المعدلة

النيتروسوفيقية للإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

مقدمة.

75 1-5- خطوات خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيقية.

الخاتمة.

الفصل السادس: خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة

الاصطناعية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

المقدمة.

87 1-6- خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية.

91 2-6- معالجة النموذج وجميع القيود من نوع مساويات.

95 3-6- معالجة النموذج القيود مختلطة.

الخاتمة.

الفصل السابع: النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية والخوارزمية المزدوجة

مقدمة.

- 100 1-7- النماذج المرافقة النيتروسوفيكية.
- 100 1-1-7- الشكل المصفوفي للنماذج المرافقة النيتروسوفيكية.
- 103 2-1-7- إيجاد النماذج المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجدول
المزدوج.
- 105 3-1-7- بناء النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام
الجدول.
- 108 2-7- صياغة الخوارزمية المزدوجة النيتروسوفيكية.
- 109 1-2-7- خطوات خوارزمية السيمبلكس المزدوجة.
- 112 2-2-7- خوارزمية السيمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي
والمرافق.
- 124 3-7- التفسير الاقتصادي للنماذج المرافقة.
- الخاتمة.

الفصل الثامن: بعض التطبيقات على النماذج الخطية

النيتروسوفيكية

مقدمة.

- 131 8-1- مسألة تركيب الخلائط.
- 136 8-2- مسألة خليط المنتجات.
- 142 8-3- نموذج الاستخدام الأمثل للأراضي الزراعية.
- 146 8-4- مسألة تعيين موقع مستودع.
- 150 8-5- مسألة ميزانية رأس المال.
- 152 8-6- مسألة تعيين مفتشين.
- 160 8-7- مسألة تحديد التكلفة.

الخاتمة.

المراجع العلمية

الفصل الأول

دراسة جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية

المقدمة.

1-1- جمل المعادلات الخطية وفق المنطق الكلاسيكي.

1-2- جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية التي عدد المعادلات فيها يساوي

m وعدد المتحولات يساوي n .

1-3- طريقة (جاردن - غوص) لحل جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية

التي فيها $m = n$.

1-4- الحلول القاعدية لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية.

1-5- طريقة (جاردن - غوص) لحل جملة معادلات خطية نيتروسوفيكية فيها

$m < n$.

1-6- الحلول القاعدية غير السالبة لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية.

1-7- طريقة السيمبلكس لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لجملة معادلات

خطية فيها $m < n$.

الخاتمة.

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

حيث a_{ij} و b_i أعداد حقيقة من أجل جميع قيم:

$$i = 1, 2, \dots, m \text{ و } j = 1, 2, \dots, n$$

وميزنا ثلاث حالات لجملة المعادلات الخطية:

الحالة الأولى: عدد المعادلات يساوي عدد المتحولات أي $m = n$.

الحالة الثانية: عدد المعادلات أكبر من عدد المتحولات أي $m > n$.

الحالة الثالثة: عدد المعادلات أقل من عدد المتحولات $m < n$.

فيما يلي سنقوم بعرض جمل المعادلات الخطية باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك

حيث سنأخذ الأعداد الحقيقية a_{ij} و b_i أعداد نيتروسوفيكية أي من الشكل Nb_i

و Na_{ij} ، قيم غير محددة تحديدا "تاما" يمكن أن تكون جوارا" للأعداد الحقيقية a_{ij}

و b_i تكتب بأحد الأشكال التالية:

$$Na_{ij} = a_{ij} + \varepsilon_{ij} \text{ و } Nb_i = b_i + \delta_i \text{ حيث:}$$

$$\varepsilon_{ij} \in [\lambda_{1ij}, \lambda_{2ij}] \text{ أو } \varepsilon_{ij} \in \{\lambda_{1ij}, \lambda_{2ij}\} \text{ أو غير ذلك.}$$

$$\delta_i \in [\mu_{1i}, \mu_{2i}] \text{ أو } \delta_i \in \{\mu_{1i}, \mu_{2i}\} \text{ أو غير ذلك.}$$

1-2- جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية التي عدد المعادلات

فيها يساوي m وعدد المتحولات يساوي n :

الشكل العام:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n = Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n = Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n = Nb_m$$

وبالشكل المصفوفي:

$$NA.X = NB$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

لإيجاد الحل العام لجملة المعادلات ندرسها حسب الحالات الثلاثة السابقة الذكر.

الحالة الأولى: عدد المعادلات يساوي عدد المتحولات أي $m = n$ تكتب جملة

المعادلات كما يلي:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n = Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n = Nb_2$$

.....

$$Na_{n1}x_1 + Na_{n2}x_2 + \dots + Na_{nn}x_n = Nb_n$$

وبالشكل المصفوفي:

$$NA \cdot X = NB$$

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{n1} & Na_{n2} & \dots & Na_{nn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأمثال مصفوفة مربعة نحسب محدها $\Delta_N = |NA|$ وهنا نميز حالتين:

1- $\Delta_N = 0$ ينتج عن هذه الحالة حالتين:

a. إذا كان $\Delta_N = 0$ و $\Delta_{Nx_j} \neq 0$ حيث Δ_{Nx_j} هو المحدد الناتج من محدد مصفوفة الأمثال Δ_N بعد تبديل العمود الذي يحوي أمثال المجهول x_j بعمود الثوابت (القيم الموجودة في الطرف الثاني من المعادلات) عندئذ ليس للجملة حل.

b. إذا كان $\Delta_N = 0$ و $\Delta_{Nx_j} = 0$ هذا يعني أن جملة المعادلات غير مستقلة خطياً أي أن بعضها مرتبط خطياً ببعضها الآخر، لمعالجة هذه الحالة نقوم بحذف إحدى المعادلتين المرتبطتين خطياً، بذلك ينخفض عدد المعادلات ويصبح m' حيث ان $m' = m - 1$ ويكون $m' < n$ وهي مطابقة للحالة الثانية التي سيتم معالجتها لاحقاً.

2- إذا كان $\Delta_N \neq 0$ أي أن جملة المعادلات مستقلة خطياً وللجملة حل وحيد يمكن إيجاده بعدة طرق، ندرس منها طريقة (جاردان - غوص) التي تعتبر الأساس لخوارزمية السيمبلكس المباشرة التي نستخدمها للحصول على الحل الأمثل للنماذج الخطية.

1-3- طريقة (جاردن - غوص) لحل جمل المعادلات الخطية

النيوتروسوفية التي فيها $m = n$:

لتوضيح الأساس الرياضي لهذه الطريقة نكتب المعادلات بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{n1} & Na_{n2} & \dots & Na_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

أو بالشكل المختصر:

$$NA \cdot X = NB \quad (2)$$

بما أن $\Delta_N = |NA| \neq 0$ هذا يعني أن للمصفوفة NA مقلوب هو NA^{-1}

نضرب طرفي المعادلة (2) بـ NA^{-1} نجد:

$$NA^{-1} \cdot (NA \cdot X) = NA^{-1} \cdot NB$$

وبالتالي نحصل على:

$$I \cdot X = NB'$$

والتي تكتب بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ \dots \\ Nb'_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

إن هذه العملية هي أساس طريقة (جاردن - غوص) لحل جملة من المعادلات

الخطية، حتى نقوم بتحويل الشكل (1) إلى الشكل (2) نتبع الخطوات التالية:

1- نعبر عن الشكل (1) بالجدول:

المتحولات المعادلات	x_1	x_2	x_n	NB
1	Na_{11}	Na_{12}	Na_{1n}	Nb_1
2	Na_{21}	Na_{22}	...	Na_{2n}	Nb_2
....
n	Na_{n1}	Na_{n2}	...	Na_{nn}	Nb_n

جدول رقم (1) جدول جملة المعادلات

2- نقوم بتحويل المصفوفة NA إلى مصفوفة الواحدية I وذلك بمعالجة أسطر الجدول بحيث نجعل جميع العناصر غير القطرية في جميع اسطره مساوية للصفر والقطرية مساوية للواحد.

عندما نريد حذف المتحول x_s من المعادلة t نتبع الخطوات التالية:

a. نقسم جميع عناصر السطر t الذي نريد جعل أمثال x_s فيه مساوية للواحد على Na_{ts} (أمثال x_s) فتصبح أمثال x_s مساوية للواحد وتتغير الأمثال الأخرى.

b. نجعل جميع عناصر العمود الذي فيه x_s (عدا السطر t) مساوية للصفر.

c. نحسب بقية عناصر الجدول الجديد من العلاقتين التاليتين:

$$\left. \begin{aligned} Na'_{ij} &= \left(Na_{ij} - Na_{is} \frac{Na_{tj}}{Na_{ts}} \right) = \frac{Na_{ij}Na_{ts} - Na_{is}Na_{tj}}{Na_{ts}} \\ Nb'_i &= \left(Nb_i - Na_{is} \frac{Nb_t}{Na_{ts}} \right) = \frac{Nb_iNa_{ts} - Na_{is}Nb_t}{Na_{ts}} \end{aligned} \right] \quad (4)$$

يسمى العنصر Na_{ts} بعنصر الارتكاز.

من المعالجة السابقة نحصل على الجدول:

المتحولات المعادلات	Nx_1	Nx_2	Nx_n	NB'
1	1	0	0	Nb'_1
2	0	1	...	0	Nb'_2
....
n	0	0	...	1	Nb'_n

جدول رقم (2) جدول الحل النهائي

من خلال الجدول تكتب جملة المعادلات الخطية بالشكل المصفوفي:

$$I.NX = NB'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ \dots \\ Nb'_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Nx_1 \\ Nx_2 \\ \dots \\ Nx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ \dots \\ Nb'_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Nx_1 = Nb'_1, Nx_2 = Nb'_2, \dots, Nx_n = Nb'_n$$

الحالة الثانية: عدد المعادلات أكبر من عدد المتحولات أي $m > n$:

في هذه الحالة تشكل من جملة المعادلات جملة جديدة عدد المعادلات فيها يساوي عدد المتحولات وذلك باستبعاد عدد من المعادلات قدره $m - n$ ثم نقوم بحل الجملة الجديد كما فعلنا في الحالة الأولى ونعوض الحل الناتج في المعادلات التي تم استبعادها للتأكد من أنها محققة.

الحالة الثالثة: عدد المتحولات أكبر من عدد المعادلات أي $m < n$:

في هذه الحالة نكون أمام جملة من المعادلات من الشكل:

بفرض أن $NC^{-1}.NB = NB'$ وأن $NC^{-1}.ND = ND'_{(m.n-m)}$ نجد أن:

$$= \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ \dots \\ Nb'_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Nd'_{11} & Nd'_{12} & \dots & Nd'_{1(n-m)} \\ Nd'_{21} & Nd'_{22} & \dots & Nd'_{2(n-m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Nd'_{m1} & Nd'_{m2} & \dots & Nd'_{m(n-m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

وتحول إلى جملة معادلات خطية كما يلي:

$$Nx_1 = Nb'_1 - (Nd'_{11}x_{m+1} + Nd'_{12}x_{m+2} + \dots + Nd'_{1(n-m)}x_n)$$

$$Nx_2 = Nb'_2 - (Nd'_{21}x_{m+1} + Nd'_{22}x_{m+2} + \dots + Nd'_{2(n-m)}x_n)$$

.....

$$Nx_m = Nb'_m - (Nd'_{m1}x_{m+1} + Nd'_{m2}x_{m+2} + \dots + Nd'_{m(n-m)}x_n)$$

هذا يعني أننا تمكنا من حساب m متحولاً وهي x_1, x_2, \dots, x_m بدلالة

$(n - m)$ متحولاً هي $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$.

ونلاحظ أن قيم المتحولات x_1, x_2, \dots, x_m تتعلق بالقيم التي تأخذها المتحولات

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ أو بتعبير آخر الذي نعطيها للمتحولات

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ وأنه مقابل كل جملة من القيم مثل

$\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n$ لهذه المتحولات نحصل على جملة لقيم المتحولات

x_1, x_2, \dots, x_m هي:

$$Nx_1 = Nb'_1 - (Nd'_{11}\beta_{m+1} + Nd'_{12}\beta_{m+2} + \dots + Nd'_{1(n-m)}\beta_n)$$

$$Nx_2 = Nb'_2 - (Nd'_{21}\beta_{m+1} + Nd'_{22}\beta_{m+2} + \dots + Nd'_{2(n-m)}\beta_n)$$

.....

$$Nx_m = Nb'_m - (Nd'_{m1}\beta_{m+1} + Nd'_{m2}\beta_{m+2} + \dots + Nd'_{m(n-m)}\beta_n)$$

وبالتالي نحصل على حل يشمل جميع متحولات الجملة (5)

وهو الحل المرتب كمايلي:

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n)$$

ولكن بما أن المتحولات $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ يمكن أن تأخذ عدداً لا نهائياً من القيم الكيفية (حتى وإن كانت مقيدة بشروط معينة) فإننا نحصل على عدد لا نهائي من القيم المقابلة للمتحولات x_1, x_2, \dots, x_m .

وبالتالي فإذا كان $|NC| \neq 0$ فإن لجملة المعادلات (5) عدد لانتهائي من الحلول المقبولة من الشكل:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

وبالتالي نحصل على حل يشمل جميع متحولات الجملة هو الحل المرتب:

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n)$$

1-4- الحل القاعدية لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيقية:

بما أن للجملة (5) عدد لانتهائي من الحلول المقبولة فإننا سنحاول الاقتصار على عدد محدود منها وذلك بوضع المتحولات $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ مساوية للصفر عندها تأخذ الجملة (9) الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ \dots \\ Nb'_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

ومنه نحصل على:

$$x_1 = Nb'_1, x_2 = Nb'_2, \dots, x_m = Nb'_m$$

وبالتالي يكون الحل الكامل:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_m, 0, 0, \dots, 0)$$

نسمي هذا الحل بالحل القاعدي لأنه نسب إلى القاعدة ذات المتجهات العمودية

الأحادية في الفضاء R^m التالية:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ m \end{bmatrix}$$

إن جملة المتجهات e_1, e_2, \dots, e_m ، تشكل قاعدة لأنها مستقلة خطياً ويمكن التعبير عن المتجه NB' بدالاتها باستخدام المضارب x_1, x_2, \dots, x_m كما يلي:

$$NB' = e_1x_1 + e_2x_2 + \dots + e_mx_m$$

ندعو المتحولات x_1, x_2, \dots, x_m بالمتحولات الأساسية أو المتحولات القاعدية وندعو المتحولات الأخرى $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ بالمتحولات الحرة أو غير القاعدية لأنها تأخذ قيم كيفية.

إن عملية اختيار المتحولات x_1, x_2, \dots, x_m لتكون متحولات قاعدية هي عملية عشوائية، حيث أننا نستطيع تشكيل حلول قاعدية أخرى، مع العلم أن الإمكانيات المتاحة للحصول على حلول قاعدية هي:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

وهو عدد محدود من الحلول المقبولة اللانهائية.

مثال 1:

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين الخطيتين التاليتين:

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_4 = [2,5]$$

$$3x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = [3,7]$$

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = [4,8]$$

في جملة المعادلات عدد المتحولات $n = 4$ وعدد المعادلات $m = 3$ وبالتالي

فإن عدد المتحولات القاعدية يساوي 3 وعدد المتحولات الحرة غير القاعدية

$$n - m = 1, \text{ عدد الحلول الممكنة يحسب من العلاقة:}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

أي:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

تكتب بالشكل:

$$(x_1, x_2, x_3, 0), (x_1, x_2, 0, x_4), (x_1, 0, x_3, x_4), (0, x_2, x_3, x_4)$$

للحصول على هذه الحلول نكتب جملة المعادلات بالشكل:

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = [2,5] - 2x_4$$

$$3x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = [3,7] - x_4$$

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = [4,8] - 4x_4$$

تكتب الجملة السابقة بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2,5] \\ [3,7] \\ [4,8] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot [x_4]$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} [2,5] \\ [3,7] \\ [4,8] \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad X'' = [x_4]$$

نحسب المحدد $|C|$ نجد:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

لإيجاد الحل نقوم بإيجاد مقلوب المصفوفة C نجد:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{3} & 2 & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نعوض في العلاقة:

$$NC^{-1}.NC.X' = NC^{-1}.(NB - ND.X'')$$

نجد:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{-7}{3} & 2 & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-7}{3} & 2 & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} [2,5] \\ [3,7] \\ [4,8] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot [x_4] \right) \\ & \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Nx_1 \\ Nx_2 \\ Nx_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-7}{3} & 2 & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [2,5] \\ [3,7] \\ [4,8] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-7}{3} & 2 & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot [x_4] \end{aligned}$$

وتحول إلى جملة المعادلات:

$$Nx_1 = \begin{bmatrix} \left[0, \frac{-1}{3}\right] \\ -\left[1, \frac{4}{3}\right] \\ [3,5] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-16}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [x_4]$$

نضع المتحول الحر x_4 مساويا للصفر نحصل على:

$$Nx_1 = \begin{bmatrix} \left[0, \frac{-1}{3}\right] \\ -\left[1, \frac{4}{3}\right] \\ [3,5] \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$x_1 = \left[0, \frac{-1}{3}\right], x_2 = -\left[1, \frac{4}{3}\right], x_3 = [3,5]$$

وبذلك نحصل على الحل القاعدي النيتروسوفيكى الأول وهو:

$$(x_1, x_2, x_3, 0) = \left(\left[0, \frac{-1}{3}\right], -\left[1, \frac{4}{3}\right], [3,5], 0\right)$$

وبنفس الطريقة نحصل على الحلول القاعدية الأخرى.

الحلول القاعدية المنحلة:

يكون الحل القاعدي حل منحل وغير سليم إذا حصلنا في النتيجة النهائية على قيمة الصفر للمتحولات التي اخترناها كقاعدة.

1-5- طريقة (جاردان - غوص) لحل جملة معادلات خطية

نيتروسوفيكية فيها: $m < n$

انطلاقاً من المبادئ الرياضية السابقة تكون الخطوات الأساسية لطريقة

(جاردان - غوص) كما يلي:

1- نكتب جملة المعادلات (5) بالشكل المصفوفي:

$$I.X' + NC^{-1}.D.X'' = NC^{-1}.NB = NB'$$

$$[I, NC^{-1}.ND]. \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} = NB' \quad (12)$$

والتي تكتب بالشكل المفصل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & Nd'_{11} & Nd'_{12} & \dots & Nd'_{1(n-m)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & Nd'_{21} & Nd'_{22} & \dots & Nd'_{2(n-m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & Nd'_{m1} & Nd'_{m2} & \dots & Nd'_{m(n-m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ \dots \\ Nb'_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

ويتم الانتقال من الشكل (5) إلى الشكل (12) بإتباع نفس الخطوات التي ذكرناها في الفقرة السابقة، ولكن هذه الطريقة لا تعطينا حلاً "قاعدياً" إلا إذا وضعنا جميع المتحولات الحرة مساوية للصفر، وإذا قمنا بذلك نحصل فقط على الحل الأول وللحصول على جميع الحلول نقوم بالخطوات التالية:

a. نضع أمثال المعادلات في جدول كمايلي:

المتحولات المعادلات	x_1	x_2	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_n	NB
1	a_{11}	a_{12}	a_{1m}	a_{1m+1}	a_{1m+2}	a_{1n}	Nb'_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	a_{2m+1}	a_{2m+2}	a_{2n}	Nb'_2
....
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	a_{mm+1}	a_{mm+2}	...	a_{mn}	Nb'_m

جدول رقم (3) الجدول الأول لطريقة (جاردان - غوص)

b. نقوم بإيجاد المصفوفة الأحادية $I_{m \times m}$ عن طريق معالجة أسطر الجدول السابق بنفس الطريقة التي تم شرحها بالفقرة السابقة ويتم ذلك بتحديد

المتحولات التي ستدخل إلى القاعدة ولتكن x_1, x_2, \dots, x_m ونتيجة لهذه المعالجة نحصل على الجدول:

المتحولات المعادلات	x_1	x_2	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_n	NB'
1	1	0	0	Nd'_{11}	Nd'_{12}	Nd'_{1n-m}	Nb'_1
2	0	1	...	0	Nd'_{21}	Nd'_{22}	Nd'_{2n-m}	Nb'_2
....
m	0	0	...	1	Nd'_{m1}	Nd'_{m2}	...	Nd'_{mn-m}	Nb'_m

جدول رقم (4) جدول الحل القاعدي الأول

c. نضع جميع المتحولات الحرة في الجدول (4) مساوية للصفر نحصل على الحل القاعدي الأول:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_m, 0, 0, \dots, 0)$$

d. للحصول على حل قاعدي ثاني نقوم باستبدال أحد المتحولات القاعدية وليكن مثلا x_m بأحد المتحولات غير القاعدية x_{m+1} ، وذلك بتحديد عنصر الارتكاز المناسب وهنا هو Nd'_{m1} نعمل على حذف x_{m+1} من جميع المعادلات ما عدا المعادلة m حيث نجعل أمثاله في هذه المعادلة مساوية للواحد، نقوم بإجراء الحسابات المناسبة من خلال العلاقتين (4) نحصل على الحل القاعدي الثاني:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_{m-1}, 0, Nb'_{m+1}, 0, \dots, 0)$$

للحصول على حلول قاعدية أخرى نكرر ما ورد بالخطوة (d).

1-6- الحل القاعدية غير السالبة لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية:

إذا كانت جميع المتحولات أو بعضها مشروطة بأن تكون غير سالبة فإن بعض الحلول القاعدية يكون غير مقبول لأنه يخالف الشرط في مثل هذه الحالة علينا أن نبحث عن الحل القاعدية الموجبة من ضمن الحل القاعدية نظراً لصعوبة تطبيق الطريقة الواردة في المثال وخاصة في الحالة التي تتضمن عدداً كبيراً من المتحولات تم تطوير طريقة جاردان غوص بحيث يتم الحصول مباشرة على الحل الموجبة.

سميت الطريقة الجديدة طريقة السيمبلكس التي تتم وفق الخطوات التالية:

1-7- طريقة السيمبلكس لإيجاد الحل القاعدية غير السالبة لجملة معادلات خطية فيها $m < n$:

في جملة المعادلات (5):

- 1- نجعل جميع عناصر عمود الثوابت NB في الطرف الثاني من المعادلات غير سالبة، وذلك بضرب المعادلة التي طرفها الثاني سالب ب (-1).
- 2- نضع المعاملات للجملة الجديدة بجدول.
- 3- نقوم بتشكيل قاعدة مؤلفة من m متحولاً وذلك باختيار المتحول الذي نريد إدخاله إلى القاعدة وليكن مثلاً x_s ثم نقوم بحساب المؤشر:

$$\theta = \text{Min} \left[\frac{Nb_i}{Na_{is}} \right] = \frac{Nb_t}{Na_{ts}} > 0; \quad Na_{is} > 0, Nb_i > 0$$

ندعو العنصر Na_{ts} عنصر الارتكاز.

نقوم بحذف المتحول x_s من جميع المعادلات وفق طريقة (جاردان - غوص) ماعدا المعادلة t تصبح أمثاله فيها تساوي الواحد.

نكرر الخطوة السابقة حتى نشكل قاعدة مؤلفة من m متحول.

4- نضع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر نحصل على الحل القاعدي غير السالب:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_{m-1}, 0, Nb'_{m+1}, 0, \dots, 0)$$

5- للحصول على حلول قاعدية جديدة غير سالبة أخرى نقوم باختيار أحد المتحولات ليكون متحول قاعدي ثم نحدد عنصر الارتكاز ونكرر العمل الذي قمنا به من أجل المتحول السابق الذكر x_s نحصل على حل قاعدي غير سالب جديد وهكذا نتابع العمل حتى نحصل على جميع الحلول القاعدية غير السالبة.

6- معيار التوقف هو عندما لا نجد عمود من الأعمدة الحرة لم نستخدمه للتبديل يحوي عنصر موجبا" (واحد على الأقل)، أي أن جميع عناصر الأعمدة الحرة التي لم يتم استخدامها أثناء التبديل قيم سالبة.

نوضح ما سبق من خلال المثال:

مثال 2:

$$x_1 - 3x_4 + 2x_5 = -[1,3]$$

$$x_2 + 2x_4 - 3x_5 = [2,8]$$

نضرب المعادلة الأولى بـ (-1) حتى يتحقق الشرط $Nb_i > 0$ نحصل على الجملة الجديدة:

$$-x_1 - 3x_3 - 2x_5 = [1,3]$$

$$x_2 + 2x_4 - 3x_5 = [2,8]$$

في جملة المعادلات عدد المتحولات $n = 5$ وعدد المعادلات $m = 2$ وبالتالي فإن عدد المتحولات القاعدية يساوي 2 وعدد المتحولات الحرة غير القاعدية $n - m = 3$ ، عدد الحلول الممكنة يحسب من العلاقة:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

أي:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

تكتب بالشكل:

$$(x_1, x_2, 0, 0, 0), (x_1, 0, x_3, 0, 0), (x_3, 0, 0, x_4, 0), (x_1, 0, 0, 0, x_5),$$

$$(0, x_2, x_3, 0, 0), (0, x_2, 0, x_4, 0), (0, x_2, 0, 0, x_5), (0, 0, x_3, x_4, 0),$$

$$(0, 0, x_3, 0, x_5), (0, 0, 0, x_4, x_5)$$

للحصول على هذه الحلول ننظم الجدول:

المتحولات المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NB
1	-1	0	0	3	-2	[1,3]
2	0	1	0	2	-3	[2,8]

جدول رقم (5) الجدول الأول لطريقة السيمبلكس

لإيجاد حل قاعدي لجملة المعادلات نختار متحول مثلاً x_4 ليكون متحول قاعدي

ولتحديد عنصر الارتكاز المناسب نحسب المؤشر θ :

$$\theta = \text{Min} \left[\frac{Nb_i}{Na_{is}} \right] = \text{Min} \left[\frac{[1,3]}{3}, \frac{[2,8]}{2} \right] = \frac{[1,3]}{3}$$

النماذج الخطية النيتروسوفيقية وخواصها لإيجاد الحل الأمثل لها

أي أن عنصر الارتكاز هو $a_{14} = 3$ بإجراء الحسابات اللازمة لحذف المتحول x_4 من المعادلتين نحصل على الجدول:

المتحولات المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NB'
x_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
2	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{5}{3}$	$\left[\frac{4}{3}, 6\right]$

جدول رقم (6) الجدول الثاني لطريقة السيمبلكس

نختار متحولاً آخر ليكون متحول قاعدي نلاحظ أن المتحول x_2 جاهز ليكون متحول قاعدي وبالتالي نحصل على الجدول:

المتحولات المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NB'
x_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{5}{3}$	$\left[\frac{4}{3}, 6\right]$

جدول رقم (7) جدول الحل النهائي

وبذلك حصلنا على قاعدة مؤلفة من المتحولين x_2, x_4 نضع المتحولات الحرة مساوية للصفر نحصل على الحل القاعدي النيتروسوفيكلي غير السالب:

$$\left(0, \left[\frac{4}{3}, 6\right], 0, \left[\frac{1}{3}, 1\right], 0\right)$$

للحصول على الحلول الأخرى نكرر ما قمنا به لتعيين الحل السابق.

الخاتمة:

قدمنا كأساس للبرمجة الخطية النيتروسوفيقية في هذا الفصل دراسة لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيقية ، وطريقة جاردان - غوص التي تعتبر الأساس الرياضي لطريقة السيمبلكس المستخدمة لإيجاد الحلول القاعدية الموجبة والتي يمكن استخدامها عندما يكون لدينا قيودا" على بعض المتحولات أو جميعها لتكون قيم موجبة والتي هي بدورها كانت الأساس لطريقة السيمبلكس المباشرة المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية ، وتوصلنا من خلال الأمثلة التي قمنا بعرضها لجمل المعادلات النيتروسوفيقية إلى حلول قاعدية نيتروسوفيقية وهي عبارة عن قيم غير محددة، ويمكن استخدام جمل في الحالات التي تكون البيانات المقدمة للأنظمة التي تعمل وفق هذه الجمل من المعادلات معرضة للتغير وهنا يمكننا الاستفادة من هامش الحرية الذي تقدمه القيم النيتروسوفيقية.

الفصل الثاني

النماذج الخطية النيتروسوفيقية

مقدمة.

2 - 1 - الصيغ الأساسية للنماذج الخطية النيتروسوفيقية.

2 - 2 - كيفية الانتقال من صيغة إلى أخرى.

2 - 1 - 1 - الصيغة العامة للنموذج الخطي النيتروسوفيكى.

2 - 1 - 2 - الصيغة المعيارية للنموذج الخطي النيتروسوفيكى.

2 - 1 - 3 - الصيغة القياسية النيتروسوفيقية للنموذج الخطي.

2 - 1 - 4 - الصيغة المتناظرة للنموذج الخطي النيتروسوفيكى.

2 - 3 - أمثلة على ما سبق.

الخاتمة.

الفصل الثاني

النماذج الخطية النيتروسوفيكية

مقدمة:

نقدم في هذا الفصل صيغ النماذج الرياضية الخطية النيتروسوفيكية، ونقصد بها النماذج الخطية التي تحوي في علاقتها الرياضية قيم نيتروسوفيكية سواء في علاقة تابع الهدف أو بعلاقات القيود، والتي تأخذ بعين الاعتبار جميع التغيرات التي يمكن أن تطرأ على بيئة عمل المنظومة التي يمثلها النموذج، الأمر الذي يضمن للمنشأة سير عمل آمن، أي أننا سنقوم بأخذ أمثال المتغيرات في تابع الهدف قيم نيتروسوفيكية أي من الشكل $Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$. وأيضا القيم التي تعبر عن الإمكانات المتاحة هي قيم نيتروسوفيكية أي $Nb_i = b_i \pm \delta_i$ و

حيث $Na_{ij} = a_{ij} \pm \mu_{ij}$ ، $(j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m)$ ، هي قيم غير محددة تحديد تام وتتمتع بهامش من الحرية نأخذها حسب طبيعة الحالة التي يمثلها النموذج الخطي، سنقوم بعرض الصيغ الأساسية للنماذج الخطية من خلال الدراسة التالية:

2 - 1 - الصيغ الأساسية للنماذج الخطية النيتروسوفيقية:

يمكن تصنيف النماذج الخطية النيتروسوفيقية وفق الصيغ التالية:

2 - 1 - 1 - الصيغة العامة للنموذج الخطي النيتروسوفيكى:

تعطى الصيغة العامة النيتروسوفيقية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل المختصر

التالي:

$$NZ = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \rightarrow \text{Max or Min}$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n Na_{ij} x_j \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

حيث: $c_j \pm \varepsilon_j$ و $b_i \pm \delta_i$ و Na_{ij} و $(j = 1, 2, \dots, n$ و $i = 1, 2, \dots, m)$

ثوابت تعين قيمها بحسب طبيعة المسألة المعطاة و x_j متحولات القرار.

يعطى بالشكل المفصل:

أوجد:

$$NZ = Nc_1 x_1 + Nc_2 x_2 + \dots + Nc_n x_n \rightarrow \text{Max or Min}$$

ضمن القيود:

$$Na_{i1} x_1 + Na_{i2} x_2 + \dots + Na_{in} x_n \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} Nb_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

كما أنه يمكن التعبير عن النماذج الخطية باستخدام المصفوفات وعليه يمكن كتابة النموذج الخطي النيتروسوفيكي الموضوع بالصيغة العامة باستخدام المصفوفات كما يلي:

أوجد:

$$NZ = NC X \rightarrow (Max \text{ or } Min)$$

ضمن القيود:

$$NA X \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} NB$$

$$X \geq 0$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2 - 1 - 2 - الصيغة المعيارية للنموذج الخطي النيتروسوفيكي:

يكون النموذج الخطي النيتروسوفيكي موضوع بالصيغة المعيارية إذا كان تابع الهدف من نوع تعظيم والقيود من نوع أصغر من أو يساوي، عندها تعطى الصيغة المعيارية النيتروسوفيكية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل المختصر كما يلي:

$$NZ = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n Na_{ij}x_j \leq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

وتعطى بالشكل المفصل:

أوجد:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n \leq Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n \leq Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n \leq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

كما أنه يمكن التعبير عن النماذج الخطية باستخدام المصفوفات وعليه يمكن كتابة

النموذج الخطي النيتروسوفكي الموضوع بالصيغة المعيارية باستخدام المصفوفات

كما يلي:

أوجد:

$$NZ = NC X \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$NA X \leq NB$$

$$X \geq 0$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2 - 1 - 3 - الصيغة القياسية النيتروسوفيقية للنموذج الخطي:

يلعب الشكل القياسي دوراً هاماً في إيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية، حيث يتم تحويل مسألة البحث عن الحل الأمثل للنماذج الخطية إلى عملية البحث عن حل جملة من المعادلات الخطية مؤلفة من m معادلة بـ $n + m$ مجهول، وحل هذه الجملة يكون مفيداً إذا كان ممكناً، أي إذا كان يحقق شروط عدم السلبية $x_j \geq 0$ ومن ثم فإن الحل الأمثل للنموذج الخطي هو القيم المثالية للمتغيرات التي تحقق القيود وتعطي لدالة الهدف أعظم أو أصغر قيمة ممكنة حسب نص المسألة قيد الحل، تعطى الصيغة القياسية النيتروسوفيقية بالشكل المختصر التالي:

$$NZ = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \rightarrow (Max \text{ or } Min)$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n Na_{ij} x_j = b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

وتعطى بالشكل المفصل:

أوجد:

$$NZ = Nc_1 x_1 + Nc_2 x_2 + \dots + Nc_n x_n \rightarrow (Max \text{ or } Min)$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n = Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n = Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n = Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

كما أنه يمكن التعبير عن النماذج الخطية باستخدام المصفوفات وعليه يمكن كتابة

النموذج الخطي النيتروسوفيكي الموضوع بالصيغة القياسية باستخدام المصفوفات

كما يلي:

أوجد:

$$NZ = NC X \rightarrow (Max \text{ or } Min)$$

ضمن القيود:

$$NA X = NB$$

$$X \geq 0$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

هنا نلاحظ أن جميع القيود من نوع مساواة ماعدا قيود عدم السلبية فإنها تبقى

متراجحات، وأيضاً الطرف الأيمن من كل قيد مساواة يجب أن يكون غير سالب

وجميع متحولات القرار غير سالبة وتابع الهدف في الشكل القياسي النيتروسوفيكي

يمكن أن يكون تابع تعظيم أو تابع تقليل.

2 - 1 - 4 - الصيغة المتناظرة للنموذج الخطي النيتروسوفيكي:

نقول عن برنامج خطي أنه موضوع بالصيغة المتناظرة إذا كانت جميع المتحولات مقيدة بأن تكون غير سالبة وإذا أعطيت جميع القيود بشكل متراجحات (ويجب أن تكون متراجحات قيود مسألة التعظيم موضوعة بصيغة (\leq) من أو يساوي) في حين أن متراجحات قيود مسألة التقليل يجب أن تكون بصيغة (\geq) أكبر من أو يساوي)، عندها نكتب الصيغة المتناظرة النيتروسوفيكية بأحد الشكلين التاليين:

الشكل الأول:

تعطى الصيغة المتناظرة النيتروسوفيكية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل المختصر كما يلي:

$$NZ = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n Na_{ij} x_j \leq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

وتعطى بالشكل المفصل:

أوجد:

$$NZ = Nc_1 x_1 + Nc_2 x_2 + \dots + Nc_n x_n \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n \leq Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n \leq Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n \leq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

وتكتب باستخدام المصفوفات كما يلي:

أوجد:

$$NZ = NC X \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$NA X \leq NB$$

$$X \geq 0$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

الشكل الثاني:

تعطى الصيغة المتناظرة النيتروسوفيقية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل

المختصر كما يلي:

$$NZ = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j)x_j \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n Na_{ij}x_j \geq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

وتعطى بالشكل المفصل:

أوجد:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n \rightarrow \text{Min}$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n \geq Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n \geq Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n \geq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

وتكتب باستخدام المصفوفات كما يلي:

أوجد:

$$NZ = NC X \rightarrow M \text{ هي}$$

ضمن القيود:

$$NA X \geq NB$$

$$X \geq 0$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2 - 2 - كيفية الانتقال من صيغة إلى أخرى:

بعد عرض صيغ النماذج الخطية النيتروسوفيكية تجدر الإشارة إلى أننا نستطيع الانتقال من صيغة إلى أخرى بإتباع التحويلات الأولية التالية:

- نحول القيمة الصغرى لتابع الهدف $f(x)$ إلى قيمة عظمى بأخذ $(-f(x))$ بدلا من $f(x)$.
- إذا كانت المتراجحات من الشكل (\geq) أكبر من أو يساوي) تحول إلى الشكل (\leq) أصغر من أو يساوي) بضرب طرفيها ب (-1) ، وبالعكس.
- قيد المساواة يمكن تحويله إلى قيدي متراجحات مختلفتين في الاتجاه.
- إذا كان الطرف الأيسر من قيد (متراجحة) معطى بالقيمة المطلقة فإنه يمكن تحويله إلى متراجحتين نظاميتين.
- قيد المتراجحات من نوع (\geq) أكبر من أو يساوي) نحوله إلى قيد مساواة بطرح قيمة موجبة مناسبة من الطرف الأيسر للمتراجحة وندخل هذه القيمة إلى تابع الهدف بأمثال مساوية للصفر.
- قيد المتراجحات من نوع (\leq) أصغر من أو يساوي) نحوله إلى قيد مساواة بإضافة متحول موجب مناسب إلى الطرف الأيسر للمتراجحة وندخل هذا المتحول إلى تابع الهدف بأمثال مساوية للصفر.
- إذا كان أحد متحولات القرار غير مقيد بشرط عدم السلبية (أي يمكن أن يكون سالباً أو موجباً أو صفر) هنا يمكننا التعبير عنه بالفرق بين متحولين غير سالبين x' و x'' كما يلي $x' - x'' \geq 0$ حيث $x', x'' \geq 0$

2 - 3 - أمثلة على ما سبق:

النماذج الخطية في جميع الأمثلة معطاة بالشكل المفصل:

مثال 1:

لدينا النموذج الخطي المعطى بالصيغة العامة النيتروسوفيقية التالية:

$$Min NL = (3 \pm \varepsilon_1)x_1 - (3 \pm \varepsilon_2)x_2 + (7 \pm \varepsilon_3)x_3$$

ضمن القيود:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 40 \pm \delta_1$$

$$x_1 + 9x_2 - 7x_3 \geq 50 \pm \delta_2$$

$$5x_1 + 3x_2 = 20 \pm \delta_3$$

$$|5x_2 + 8x_3| \leq 100 \pm \delta_4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث ε_j هو اللاتحديد في أمثال المتغيرات بتابع الهدف التي تعبر عن تكلفة

الوحدة الواحدة من المنتج ويمكن أن يكون

$$\varepsilon_j \in [\lambda_{1j}, \lambda_{2j}] \text{ أو } \varepsilon_j \in \{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\} \text{ حيث } j = 1, 2, 3 \text{ ، حيث } \delta_i \text{ هو}$$

اللاتحديد على الكميات المتوفرة ويمكن أن يكون $\delta_i \in [\mu_{1i}, \mu_{2i}]$ أو

$$\delta_i \in \{\mu_{1i}, \mu_{2i}\} \text{ حيث } i = 1, 2, 3, 4 \text{ ، لتحويل النموذج إلى الصيغة المعيارية}$$

النيتروسوفيقية نقوم بإجراء التحويلات التالية:

• تابع الهدف هو تابع تقليل نحوله إلى تابع تعظيم

$$Min NL = (3 \pm \varepsilon_1)x_1 - (3 \pm \varepsilon_2)x_2 + (7 \pm \varepsilon_3)x_3$$

وبكافئ:

$$Max NZ = -(3 \pm \varepsilon_1)x_1 + (3 \pm \varepsilon_2)x_2 - (7 \pm \varepsilon_3)x_3$$

- القيد الثاني معطى (\geq أكبر أو يساوي) نحوله إلى (\leq أصغر من أو

يساوي) بضرب الطرفين بـ (-1) نحصل على:

$$-x_1 - 9x_2 + 7x_3 \leq -(50 \pm \delta_2)$$

- القيد الثالث $5x_1 + 3x_2 = 20 \pm \delta_3$ يكافئ القيدين

$$5x_1 + 3x_2 \leq 20 \pm \delta_3$$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 20 \pm \delta_3$$

ثم نحول القيد $5x_1 + 3x_2 \geq 20 \pm \delta_3$ إلى:

$$-5x_1 - 3x_2 \leq -(20 \pm \delta_3)$$

- القيد $|5x_2 + 8x_3| \leq 100 \pm \delta_4$ يكافئ القيدين:

$$5x_2 + 8x_3 \leq 100 \pm \delta_4$$

$$-5x_2 - 8x_3 \leq 100 \pm \delta_4$$

- المتحول x_3 غير مقيد بقيد عدم السلبية نستعيض عنه بالمتحولين

$$x_3', x_3'' \geq 0 \text{ حيث } x_3 = x_3' - x_3''$$

تصبح الصيغة المعيارية النيتروسوفيكية كما يلي:

$$Max \text{ NZ} = -(3 \pm \varepsilon_1)x_1 + (3 \pm \varepsilon_2)x_2 - (7 \pm \varepsilon_3)(x_3' - x_3'')$$

ضمن القيود:

$$x_1 + x_2 + 3(x_3' - x_3'') \leq 40 \pm \delta_1$$

$$-x_1 - 9x_2 + 7(x_3' - x_3'') \leq -(50 \pm \delta_2)$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 20 \pm \delta_3$$

$$-5x_1 - 3x_2 \leq -(20 \pm \delta_3)$$

$$5x_2 + 8(x_3' - x_3'') \leq 100 \pm \delta_4$$

$$-5x_2 - 8(x_3' - x_3'') \leq 100 \pm \delta_4$$

$$x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0$$

مثال 2:

يقوم مصنع بإنتاج أربعة أنواع من المنتجات S_1, S_2, S_3, S_4 ويستخدم من أجل ذلك المواد الأولية M_1, M_2, M_3 . ترغب إدارة المصنع في دراسة التنظيم الأمثل للإنتاج خلال فترة زمنية (شهر مثلاً) وتحديد الإنتاج الشهري لكل منتج من أجل تحقيق ربح أعظمي، علماً بأن الربح يتناسب طردياً مع عدد الوحدات المباعة من المنتجات. نوضح الكميات المتوفرة من المواد الأولية اللازمة لكل منتج والربح العائد بالجدول:

المواد الأولية	نوع المنتج				الكميات المتوفرة
	S_1	S_2	S_3	S_4	
M_1	1.5	1	2.4	1	$3000 \pm \delta_1$
M_2	1	5	1	3.5	$9000 \pm \delta_2$
M_3	1.5	3	3.5	1	$7000 \pm \delta_3$
ربح واحدة المنتج	$4 \pm \varepsilon_1$	$8 \pm \varepsilon_2$	$5 \pm \varepsilon_3$	$6 \pm \varepsilon_4$	

نفرض x_1, x_2, x_3, x_4 عدد الوحدات المنتجة من الأنواع الأربعة خلال الفترة الإنتاجية (شهر مثلاً) وعليه تكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_1 في إنتاج الأصناف الأربعة:

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4$$

ويجب ألا تتجاوز الكمية المتوفرة أي:

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 \leq 3000 \pm \delta_1 \quad (1)$$

بالمثل تكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_2 في إنتاج الأصناف الأربعة:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \leq 9000 \pm \delta_2 \quad (2)$$

وتكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_3 في إنتاج الأصناف الأربعة

$$1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \leq 7000 \pm \delta_3 \quad (3)$$

بالإضافة إلى ذلك يجب أن تكون الكميات المنتجة غير سالبة أي:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad (4)$$

وهي ما تسمى بقيود عدم السلبية.

بذلك نكون قد حددنا جميع القيود المفروضة على متحولات المسألة.

بالنسبة لتابع الهدف:

إذا تم إنتاج وحدات قدرها x_1, x_2, x_3, x_4 من الأنواع الأربعة على الترتيب فإن

الربح خلال الفترة الإنتاجية سوف يكون:

$$NZ = (4 \pm \varepsilon_1)x_1 + (8 \pm \varepsilon_2)x_2 + (5 \pm \varepsilon_3)x_3 + (6 \pm \varepsilon_4)x_4$$

وهو يمثل تابع الهدف.

وعليه يكون النموذج الرياضي للمسألة:

$$\begin{aligned} \text{Max } NZ &= (4 \pm \varepsilon_1)x_1 + (8 \pm \varepsilon_2)x_2 + (5 \pm \varepsilon_3)x_3 \\ &+ (6 \pm \varepsilon_4)x_4 \end{aligned}$$

ضمن القيود:

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 \leq 3000 \pm \delta_1$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \leq 9000 \pm \delta_2$$

$$1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \leq 7000 \pm \delta_3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

حصلنا على نموذج خطي معياري نيتروسوفيكى باستخدام التحويلات المناسبة

يمكن كتابته بالصيغة القياسية النيتروسوفيقية:

$$\begin{aligned} \text{Max } NZ &= (4 \pm \varepsilon_1)x_1 + (8 \pm \varepsilon_2)x_2 + (5 \pm \varepsilon_3)x_3 \\ &+ (6 \pm \varepsilon_4)x_4 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \end{aligned}$$

ضمن القيود:

$$\begin{aligned}1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 + y_1 &= 3000 \pm \delta_1 \\x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 + y_2 &= 9000 \pm \delta_2 \\1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 + y_3 &= 7000 \pm \delta_3 \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

الخاتمة:

إن اللاتحديد الذي قمنا بإضافته على البيانات التي يصفها النموذج الخطي يقدم لنا نماذج خطية نيتروسوفيكية تحاكي الواقع وتراعي معظم التغيرات التي يمكن أن تطرأ على بيئة عمل النظام الذي يمثله النموذج الرياضي الخطي، وتمكننا من متابعة دراسة مواضيع البرمجة الخطية مثل إيجاد البرامج المرافقة التي تحتاج إلى وضع النموذج الرياضي بالشكل المتناظر، وحل النماذج الخطية بطريقة السيمبلكس التي تحتاج إلى وضع النماذج بالشكل القياسي وغيرها من مواضيع البرمجة الخطية.

الفصل الثالث

الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل

للنماذج الخطية النيتروسوفيقية

المقدمة.

3-1- الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية.

3-2- الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيقية.

3-3- كيفية الاستفادة من شروط عدم السلبية لإيجاد الحل الأمثل لبعض

النماذج الخطية النيتروسوفيقية باستخدام الطريقة البيانية.

الخاتمة.

الفصل الثالث

الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيقية

المقدمة:

بعد أن عرضنا النماذج الخطية والصيغ المختلفة لها باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك نقدم في هذا الفصل الطريقة البيانية النيتروسوفيقية والتي سنستخدمها لحل النماذج الخطية النيتروسوفيقية.

الطريقة البيانية هي: عبارة عن رسم بياني للنموذج وتعد من أسهل طرق حل مشاكل البرمجة الخطية إلا أنها غير كافية لمعالجة جميع مسائل البرمجة الخطية لأن مسائل البرمجة الخطية في الغالب تحوي عدداً كبيراً من المتحولات وينحصر استخدام الطريقة البيانية في الحالات التالية:

- عدد المجاهيل $n = 1$ أو $n = 2$ أو $n = 3$.
 - في النماذج الخطية التي قيودها قيود مساويات إذا حقق عدد المجاهيل وعدد المعادلات أحد الشروط الآتية: $n - m = 1$ أو $n - m = 2$ ، أو $n - m = 3$.
- هنا نستطيع تحويل النموذج إلى تابع لمتحول واحد أو متحولين أو ثلاث متحولات على الترتيب وذلك بالاستفادة من قيود عدم السلبية التي يتمتع بها متحولات النموذج الخطي، سنقدم في هذا الفصل صياغة للطريقة البيانية باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك وكذلك الطريقة البيانية لحل النماذج الخطية التي قيودها قيود مساويات والفرق بين عدد المجاهيل وعدد القيود يساوي واحد أو اثنان أو ثلاثة.

3-1- الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية:

يتم إيجاد الحل الأمثل بيانياً" بإتباع الخطوات التالية:

1- نحدد أنصاف المستويات المعرفة بمتراجحات القيود وذلك برسم المستقيمات الناتجة من تحويل متراجحات القيود إلى مساويات، يتم الرسم بتحديد نقطتين محقتين للقيود، ثم نصل بين النقطتين نحصل على المستقيم الموافق للقيود وهذا المستقيم يقسم المستوى إلى نصفين من أجل تحديد نصف المستوى المحقق للقيود، نختار نقطة لا على التعيين من أحد نصفي المستويين، ونعوض إحداثيات هذه النقطة في المتراجحة فإذا كانت محققة تكون المنطقة التي تقع فيها هذه النقطة هي منطقة الحل أما إذا كانت غير محققة فتكون المنطقة المعاكسة هي منطقة الحل.

2- نحدد منطقة الحلول المشتركة وهي المنطقة الناتجة من تقاطع أنصاف المستويات المعرفة بمتراجحات القيود، يجب أن تكون هذه المنطقة غير خالية لكي نستطيع متابعة الحل.

3- من أجل تمثيل تابع الهدف نلاحظ أن علاقته تحوي ثلاثة مجاهيل هي Z, x_1, x_2 لذلك يجب معرفة قيمة Z التي هي مجهولة لدينا، هنا نفرض قيمة ما ولتكن $Z_1 = 0$ ونرسم معادلة تابع الهدف Z_1 ونعطي قيمة أخرى ولتكن Z_2 ونمثل المعادلة نحصل على مستقيم مواز للمستقيم الأول، وبالمتابعة نحصل على مجموعة من المستقيم المتوازية الممثلة لتابع الهدف.

4- نرسم الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ حيث C_1 هي أمثال x_1 و C_2 هي أمثال x_2

في عبارة تابع الهدف وتكون جهة تزايد التابع هي اتجاه الشعاع

$\vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ ، وجهة تناقصه هي عكس اتجاه هذا الشعاع، أي يتم

السحب حسب نوع تابع الهدف (تعظيم أو تقليل) بتعبير أوضح نقوم

بإيجاد نقطة الحل الأمثل وذلك بأن نسحب المستقيم الممثل لـ Z_1 بشكل

مواز لنفسه باتجاه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ لإيجاد القيمة العظمى لتابع

الهدف، (وبعكس هذا الاتجاه لإيجاد القيمة الصغرى)، حتى يمر بأخر

نقطة من نقاط منطقة الحلول المشتركة وتكون هذه النقطة هي نقطة الحل

الأمثل، والتي تقع على حدود منطقة الحلول المشتركة وأي إزاحة أخرى

مهما كانت صغيرة تخرجها منها.

3-2- الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

النيتروسوفيكية:

من تعريف النماذج الخطية النيتروسوفيكية نجد أننا نستطيع تطبيق نفس الخطوات

السابقة للحصول على الحل الأمثل الذي هو قيمة نيتروسوفيكية مناسبة لجميع

الظروف، نوضح ما سبق من خلال المثال التالي:

مثال 1:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A_1, A_2 وتستخدم في عملية الإنتاج ثلاثة أنواع

من المواد الأولية B_1, B_2, B_3 ، إذا كانت الكميات المتوفرة من كل مادة من

المواد الأولية $B_i ; i = 1,2,3$ ، والكمية اللازمة لإنتاج الوحدة الواحدة من كل

النماذج الخطية النيتروسوفية وخواصها الرياضية لإيجاد الحل الأمثل لها

منتج $j = 1, 2$; A_j ، والربح العائد من الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجات A_1, A_2 موضح بالجدول:

المنتجات المواد الأولية	A_1	A_2	الكميات المتوفرة
B_1	6	4	36
B_2	2	3	12
B_3	5	0	10
الربح العائد	[6,8]	[2,4]	

جدول رقم (1) بيانات المسألة

المطلوب:

تحديد الكميات التي يجب إنتاجها من كل منتج من المنتجات $j = 1, 2$; A_j بحيث تحقق الشركة ربح أعظمي:

الحل:

نفرض x_j هي الكمية المنتجة من المنتج j حيث $j = 1, 2$ عندها نستطيع صياغة النموذج الرياضي الخطي النيتروسوفية:

$$Z = [6,8]x_1 + [2,4]x_2 \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad (1)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad (2)$$

$$5x_1 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

النموذج السابق هو نموذج خطي نيوتروسوفيكي لوجود اللاتحديد في أمثال المتحولات بتابع الهدف لإيجاد الحل الأمثل للنموذج السابق سنستخدم الطريقة البيانية وفق الخطوات التالية:

القيود الأول: نرسم المستقيم الممثل للقيود الأول:

$$6x_1 + 4x_2 = 36$$

نفرض:

$$x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 36 \Rightarrow x_2 = 9$$

نحصل على النقطة الأولى: $A(0,9)$.

نفرض:

$$x_2 = 0 \Rightarrow 6x_1 = 36 \Rightarrow x_1 = 6$$

نحصل على النقطة الثانية: $B(6,0)$.

إذا أخذنا نقطة لا على التعيين من أحد نصفي المستوي الناتجين بعد رسم المستقيم المار بالنقطتين $A(0,9)$ و $B(6,0)$ ولتكن النقطة $O(0,0)$ وعوضناها في متراجحة القيود الأول نجد أن المتراجحة محققة أي أن نصف المستوي الذي تنتمي له النقطة $O(0,0)$ هو نصف مستوي الحل لمتراجحة القيود الأول.

نتابع بنفس الطريقة بالنسبة للقيدين الثاني والثالث نحصل على:

القيود الثاني:

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

نفرض:

$$x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 4$$

نحصل على النقطة الثالثة $C(0,4)$

نفرض:

$$x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 6$$

نحصل على النقطة الرابعة $D(6,0)$.

نحدد منطقة حل متراجحة القيود الثاني كما فعلنا في القيد الأول.

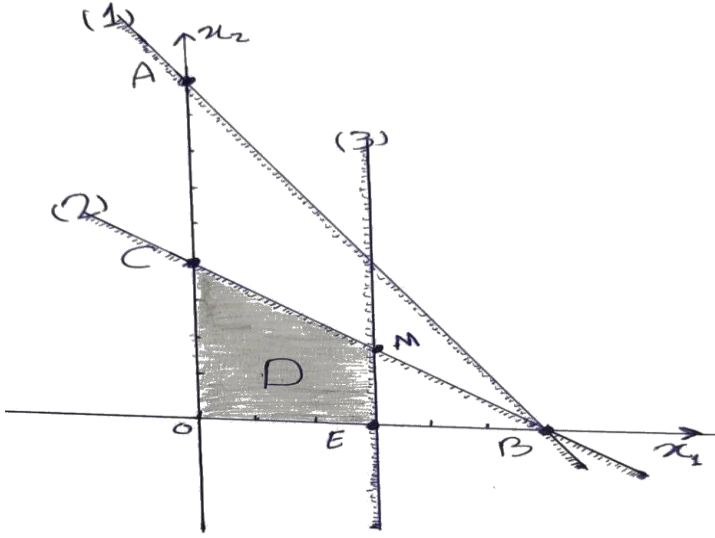
القيود الثالث:

$$5x_1 = 15 \Rightarrow x_1 = 3$$

نحصل على النقطة الخامسة $E(3,0)$.

نحدد منطقة حل متراجحة القيود الثالث كما فعلنا في القيد الأول.

الشكل رقم (1) هو التمثيل البياني المطلوب:



شكل رقم (1) التمثيل البياني لقيود النموذج الخطي في المثال 1

بعد تمثيل القيود نلاحظ أن منطقة الحل المشتركة محصورة بالمضلع الذي رؤوسه النقاط $O(0,0)$ و $E(3,0)$ و $M(?,?)$ و $C(0,4)$ ، النقطة $M(?,?)$ هي نقطة تقاطع القيد الثاني والثالث نحصل على إحداثياتها من خلال حل جملة المعادلتين:

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$5x_1 = 15$$

نجد أن إحداثياتها $M(3,2)$.

نعوض إحداثيات نقاط الرؤوس بعبارة تابع الهدف نجد:

$$Z_O = 0$$

$$Z_E \in [12,16]$$

$$Z_M \in [22,32]$$

$$Z_C \in [8,16]$$

أي أن أعظم قيمة للتابع Z تتحقق عند النقطة $M(3,2)$ ، أي يجب على الشركة أن تنتج ثلاث وحدات من المنتج الأول ووحدتين من المنتج الثاني عندها تحقق ربح أعظمي هو:

$$Max Z = Z_M \in [22,32]$$

ملاحظة:

إن عملية التعويض بتابع الهدف بإحداثيات نقاط رؤوس منطقة الحل المشتركة تكون ممكنة عندما يكون عدد النقاط قليلاً حيث نتمكن بسهولة من تعويضها في تابع الهدف والنقطة التي تعطي أفضل قيمة لتابع الهدف تمثل الحل الأمثل، أما عندما يكون لدينا عدداً كبيراً من القيود نحصل على عدد كبير من النقاط الرأسية الواقعة على محيط منطقة الحل المشتركة. في هذه الحالة تصبح طريقة إيجاد إحداثيات هذه النقاط وتعويضها في تابع الهدف عملية صعبة وتحتاج الكثير من الوقت، لذلك نلجأ إلى تمثيل تابع الهدف وتحديد نقطة الحل الأمثل كما ذكرنا سابقاً.

3-3- كيفية الاستفادة من شروط عدم السلبية لإيجاد الحل الأمثل

لبعض النماذج الخطية النيتروسوفيكية باستخدام الطريقة

البيانية:

مثال 2:

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي النيتروسوفيكي:

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + [2,5]x_5 - x_6 + 2x_7 - [10,15] \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 5 \quad (1)$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -11 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 - x_5 = -4 \quad (3)$$

$$x_2 + x_6 = 6 \quad (4)$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_6 + 2x_7 = 8 \quad (5)$$

قيود عدم السلبية:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

الحل:

نلاحظ أن عدد القيود $m = 5$ وعدد المتحولات $n = 7$ أي أن $n - m = 2$ ،

في هذه الحالة وبالاعتماد على قيود عدم السلبية نستطيع إيجاد الحل الأمثل

لنموذج السابق باستخدام الطريقة البيانية وفق الخطوات التالية:

- 1- نقوم بحساب خمسة من المتحولات بدلالة متحولين فقط.
- 2- بما أن متحولات النموذج الخطي تحقق قيود عدم السلبية عندها نحصل من المتحولات التي قمنا بحسابها على خمسة متراجحات من نوع أكبر من أو يساوي.
- 3- نعوض في تابع الهدف عن الخمسة متحولات نحصل على تابع هدف بمتحولين فقط.
- 4- نكتب النموذج الجديد وهو نموذج خطي بمتحولين لذلك يمكن إيجاد الحل الأمثل بيانياً".

نطبق الخطوات السابقة على المثال 2:

نجد:

$$x_3 = 5 - x_1 + x_2 \quad (1)'$$

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 6 \quad (2)'$$

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4 \quad (3)'$$

$$x_6 = 6 - x_2 \quad (4)'$$

$$x_7 = 7 - x_1 + x_2 \quad (5)'$$

نعوض بتابع الهدف نجد:

$$Z = [1,4]x_1 + [3,6]x_2 + [8,25]$$

بما أن $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$ فمن $(1)'$ ، $(2)'$ ، $(3)'$ ، $(4)'$ ، $(5)'$ ،
نحصل على مجموعة القيود:

$$\begin{aligned}5 - x_1 + x_2 &\geq 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + 4 &\geq 0 \\ 6 - x_2 &\geq 0 \\ 7 - x_1 + x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

عندها يصبح النموذج الرياضي الخطي النيتروسوفيكى كما يلي:

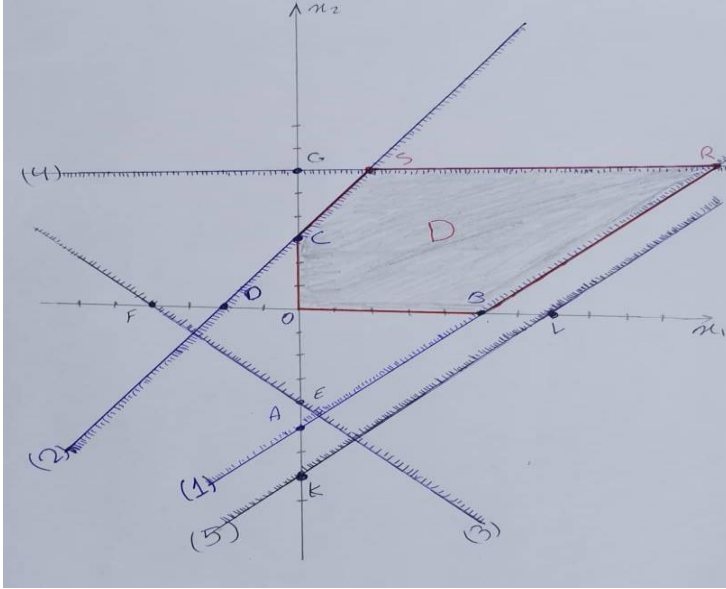
أوجد:

$$Z = [1,4]x_1 + [3,6]x_2 + [8,25] \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$\begin{aligned}5 - x_1 + x_2 &\geq 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + 4 &\geq 0 \\ 6 - x_2 &\geq 0 \\ 7 - x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

النموذج بمتحولين لذلك يمكن إيجاد الحل الأمثل له بيانياً" بإتباع نفس الخطوات الواردة في المثال رقم (1) نحصل على التمثيل الموجود في الشكل رقم (2):



شكل رقم (2) التمثيل البياني لقيود النموذج الخطي في المثال 2

المنطقة D هي منطقة الحلول المشتركة ومحددة بالمضلع $OBRSC$ حيث
 إحداثياتها مجهولة R, S ، بالنسبة للنقطتين $C(0,3)$ ، $B(5,0)$ ، $O(0,0)$
 نجدها كما يلي:

النقطة R هي نقطة تقاطع القيدين الأول والرابع نحصل على إحداثياتها بحل جملة
 المعادلتين:

$$5 - x_1 + x_2 = 0$$

$$6 - x_2 = 0$$

نجد $R(11,6)$.

النقطة S هي نقطة تقاطع القيدين الثاني والرابع ونحصل على إحداثياتها بحل
 جملة المعادلتين:

$$3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$$

$$6 - x_2 = 0$$

نجد $S(2,6)$.

بما أن الحل الأمثل يتوضع في نقطة من نقاط رؤوس منطقة الحل المشتركة لذلك نعوض إحداثيات هذه النقاط بتابع الهدف نجد:

عند النقطة $O(0,0)$

$$Z_O = 0$$

عند النقطة $B(5,0)$

$$Z_B = [13,45]$$

عند النقطة $R(11,6)$

$$Z_R \in [37,105]$$

عند النقطة $S(2,6)$

$$Z_S \in [28,69]$$

عند النقطة $C(0,3)$

$$Z_C \in [17,43]$$

أعظم قيمة لتابع الهدف عند النقطة $R(11,6)$ ، أي أن $x_1 = 11$ و $x_2 = 6$

نحسب قيم باقي المتحولات بالتعويض $(1)'$ ، $(2)'$ ، $(3)'$ ، $(4)'$ ، $(5)'$

نجد:

$$x_3 = 0 , x_4 = 27 , x_5 = 21 , x_6 = 0 , x_7 = 2$$

نعوض في تابع الهدف للنموذج الأصلي نحصل على القيمة العظمى للتابع Z وهي:

$$\text{Max}Z \in [68,126]$$

ملاحظات هامة:

- 1- إن الحل البياني ينطبق على نقطة راسية في الفضاء R^n .
- 2- إن عدداً من مركبات الحل المثالي يكون معدوماً وذلك لأن الحل المثالي ينطبق على نقطة رأسية والنقطة الرأسية هي نتيجة تقاطع عدد من المستقيمات أو المستويات وإن عدد المركبات المعدومة هي $n - m$ مركبة على الأقل.
- 3- قد يتضمن النموذج بعض الشروط التي لا تلعب دوراً في عملية الحل.
- 4- قد يكون الحل المثالي نقطة وحيدة وقد يكون عدد لانتهائي من النقاط وذلك عندما يكون أحد أضلاع منطقة الحل المشتركة والمار بنقطة الحل المثالي موازياً للمستقيم $Z = 0$ وعليه عند سحب المستقيم الممثل لتابع الهدف سينطبق هذا المستقيم على الضلع الموازي وتكون جميع نقاط ذلك الضلع والتي عددها لانتهائي هي حلول مثالية.
- 5- إذا كانت منطقة الحلول المقبولة مفتوحة من جهة تزايد التابع Z فإننا لا نستطيع التوقف عند حل مثالي محدد، وعندها نقول إن لتابع الهدف عدداً لانتهائي من الحلول المقبولة التي تعطينا قيماً لـ Z أكبر فأكبر.
- 6- حالة عدم وجود حل مثالي (حل مقبول) وذلك عندما تكون الشروط متناقضة بعضها مع بعض وعندها تكون منطقة الإمكانات مجموعة خالية (المسألة مستحيلة الحل).

الخاتمة:

قدمنا في هذا الفصل الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيقية، وأيضاً الطريقة التي نادراً ما يتم عرضها في مراجع بحوث العمليات الكلاسيكية، وهي كيفية الاستفادة من قيود عدم السلبية لإيجاد الحل الأمثل بيانياً لبعض النماذج الخطية النيتروسوفيقية، ولكن يجب أن ندرك أننا قد نواجه نماذج خطية نيتروسوفيقية ذات متغيرين، ولكن قد تكون هناك صعوبة في تحديد منطقة الحل المشتركة، أو قد تكون هناك صعوبة في تحديد الحل الأمثل بعد تحديد منطقة الحل المشتركة، لذلك يفضل استخدام طريقة السيمبلكس النيتروسوفيقية، و بما أن الهدف الأساسي هو الحصول على الحل الأمثل، لذلك يجب على الباحث تحديد الطريقة المناسبة للنموذج يريد حله.

الفصل الرابع

خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيقية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

مقدمة.

4-1- استخدام طريقة السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية
النيتروسوفيقية الموضوعة بالصيغة المتناظرة ومن نوع Max .

الخاتمة.

الفصل الرابع

خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيقية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

المقدمة:

تعد البرمجة الخطية الأسلوب المساعد على حسن انتقاء القرارات وإقرار البرنامج الأفضل للفعاليات المستقلة مع الأخذ بعين الاعتبار: المصادر المتاحة ، تستخدم البرمجة الخطية في حل المسائل التي يكون الهدف فيها محدد مثل تأمين ربح أعظمي أو تأمين تكلفة أصغرية أو توفير أعظمي بالوقت أو الجهد ----الخ ، مع الإشارة إلى: أن مسألة البرمجة الخطية المؤلفة من تابع خطي ومعرفة على مجموعة من المتراجحات أو المعادلات (القيود) تتميز بوجود عدد كبير من الحلول غير السالبة المقبولة ويكون المطلوب هو إيجاد الحل الأمثل من بين هذه الحلول للوصول إلى هذا الحل نعتمد على المعلومات التي قدمناها في الفصل الأول عندما درسنا الحلول غير السالبة لجملة المعادلات الخطية النيتروسوفيقية عندها استخدمنا طريقة السيمبلكس التي تعد الأساس الرياضي لخوارزمية السيمبلكس المباشرة المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية التي سنقوم بعرضها في هذا الفصل:

خوارزمية السيمبلكس المباشرة لحل النماذج الخطية النيتروسوفيقية:

تتمثل خوارزمية السيمبلكس المباشرة في ثلاث مراحل:

a. مرحلة تحويل النموذج المفروض إلى الشكل النظامي المكافئ له.

b. مرحلة تحويل الشكل النظامي إلى الشكل القاعدي للحصول على الحل القاعدية غير السالبة.

c. مرحلة البحث عن الحل الأمثل المطلوب من بين الحلول القاعدية غير السالبة.

سنقوم في هذا الفصل باستخدام خوارزمية السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية، التي تم عرضها في الفصل الثاني من هذا الكتاب وهنا نميز الحالات التالية:

1- النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة المتناظرة ومن النوع $.Max$

2- النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة المتناظرة ومن نوع $.Min$

3- النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة العامة.

4-1- استخدام طريقة السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل
للنماذج الخطية النيتروسوفيكية الموضوعة بالصيغة المتناظرة

ومن نوع Max :

يكتب النموذج الخطي النيتروسوفيكي من نوع Max بالصيغة المتناظرة كما مر
معنا في الفصل الثاني بالشكل:

أوجد:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n \leq Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n \leq Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n \leq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

تتم الدراسة وفق الخطوات التالية:

1. نكتب النموذج بالصيغة القياسية نحصل على الشكل:

أوجد:

$$Max NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n + 0.y_1 + 0.y_2 + \dots + 0.y_m$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n + y_1 = Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n + y_2 = Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n + y_m = Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$$

2. نحول النموذج إلى الشكل القاعدي هنا نلاحظ أن المتحولات الإضافية

تصلح أن تكون قاعدة أولية ننطلق منها في البحث عن الحل الأمثل لذلك

نقوم بترتيب معلومات النموذج في الجدول:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_1	...	y_m	الكميات المتوفرة
y_1	Na_{11}	Na_{12}	Na_{1n}	1	0	...	0	Nb_1
y_2	Na_{21}	Na_{22}	...	Na_{2n}	0	1	...	0	Nb_2
.....
y_m	Na_{m1}	Na_{m2}	...	Na_{mn}	0	0	...	1	Nb_m
تابع الهدف	Nc_1	Nc_2	...	Nc_n	0	0	0	0	$Z - 0$

جدول رقم (1) المعلومات الأساسية للنموذج

لدينا قاعدة أولى مؤلفة من المتحولات y_1, y_2, \dots, y_m عندها تكون المتحولات

x_1, x_2, \dots, x_n متحولات غير قاعدية ومنتقل إلى الخطوة التالية:

3. نقوم بتحديد المتحول المناسب من المعادلات وإدخاله في القاعدة عن

طريق دراسة أمثال المتحولات في سطر تابع الهدف Z بما أن تابع الهدف

تابع تعظيم نختار أكبر القيم الموجبة في سطر تابع الهدف بتعبير آخر
نأخذ:

$$Max(Nc_1, Nc_2, \dots, Nc_n) = Nc_s$$

وليكن مثلا Nc_s المقابل للمتحول x_s بذلك نكون قد حددنا عمود الارتكاز، هذا يعني أن المتحول x_s سيدخل إلى القاعدة لتحديد المتحول الذي سيخرج من القاعدة وبالتالي سطر الارتكاز نحسب المؤشر:

$$\theta \in Min \left[\frac{Nb_i}{Na_{is}} \right] = \frac{b_{tN}}{Na_{ts}} > 0; \quad Na_{is} > 0, Nb_i > 0$$

ويكون العنصر الذي يقع عند تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز هو عنصر الارتكاز.

- نقوم بتقسيم سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز نحصل على:

$$\frac{Na_{t1}}{Na_{ts}}, \frac{Na_{t2}}{Na_{ts}}, \dots, \frac{Na_{ts-1}}{Na_{ts}}, 1, \frac{Na_{ts+1}}{Na_{ts}}, \dots, \frac{Na_{tn}}{Na_{ts}}, \dots, \frac{Nb_t}{Na_{ts}}$$

- نجعل عناصر عمود الارتكاز جميعها أصفار ماعدا عنصر الارتكاز يكون مساوي للواحد.

- نجري الحسابات المناسبة لحساب عناصر الجدول الجديد وذلك باستخدام العلاقات:

$$Na'_{ij} = Na_{ij} - Na_{tj} \frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Na_{ij}Na_{ts} - Na_{tj}Na_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nb'_i = Nb_i - Nb_t \frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Nb_iNa_{ts} - Nb_tNa_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nc'_j = Nc_j - Nc_s \frac{Na_{tj}}{Na_{ts}} = \frac{Nc_j Na_{ts} - Nc_s Na_{tj}}{Na_{ts}}$$

نحصل على الجدول:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	...	x_{s-1}	x_s	...	x_n	y_1	y_1	...	y_m	الكميات المتوفرة
y_1	Na'_1	Na'_1	...	Na'_{1s}	0	...	Na'_1	1	0	...	0	Nb'_1
y_2	Na_2	Na_2	...	Na'_{2s}	0	...	Na_2	0	1	...	0	Nb'_2
...	0
x_s	$\frac{Na_{t1}}{Na_{ts}}$	$\frac{Na_{t2}}{Na_{ts}}$...	$\frac{Na_{ts}}{Na_{ts}}$	1	...	$\frac{Na_{tn}}{Na_{ts}}$	0	0	...	0	$\frac{Nb_t}{Na_{ts}}$
...	0
y_m	Na_m	Na_m	...	Na'_m	0	...	Na_m	0	0	...	1	Nb'_m
تابع الهدف	Nc'_1	Nc'_2	...	Nc'_s	0	...	Nc'_n	0	0	0	0	NZ'

جدول رقم (2) الخطوة الأولى في خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية

- نطبق معيار توقف خوارزمية السيمبلكس على سطر تابع الهدف في

الجدول رقم (2).

معيار التوقف: بما أن تابع الهدف من نوع تعظيم يجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول لا يحوي أي قيمة موجبة، (أما إذا كان تابع الهدف من نوع تقليل فيجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول الجديد لا يحوي أي قيمة سالبة)، في حال عدم تحقق المعيار نعود إلى الخطوة رقم (3) ونكرر نفس الخطوات حتى يتحقق معيار التوقف ونحصل على الحل الأمثل المطلوب. وبذلك

نحصل على حلول قاعدية جديدة نيتروسوفيقية غير سالبة وحلول غير قاعدية (حرة) مساوية للصفر ويكتب الحل الأمثل بالشكل:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_m, 0, 0, \dots, 0)$$

الجدول التالي يمثل الحل النهائي في حال كانت الحلول القاعدية هي (x_1, x_2, \dots, x_m)

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	y_1	y_2	...	y_m	الكميات المتوفرة
x_1	1	0	...	0	Na'_{1m+1}	...	Na'_{1n}	$N\beta_{11}$	$N\beta_{11}$...	$N\beta_{1m}$	Nb'_1
x_2	0	1	...	0	Na'_{2m+1}	...	Na_{2n}	$N\beta_{21}$	$N\beta_{22}$...	$N\beta_{2m}$	Nb'_2
...	0	0
x_m	0	0	...	1	$Na'_{m,m+1}$...	Na_{mn}	$N\beta_{m1}$	$N\beta_{m2}$...	$N\beta_{mm}$	Nb'_m
تابع الهدف	0	0	...	0	Nc'_{m+1}	...	Nc'_n	Nq_1	Nq_2	...	Nq_m	NZ'

جدول رقم (3) الحل النهائي في خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيقية

حيث $N\beta_{ii}$ و Nq_i هي أمثال المتحولات الإضافية في القيود وفي تابع الهدف بعد إجراء العمليات المتكررة السابقة الذكر ويكون الحل الأمثل هو:

$$x_1 = Nb'_1, x_2 = Nb'_2, \dots, x_m = Nb'_m$$

الذي يعطي القيمة العظمى لتابع الهدف:

$$NZ' = Nc_1Nb'_1 + Nc_2Nb'_2 + \dots + Nc_mNb'_m$$

نوضح ما سبق من خلال المثال:

مثال 1:

بيانات المسألة قيم كلاسيكية:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A, B بإستخدام أربع مواد أولية F_1, F_2, F_3, F_4 ،
إن المقادير اللازمة من كل من هذه المواد لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج من
المنتجين A, B والكميات المتوفرة من المواد الأولية والربح العائد من الوحدة الواحدة
من كلا المنتجين موضحة بالجدول:

المنتجات المواد الأولية	الكميات اللازمة للوحدة الواحدة		الكميات المتوفرة من المواد الأولية
	A	B	
F_1	2	3	19
F_2	2	1	13
F_3	0	3	15
F_4	3	0	18
الربح العائد من الوحدة الواحدة	7	5	

جدول رقم (4) البيانات الكلاسيكية للمسألة

المطلوب:

إيجاد الخطة الإنتاجية المثلى التي تجعل ربح الشركة من المنتجين A, B أكبر ما
يمكن.

نرمز للكميات المنتجة من المنتج A بالرمز x_1 ومن المنتج B بالرمز x_2 ، بعد
بناء النموذج الرياضي المناسب وبحله توصلنا إلى أن $x_1 = 5$ و $x_2 = 3$ وعليه
يكون الربح الأعظمي $MaxZ = 50$ وحدة نقدية.

بيانات المسألة قيم نيتروسوفيقية:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A, B بإستخدام أربع مواد أولية F_1, F_2, F_3, F_4 ، إن المقادير اللازمة من كل من هذه المواد لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجين A, B والكميات المتوفرة من المواد الأولية والربح العائد من الوحدة الواحدة من كلا المنتجين موضحة بالجدول:

المنتجات المواد الأولية	الكميات اللازمة للوحدة الواحدة		الكميات المتوفرة من المواد الأولية
	A	B	
F_1	2	3	[14,20]
F_2	2	1	[10,16]
F_3	0	3	[12,18]
F_4	3	0	[15,21]
الربح العائد من الوحدة الواحدة	[5,8]	[3,6]	

جدول رقم (5) البيانات النيتروسوفيقية للمسألة

المطلوب:

إيجاد الخطة الإنتاجية المثلى التي تجعل ربح الشركة من المنتجين A, B أكبر ما يمكن.

نرمز للكميات المنتجة من المنتج A بالرمز x_1 ومن المنتج B بالرمز x_2 ، نقوم ببناء النموذج الرياضي المناسب نحصل على:

$$NZ \in [5,8] x_1 + [3,6] x_2 \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$2x_1 + 3x_2 \leq [14,20]$$

$$2x_1 + x_2 \leq [10,16]$$

$$3x_2 \leq [12,18]$$

$$3x_1 \leq [15,21]$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نحول هذا النموذج إلى الشكل النظامي نحصل على:

$$NZ \in [5,8] x_1 + [3,6] x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$2x_1 + 3x_2 + y_1 = [14,20]$$

$$2x_1 + x_2 + y_2 = [10,16]$$

$$3x_2 + y_3 = [12,18]$$

$$3x_1 + y_4 = [15,21]$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

نرتب المعلومات السابقة في الجدول:

المتحولات القاعدة	x_1	x_1	y_1	y_2	y_3	y_4	الكميات المتوفرة
y_1	2	3	1	0	0	0	[14,20]
y_2	2	1	0	1	0	0	[10,16]
y_3	0	3	0	0	1	0	[12,18]
y_4	3	0	0	0	0	1	[15,21]
تابع الهدف	[5,8]	[3,6]	0	0	0	0	NZ - 0

جدول رقم (6) الخطوة الأولى بطريقة السيمبلكس

نلاحظ أن المتحولات الإضافية تشكل قاعدة أوليه مؤلفة من المتحولات (y_1, y_2, y_3, y_4) عندها نعتبر المتحولات (x_1, x_2) متحولات غير قاعدية ومنتقل إلى الخطوة التالية:

نقوم بتحديد المتحول المناسب من المعادلات وإدخاله في القاعدة عن طريق دراسة أمثال المتحولات الداخلة في عبارة تابع الهدف NZ بما أن تابع الهدف تابع تعظيم نختار المتحول الذي له أكبر أمثال موجبة من السطر الأخير في الجدول أي من سطر تابع الهدف بتعبير آخر نأخذ:

$$Max([5,8], [3,6]) = [5,8]$$

المقابل للمتحول x_1 بذلك نكون قد حددنا عمود الارتكاز لتحديد سطر الارتكاز أي المتحول الذي سيخرج من القاعدة نحسب المؤشر:

$$\theta \in Min \left[\frac{[14,20]}{2}, \frac{[10,16]}{2}, \frac{[15,21]}{3} \right] = \frac{[15,21]}{3} = [5,7]$$

نكون بذلك قد حددنا سطر الارتكاز وهو السطر المقابل للمتحول y_4 ويكون العنصر الذي يقع عند تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز أي 3 هو عنصر الارتكاز، أولاً نقوم بتقسيم سطر الدوران على 3 نحصل على:

$$\frac{3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ [15,21]}{3 \ 3' \ 3' \ 3' \ 3' \ 3'} = [5,7]$$

ثم نجعل عناصر عمود الارتكاز جميعها أصفار ماعدا عنصر الارتكاز يكون مساوي للواحد، نجري الحسابات المناسبة وذلك باستخدام العلاقات:

$$Na'_{ij} = Na_{ij} - Na_{tj} \frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Na_{ij}Na_{ts} - Na_{tj}Na_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nb'_i = Nb_i - Nb_t \frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Nb_i Na_{ts} - Nb_t Na_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nc'_j = Nc_j - Nc_s \frac{Na_{tj}}{Na_{ts}} = \frac{Nc_j Na_{ts} - Nc_s Na_{tj}}{Na_{ts}}$$

نحصل على الجدول:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	الكميات المتوفرة
y_1	0	3	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	[4,6]
y_2	0	1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	[0,4]
y_3	0	3	0	0	1	0	[12,18]
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	[5,7]
تابع الهدف	0	[3,6]	0	0	0	$[\frac{-8}{3}, \frac{-5}{3}]$	NZ - [25,56]

جدول رقم (7) الخطوة الثانية بطريقة السيمبلكس

ندرس سطر تابع الهدف نلاحظ أنه لا يزال هناك قيمة موجبة مقابلة للمتحول x_2 هذا يعني أن المتحول x_2 سيدخل إلى القاعدة ولتحديد المتحول الذي سيخرج من القاعدة نحسب المؤشر:

$$\theta \in \text{Min} \left[\frac{[4,6]}{3}, \frac{[0,4]}{1}, \frac{[12,18]}{3} \right] = \frac{[4,6]}{3} = \left[\frac{4}{3}, 2 \right]$$

وهذا مقابل للمتحول y_1 وبما أن أمثال x_2 في هذا السطر تساوي 3 نقسم السطر الأول على 3، ونقوم بالحسابات اللازمة نحصل على الجدول:

النماذج الخطية النيرة وسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	الكميات المتوفرة
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{9}$	$[\frac{4}{3}, 2]$
y_2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{4}{9}$	$[\frac{-4}{3}, 2]$
y_3	0	0	-1	0	1	$\frac{2}{3}$	[8,12]
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	[5,7]
تابع الهدف	0	0	[-2, -1]	0	0	$[\frac{-6}{9}, -1]$	NZ - [29,68]

جدول رقم (8) الحل النهائي

نلاحظ أنه في سطر تابع الهدف جميع القيم إما أصفار أو أعداد نتروسوفيكية سالبة، هذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل وهو:

$$x_1^* \in [5,7], x_2^* \in [\frac{4}{3}, 2], y_2^* \in [\frac{-4}{3}, 2],$$

$$y_3^* \in [8,12], y_1^* = y_4^* = 0$$

نعوض الحل الأمثل بتابع الهدف نجد:

$$\text{Max NZ} \in [5,8] \cdot [5,7] + [3,6] \cdot [\frac{4}{3}, 2] = [25,56] + [4,12] = [29,68]$$

نفس النتيجة الموجودة في الجدول.

نعوض الحل الأمثل بالقيود نجد:

$$2[5,7] + 3\left[\frac{4}{3}, 2\right] + 0 = [14,20]$$

$$2[5,7] + \left[\frac{4}{3}, 2\right] + \left[\frac{-4}{3}, 2\right] = [10,16]$$

$$3\left[\frac{4}{3}, 2\right] + [8,12] = [12,18]$$

$$3[5,7] + 0 = [15,21]$$

نلاحظ أن الحل الأمثل يحقق جميع القيود.

نلخص النتائج السابقة في الجدول:

البيانات كلاسيكية								
بيانات المسألة						النتائج		
c_1	c_2	b_1	b_2	b_3	b_4	x_1	x_2	$Max Z$
7	5	19	13	15	18	5	3	50
البيانات النيتروسوفيقية								
بيانات المسألة						النتائج		
c_{1N}	c_{2N}	b_{1N}	b_{2N}	b_{3N}	b_{4N}	x_{1N}	x_{2N}	$Max NZ$
[5,8]	[3,6]	[14,20]	[10,16]	[12,18]	[15,21]	[5,7]	$\left[\frac{4}{3}, 2\right]$	[29,68]

جدول رقم (9) المقارنة بين نتائج حل المسألة والبيانات كلاسيكية والبيانات نيتروسوفيقية

2 - النماذج الخطية النيتروسوفيقية موضوعة بالصيغة المتناظرة ومن نوع Min .

يكتب النموذج الخطي النيتروسوفيكى من نوع Min بالصيغة المتناظرة كما مر

معنا في الفصل الثاني بالشكل:

أوجد:

$$NL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n \geq Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n \geq Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n \geq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

نستطيع البحث عن الحل الأمثل بإتباع إحدى الطرق التالية:

- يمكن إيجاد الحل الأمثل للنموذج الخطي السابق بأن نحول تابع الهدف إلى تابع من نوع تعظيم كما مر معنا في الفصل الثاني وذلك بضرب سطر تابع الهدف بـ (-1)، ثم نقوم بكتابة النموذج بالصيغة القياسية، هنا نلاحظ أنه لا يوجد قاعدة أولية جاهزة لأن المتحولات الإضافية جميعها مسبقة بإشارة ناقص، أي يجب أن نبحت أولاً عن حل أولي ثم نقوم بتحسين هذا الحل إلى أن نصل إلى الحل الأمثل وذلك بإتباع نفس الخطوات السابقة.
- نستطيع أيضاً إيجاد النموذج المرافق وبالتأكيد سيكون متناظر من نوع تعظيم ثم نقوم بإيجاد الحل الأمثل له كما فعلنا سابقاً أو باستخدام الخوارزمية المزدوجة لحل النموذج والنموذج المرافق التي سنعرضها في الفصل السابع من هذا الكتاب.
- يفضل في مثل هذه النماذج استخدام خوارزمية السيمبلكس الاصطناعية التي سيتم عرضها في الفصل السادس من هذا الكتاب.
- أيضاً يمكننا أن نجد الحل بدون إجراء أي تغيير في تابع الهدف ولكن نقوم بتعديل واحد على الخطوات السابقة الذكر وهو أننا عندما نريد تحديد عمود

الارتكاز نختار العنصر الأكثر سالبية ويكون عموده هو عمود الارتكاز ونتابع الحل كما مر معنا، ويكون معيار التوقف هنا هو أن تكون جميع عناصر سطر تابع الهدف إما موجبة أو صفر.

3 - النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة العامة:

يكتب النموذج الخطي النيتروسوفيكي بالصيغة العامة:

أوجد:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n \rightarrow (Max \text{ or } Min)$$

ضمن القيود:

$$Na_{i1}x_1 + Na_{i2}x_2 + \dots + Na_{in}x_n \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} Nb_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

كخطوة أولى نقوم بكتابة النموذج بالصيغة القياسية، ثم نحول الشكل القياسي إلى الشكل القاعدي عند دراسة الشكل القياسي نلاحظ أن بعض المتحولات الإضافية تصلح أن تكون متحولات قاعدية وبعضها الآخر لا يصلح، أيضا إذا كان هناك بعض القيود من نوع مساويات فإنه لا يوجد مقابلها متحولات إضافية، بالنتيجة لا يوجد قاعدية أولية جاهزة ونحن بحاجة إلى بناء قاعدة أولية ننطلق منها في البحث عن الحل الأمثل، هنا يفضل استخدام السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية التي سيتم عرضها في الفصل السادس من هذا الكتاب.

ملاحظات هامة:

في الجدول النهائي للنموذج من نوع تعظيم إذا كانت بعض الأمثال المقابلة للمتحولات الحرة في سطر تابع الهدف موجبة هذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل الأمثل المطلوب، وعلينا في هذه الحالة أن نحذف المتحولات الحرة المقابلة للقيمة الموجبة نعود إلى الخطوة (2) ونجري اللازم، نكرر هذه العمليات حتى نحصل على سطر تابع هدف لا يحوي إلا الأصفار أو أعداد سالبة (موجبة) حسب نوع تابع الهدف. أو نتوصل إلى إحدى الحالات التالية:

(a) لا يوجد حل مثالي لأن منطقة الطول مفتوحة باتجاه تزايد التابع NZ ، ونستدل على ذلك من عدم وجود عنصر موجب في عمود الارتكاز.

(b) يوجد عدد لانتهائي من الحلول المثلى وذلك كون مستقيمات أو مستويات تابع الهدف NZ موازية لأحد أضلاع أو سطوح منطقة الحل المشتركة، نستدل على ذلك من ظهور صفر في السطر الأخير مقابل لأحد المتحولات الحرة في جدول الحل الأمثل الأخير، عندها يمكننا الحصول على حل أمثل آخر بتبديل المتحول بأحد المتحولات القاعدية، ونتيجة لذلك سنحصل على حل قاعدي آخر.

(c) حالة عدم وجود أي حل أمثل يحدث ذلك بسبب تعارض القيود بعضها مع بعض، ونستدل على ذلك من عدم وجود أي عنصر موجب عدا الثابت Nb_i في أحد الأسطر هذا يعني أن الطرف الأيمن يأخذ قيمة سالبة بينما الطرف الأيسر يأخذ قيمة موجبة وهذا لا يحدث إلا عند تعارض القيود.

(d) بعد الحصول على الحل الأمثل علينا أن نتحقق من أنه يحقق جميع القيود المفروضة ويعطينا القيمة نفسها لتابع الهدف، وذلك من خلال التعويض بتابع الهدف والقيود.

الخاتمة:

نستنتج من الدراسة السابقة والنتائج الموضحة بالجدول (9) أنه عند استخدام البيانات النيتروسوفيقية نحصل على مجالات أي قيم غير محددة وهذا اللاتحديد يكون أكثر دقة ويحاكي الواقع ويراعي معظم التغيرات التي يمكن أن تطرأ على بيئة عمل النظام الذي يمثله النموذج الرياضي الخطي في حين أن القيم التي نحصل عليها عند الحل وفق البيانات الكلاسيكية هي قيم محددة ولا تأخذ بعين الاعتبار التغير الذي يمكن أن يطرأ على بيئة عمل النظام الذي يمثله النموذج الرياضي، وعليه فإن البيانات النيتروسوفيقية توفر لنا دراسة أعم وأشمل من الدراسة باستخدام البيانات الكلاسيكية المعروفة، أي أن العمل باستخدام البيانات الكلاسيكية لم يعد كافياً في الوقت الحالي، لأن تطور العلوم وعدم الاستقرار في وضع بيئة عمل المنشأة وضع أماناً عدداً كبيراً من الحالات التي تحتاج إلى معالجة سريعة ودقيقة لتفادي الخسائر التي يمكن أن تتعرض لها المنشأة، الأمر الذي لا يمكن معالجته باستخدام البيانات الكلاسيكية وهنا يأتي دور البيانات النيتروسوفيقية التي تقدم لنا شمولية أكثر في تفسير النتائج وتساعدنا في الحصول على النتائج الدقيقة المطلوبة، ومن جانب آخر نركز على ضرورة اختيار الخوارزمية المناسبة لحل النموذج قيد الدراسة من بين الخوارزميات التي سنعرضها في هذا الكتاب لتوفير الجهد والوقت في البحث عن الحل الأمثل.

الفصل الخامس

خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيقية المعدلة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

مقدمة.

5-1- خطوات خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيقية.

الخاتمة.

الفصل الخامس

خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية المعدلة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

مقدمة:

نقدم في هذا الفصل خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية التي تم تقديمها لمعالجة الصعوبات التي كنا نواجهها عند تطبيق خوارزمية السيمبلكس المباشرة وهي الكم الكبير من العمليات الحسابية المطلوب القيام بها في كل خطوة من خطوات الحل الأمر الذي يحتاج إلى الكثير من الوقت والجهد.

5-1- خطوات خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية:

نوضح خطوات خوارزمية السيمبلكس المعدلة من خلال النموذج الرياضي الخطي النيتروسوفيكي:

$$Max Z = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq Nb_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq Nb_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \leq Nb_3$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

لإيجاد الحل الأمثل لهذا النموذج الخطي النيتروسوفيكي باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة:

البيانات الخطية التي تدرس في خوارزميات الإيجاد الحل الأمثل لها

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	x_s	x_n	Nb_i
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{1s}	a_{1n}	Nb_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{2s}	a_{2n}	Nb_2
.....
y_t	a_{t1}	a_{t2}	a_{ts}	a_{tn}	Nb_t
.....
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{ms}	a_{mn}	Nb_m
NZ	Nc_1	Nc_2	Nc_s	Nc_n	NZ $- Nc_o$

جدول رقم (1) جدول عنصر الارتكاز

3- نقوم بحساب العناصر الجديدة المقابلة لسطر الارتكاز وعمود الارتكاز وفق الخطوات التالية:

a. نضع مقابل عنصر الارتكاز a_{ts} مقلوبه $\frac{1}{a_{ts}}$

b. نحسب عناصر السطر المقابل لسطر الارتكاز (ما عدا عنصر سطر

الارتكاز) بتقسيم عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز a_{ts}

c. نحسب جميع عناصر العمود المقابل لعمود الارتكاز (ما عدا عنصر

الارتكاز) بتقسيم عناصر عمود الارتكاز على عنصر الارتكاز a_{ts} ثم

ضربها بـ (-1).

d. نقوم بحساب العناصر الأخرى من العلاقات:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{tj} \frac{a_{is}}{a_{ts}} = \frac{a_{ij}a_{ts} - a_{tj}a_{is}}{a_{ts}}$$

$$Nb'_i = Nb_i - Nb_t \frac{a_{is}}{a_{ts}} = \frac{Nb_i a_{ts} - Nb_t a_{is}}{a_{ts}}$$

$$Nc'_j = Nc_j - Nc_s \frac{a_{tj}}{a_{ts}} = \frac{Nc_j a_{ts} - Nc_s a_{tj}}{a_{ts}}$$

نحصل على الجدول التالي:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	...	y_t	...	x_n	Nb'_i
y_1	a'_{11}	a'_{12}	...	$\frac{-a_{1s}}{a_{ts}}$...	a'_{1n}	Nb'_1
y_2	a'_{21}	a'_{22}	...	$\frac{-a_{2s}}{a_{ts}}$...	a'_{2n}	Nb'_2
...
x_s	$\frac{a_{t1}}{a_{ts}}$	$\frac{a_{t2}}{a_{ts}}$...	$\frac{1}{a_{ts}}$...	$\frac{a_{tn}}{a_{ts}}$	$\frac{Nb_t}{a_{ts}}$
...
y_m	a'_{m1}	a'_{m2}	...	$\frac{-a_{ms}}{a_{ts}}$...	a'_{mn}	Nb'_m
NZ	Nc'_1	Nc'_2	...	$\frac{-Nc_s}{a_{ts}}$...	Nc'_n	$NZ - Nc'_0$

جدول رقم (2) أول مرحلة في البحث عن الحل الأمثل

نطبق معيار توقف خوارزمية السيمبلكس على سطر تابع الهدف في الجدول رقم (2)، بما أن تابع الهدف من نوع تعظيم يجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول لا يحوي أي قيمة موجبة، (أما إذا كان تابع الهدف من نوع تقليل فيجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول الجديد لا يحوي أي قيمة سالبة)، في حال عدم تحقق المعيار نعود إلى الخطوة رقم (3) ونكرر نفس الخطوات حتى يتحقق معيار التوقف ونحصل على الحل الأمثل المطلوب، نوضح ما سبق من خلال المثال:

مثال:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A, B باستخدام أربع مواد خام F_1, F_2, F_3, F_4 ويبين الجدول الآتي الكميات اللازمة من كل مادة من هذه المواد لإنتاج وحدة واحدة من كل من المنتجين A, B ، والكميات المتوفرة من المواد الأولية، والربح العائد من الوحدة الواحدة من كلا المنتجين:

المنتجات المواد	الكمية المطلوبة للوحدة الواحدة		الكميات المتوفرة
	A	B	
F_1	2	3	[14,20]
F_2	2	1	[10,16]
F_3	0	3	[12,18]
F_4	3	0	[15,21]
الربح للوحدة الواحدة	[5,8]	[3,6]	

جدول رقم (3) بيانات المسألة

المطلوب:

إيجاد الخطة الإنتاجية المثلى التي تجعل أرباح الشركة من المنتجين A, B أعظم ما يمكن، نرسم للكمية المنتجة من المنتج A بالرمز x_1 ، ومن المنتج B بالرمز x_2 ، يكتب النموذج الرياضي للمسألة وفق مفاهيم علم النيتروسوفيكي بالشكل التالي:

$$\max Z \in [5,8] x_1 + [3,6] x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq [14,20]$$

$$2x_1 + x_2 \leq [10,16]$$

$$3x_2 \leq [12,18]$$

$$3x_1 \leq [15,21]$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

نطبق خوارزمية السيمبلكس المعدلة:

1- الصيغة القياسية للنموذج الخطي السابق هي:

$$\max Z \in [5,8] x_1 + [3,6] x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4$$

$$2x_1 + 3x_2 + y_1 = [14,20]$$

$$2x_1 + x_2 + y_2 = [10,16]$$

$$3x_2 + y_3 = [12,18]$$

$$3x_1 + y_4 = [15,21]$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

2- ننظم المعلومات السابقة بجدول السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيقية:

القاعدة \ المتحولات	x_1	x_2	b_i
y_1	2	3	[14,20]
y_2	2	1	[10,16]
y_3	0	3	[12,18]
y_4	3	0	[15,21]
تابع الهدف	[5,8]	[3,6]	$Z - 0$

جدول رقم (4) جدول السيمبلكس وفق خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيقية

من الواضح أن $\max([5,8], [3,6]) = [5,8]$ مقابل العمود x_1 ، أي أن عمود

المتحول x_1 هو عمود الارتكاز، وهذا يعني أنه يجب ادخال المتغير x_1 إلى

القاعدة بدلاً من أحد المتغيرات القاعدية، لتحديد المتغير القاعدي الذي يجب

إخراجه، نقوم بحساب المؤشر θ :

$$\theta \in \min \left[\frac{[14,20]}{2}, \frac{[10,16]}{2}, \frac{[15,21]}{3} \right] = \frac{[15,21]}{3} = [5,7]$$

النماذج الخطية النيتروسوفيكية وخوارزميات الإيجاد الحل الأمثل لها

وهو مقابل للمتغير y_1 ، عندها يكون عنصر الارتكاز يساوي 3، نقسم سطر y_1 على 3، ونقوم بالحسابات اللازمة لعناصر الجدول الجديد نحصل على الجدول:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	b'_i
x_2	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$[\frac{4}{3}, 2]$
y_2	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$[\frac{-4}{3}, 2]$
y_3	$\frac{2}{3}$	-1	$[8,12]$
x_1	1	0	$[5,7]$
تابع الهدف	$[-6, -1]$	$[-2, -1]$	$Z - [29,68]$

جدول رقم (6) جدول الحل النهائي

نطبق معيار توقف الخوارزمية نجد أن المعيار قد تحقق وبالتالي توصلنا إلى الحل الأمثل للنموذج الخطي وهو:

$$x_1^* \in [5,7], x_2^* \in [\frac{4}{3}, 2], y_2^* \in [\frac{-4}{3}, 2],$$

$$y_3^* \in [8,12], y_1^* = y_4^* = 0$$

ويقابل قيمة لتابع الهدف هي:

$$\max Z \in [5,8]. [5,7] + [3,6]. [\frac{4}{3}, 2] = [25,56] + [4,12] = [29,68]$$

واضح من عناصر سطر تابع الهدف أننا توصلنا إلى الحل الأمثل لأن جميع القيم هي قيم نيتروسوفيكية سالبة وبالتالي يكون الحل الأمثل هو:

$$x_1^* \in [5,7], x_2^* \in [\frac{4}{3}, 2], y_2^* \in [\frac{-4}{3}, 2],$$

$$y_3^* \in [8,12], y_1^* = y_4^* = 0$$

النماذج الخطية النيتروسوفيقية وخوارزميات البرمجة الحل الأمثل لها

نعوض هذه القيم في دالة الهدف نجد:

$$\max Z \in [5,8] \cdot [5,7] + [3,6] \cdot \left[\frac{4}{3}, 2\right] = [25,56] + [4,12] = [29,68]$$

هذا يعني أنه يجب على الشركة إنتاج الكمية $x_1^* \in [5,7]$ من المنتج A والكمية

$x_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$ من المنتج B ، بذلك تحقق ربح أعظمي وهو القيمة

النيتروسوفيقية:

$$\max Z \in [29,68]$$

للمقارنة بين طريقة السيمبلكس المعدلة وطريقة السيمبلكس المباشرة قمنا بحل نفس

المثال باستخدام خوارزمية السيمبلكس المباشرة وفيما يلي جداول الحل:

القاعدة \ المتحولات	x_1	x_1	y_1	y_2	y_3	y_4	b_i
y_1	2	3	1	0	0	0	[14,20]
y_2	2	1	0	1	0	0	[10,16]
y_3	0	3	0	0	1	0	[12,18]
y_4	3	0	0	0	0	1	[15,21]
تابع الهدف	[5,8]	[3,6]	0	0	0	0	$Z - 0$

جدول رقم (7) جدول السيمبلكس وفق خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيقية

البيانات الخطية النيتروسوفية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

القاعدة \ المتحولات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	b_i
y_1	0	3	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	[4,6]
y_2	0	1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	[0,4]
y_3	0	3	0	0	1	0	[12,18]
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	[5,7]
تابع الهدف	0	[3,6]	0	0	0	$[\frac{-8}{3}, \frac{-5}{3}]$	$Z - [25,56]$

جدول رقم (8) جدول الخطوة الأولى في البحث عن الحل الأمثل

القاعدة \ المتحولات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	b_i
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{9}$	$[\frac{4}{3}, 2]$
y_2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{4}{9}$	$[\frac{-4}{3}, 2]$
y_3	0	0	-1	0	1	$\frac{2}{3}$	[8,12]
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	[5,7]
تابع الهدف	0	0	[-2, -1]	0	0	$[\frac{-6}{9}, -1]$	$Z - [29,68]$

جدول رقم (9) جدول الحل النهائي

واضح من عناصر سطر تابع الهدف أننا توصلنا إلى الحل الأمثل لأن جميع القيم

هي نيتروسوفية سالبة أو صفر وبالتالي يكون الحل الأمثل هو:

$$x_1^* \in [5,7], x_2^* \in [\frac{4}{3}, 2], y_2^* \in [\frac{-4}{3}, 2],$$

$$y_3^* \in [8,12], y_1^* = y_4^* = 0$$

نعوض هذه القيم في دالة الهدف نجد:

$$\max Z \in [5,8] \cdot [5,7] + [3,6] \cdot \left[\frac{4}{3}, 2\right] = [25,56] + [4,12] = [29,68]$$

هذا يعني أنه يجب على الشركة انتاج الكمية $x_1^* \in [5,7]$ من المنتج A والكمية $x_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$ من المنتج B ، بذلك تحقق ربح أعظمي وهو القيمة النيتروسوفيقية

$$\max Z \in [29,68]$$

الخاتمة:

من الدراسة السابقة نلاحظ أننا حصلنا على نفس الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه عندما استخدمنا طريقة السيمبلكس المباشرة ولكن بعدد من الحسابات أقل بكثير من العدد الذي قمنا به في خوارزمية السيمبلكس المباشرة كما هو واضح من خلال مقارنة جداول الحل باستخدام طريقة السيمبلكس المعدلة جدول رقم (4) وجدول رقم (5) وجدول رقم (6) مع جداول الحل باستخدام طريقة السيمبلكس المباشرة جدول رقم (7) وجدول رقم (8) وجدول رقم (9) ، وعليه اختصارا للوقت والجهد نركز على ضرورة استخدام طريقة السيمبلكس المعدلة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية وخاصة عندما يحوي النموذج على عدد كبير من المتحولات والقيود.

الفصل السادس

إيجاد حل قاعدة للنماذج الخطية باستخدام متحولات اصطناعية

المقدمة.

1-6- خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية.

2-6- معالجة النموذج وجميع القيود من نوع مساويات.

3-6- معالجة النموذج القيود مختلطة.

الخاتمة.

الفصل السادس

إيجاد حل قاعدة للنماذج الخطية باستخدام متحولات اصطناعية

المقدمة:

نقدم في هذا الفصل خوارزمية السيمبلكس بمتحولات اصطناعية نيوتروسوفية، والتي يفضل استخدامها في النماذج الخطية التي لا يوجد فيها قاعدة جاهزة نتمكن من خلالها الحصول على الحل الأمثل لذلك يتم إضافة متحولات اصطناعية إلى القيود عددها يساوي عدد القيود التي لا تحوي متحول قاعدي، وكخطوة أولى في البحث عن الحل الأمثل يجب أن نتخلص من جميع المتحولات الاصطناعية وتحويلها إلى متحولات غير قاعدية حتى تأخذ قيمة الصفر وبذلك لا تؤثر على الحل الأمثل للنموذج الخطي، نوضح ما سبق من خلال الدراسة التالية:

6-1- خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية:

الغاية من حل النماذج الخطية هي اختيار الحل الأمثل من مجموعة الحلول المقبولة ويتم ذلك انطلاقاً من حل قاعدي يتم تحسينه باستخدام خوارزمية السيمبلكس المباشرة التي تتمثل بثلاث مراحل أساسية:

- a. مرحلة تحويل النموذج المفروض إلى شكل نظامي مكافئ له.
- b. مرحلة تحويل الشكل النظامي إلى شكل قاعدي للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة.
- c. مرحلة البحث عن الحل الأمثل المطلوب من بين الحلول القاعدية غير السالبة. وعليه فإن عملية البحث عن الحل الأمثل لا تبدأ إلا بعد الحصول

في النموذج السابق نلاحظ أن عدد المتحولات n وعدد القيود m وهذا النموذج موضوع بالصيغة النظامية.

نتنقل إلى المرحلة الثانية وهي إيجاد حل قاعدي هنا نستخدم خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية التي تتمثل بما يلي:

1- نشكل من الشكل النظامي شكلاً "قاعدياً" اصطناعياً وذلك بأن نضيف إلى الطرف الأيسر لكل معادلة من معادلات القيود متحولاً اصطناعياً غير سالب ε_i بذلك نشكل قاعدة تتألف من المتحولات غير السالبة $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$.

2- بما أن المتحولات الاصطناعية أدخلت على قيود كانت في الأصل معادلات خطية لذلك يجب أن تأخذ هذه المتحولات قيمة الصفر حتى لا تتأثر القيود الخطية.

3- لذلك يجب أن ننقلها جميعاً من القاعدة حتى تصبح متحولات غير قاعدية ولكي نستطيع إجراء هذا الانتقال نستخدم خوارزمية السيمبلكس المباشرة.

4- نقوم بإدخال هذه المتحولات إلى تابع الهدف بأمثال M (حيث M هو عدد موجب كبير بشكل كاف وهو على الأقل أكبر من أي $|NC_j|$) ومسبوقة بإشارة ناقص (لأن تابع الهدف تابع تعظيم) وذلك حتى لا نعيد نقلها إلى المتحولات القاعدية مرة ثانية.

5- نحصل على الشكل القاعدي للنموذج الخطي النيتروسوفيكى:

$$Max Z = NC_1x_1 + NC_2x_2 + \dots + NC_nx_n - M\varepsilon_1 - M\varepsilon_2 - \dots - M\varepsilon_m + NC_0$$

البيانات الخطية الغير وسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1 = Nb_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2 = Nb_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n + \varepsilon_3 = Nb_3$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + \varepsilon_m = Nb_m$$

$$x_j \geq 0, \varepsilon_i > 0, Nb_i > 0; j = 1, 2, \dots, n \text{ and } i = 1, 2, \dots, m$$

6- بعد الحصول على الحل القاعدي نقوم باستخدام خوارزمية السيمبلكس

المباشرة من أجل تحسين هذا الحل للوصول إلى الحل الأمثل لذلك نرتب

المعلومات السابقة في جدول كما يلي:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	...	x_n	ε_1	ε_2	...	ε_m	b_i
ε_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
ε_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	0	0	b_2
...
ε_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m
تابع الهدف	NC_1	NC_2	...	NC_n	$-M$	$-M$...	$-M$	$Z - NC_0$

جدول رقم (1) بيانات عامة للنموذج

7- نقوم بالتخلص من المتحولات الاصطناعية، وهنا ندرس الثوابت b_i المقابلة

للمتحويلات الاصطناعية ونختار أكبرها وليكن b_t المقابل للمتحول ε_t

ونعتبر سطره سطر الارتكاز، ثم نقوم بتحديد عنصر الارتكاز بتقسيم

عناصر سطر تابع الهدف (العناصر NC_j) على عناصر سطر ε_t ثم

نأخذ أصغر النسب الموجبة θ حيث:

$$\theta = \text{Min}_j \left[\frac{NC_j}{a_{tj}} > 0 \right] = \frac{NC_s}{a_{ts}}$$

حيث $a_{tj} > 0$ وعندها يكون عنصر الارتكاز هو العنصر a_{ts} ، ونقوم بتبديل المتحولين x_s و ε_t .

وفق تعليمات خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيقية، نكرر الخطوة (7) حتى نتخلص من جميع المتحولات الاصطناعية ونحصل على قاعدة مؤلفة من المتحولات الأساسية، بعد التخلص من المتحولات الاصطناعية نعود إلى العمل وفق خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيقية .

6-2- معالجة النموذج وجميع القيود من نوع مساويات:

نوضح كيفية إيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية التي جميع قيودها قيود مساويات باستخدام خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية من خلال المثال التالي:

مثال: 1

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = -12x_1 + [6,9]x_2 + 3x_3$$

ضمن القيود:

$$8x_1 - x_2 + 4x_3 = [4,6]$$

$$6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = [-12, -9]$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

1- نحول النموذج إلى الصيغة القياسية نضرب المعادلة الثانية ب (-1) نحصل

على النموذج التالي:

أوجد حل قاعدي للنموذج الخطي النيتروسوفيكى:

$$Max Z = -12x_1 + [6,9]x_2 + 3x_3$$

ضمن القيود:

$$8x_1 - x_2 + 4x_3 = [4,6]$$

$$-6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = [9,12]$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1- نضيف المتحولات الاصطناعية وندخلها إلى تابع الهدف بأمثال كبير M

مسبوقة بإشارة ناقص نأخذ هنا $M = 15$

أوجد حل قاعدي للنموذج الخطي النيتروسوفيكى:

$$Max Z = -12x_1 + [6,9]x_2 + 3x_3 - 15\varepsilon_1 - 15\varepsilon_2$$

ضمن القيود:

$$8x_1 - x_2 + 4x_3 = [4,6]$$

$$-6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = [9,12]$$

$$x_1, x_2, x_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$$

نرتب المعلومات السابقة بالجدول:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	b_i
ε_1	8	-1	4	1	0	[4,6]
ε_2	-6	3	-3	0	1	[9,12]
تابع الهدف	-12	[6,9]	3	-15	-15	$Z - 0$

جدول رقم (2): القاعدة الاصطناعية

بما أن القاعدة اصطناعية، لذلك نقوم بدراسة الثوابت b_i فنجد أكبرها ينتمي إلى المجال $[9,12]$ المقابل للمتحول ε_2 لذلك نقوم بتقسيم سطر تابع الهدف على العناصر الموجبة في سطر ε_2 ونحسب المؤشر θ فنجد:

$$\theta = \text{Min}_j \left[\frac{[6,9]}{3} \right] = \frac{[6,9]}{3}$$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو (3) المقابل لـ x_2 لذلك نقوم بتبديل x_2 بـ ε_2 ، عندها يصبح المتحول x_2 متحولاً قاعدياً ويخرج ε_2 من القاعدة نقوم بإجراء الحسابات اللازمة نحصل على الجدول التالي:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	b_i
ε_1	6	0	3	1	$\frac{1}{3}$	$[7,10]$
x_2	-2	1	-1	0	$\frac{1}{3}$	$[3,4]$
تابع الهدف	$[0,6]$	0	$[9,12]$	-15	$[-18,-17]$	$Z - [18,36]$

جدول رقم (3): جدول التغيير الأول في القاعدة

ندرس عناصر الجدول السابق نلاحظ أنه مازال لدينا متحول اصطناعي هو ε_1 موجود في القاعدة لذلك نجري تبديلاً آخر معتمدين سطر الارتكاز هو السطر المقابل له ومن أجل تحديد عمود الارتكاز نقوم بحساب المؤشر θ نجد:

$$\theta = \text{Min}_j \left[\frac{[0,6]}{6}, \frac{[9,12]}{3} \right] \in \frac{[0,6]}{6}$$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو (6) المقابل لـ x_1 لذلك ننقل x_1 إلى القاعدة بدلا من ε_1 فنحصل على الجدول التالي:

النماذج الخطية البينية وسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	b_i
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{18}$	$[\frac{7}{6}, \frac{10}{6}]$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$[\frac{16}{3}, \frac{22}{3}]$
تابع الهدف	0	0	9	$[-18, -15]$	$[-18, \frac{-50}{3}]$	$Z - [18, 46]$

جدول رقم (4): التغيير الثاني في القاعدة

من الجدول السابق نلاحظ أن متحولات القاعدة x_1, x_2 وبذلك نكون قد حصلنا على حل قاعدي للنموذج الخطي وهو:

$$\left(x_1 \in \left[\frac{7}{6}, \frac{10}{6} \right], x_2 \in \left[\frac{16}{3}, \frac{22}{3} \right], x_3 = 0, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0 \right)$$

ولكن واضح من الجدول أن هذا الحل ليس الحل الأمثل لأنه يوجد في سطر تابع الهدف قيمة موجبة مقابلة للمتحول x_3 لذلك نطبق خوارزمية السيمبلكس المباشرة بتحسين الحل القاعدي نحصل على الحل الأمثل الموضح بالجدول التالي:

المتحولات القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	b_i
x_3	2	0	1	1	$\frac{1}{9}$	$[\frac{7}{3}, \frac{10}{3}]$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$[\frac{16}{3}, \frac{22}{3}]$
تابع الهدف	-18	0	0	$[-27, -24]$	$[-19, \frac{-53}{3}]$	$Z - [39, 76]$

جدول رقم (5): الحل الأمثل للنموذج

الحل الأمثل للنموذج الخطي:

$$x_1 = 0, x_2 \in \left[\frac{16}{3}, \frac{22}{3} \right], x_3 \in \left[\frac{7}{3}, \frac{10}{3} \right], \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$$

عند هذا الحل يأخذ تابع الهدف أعظم قيمة له وهي:

$$Z \in [39,76]$$

يمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض بالقيود وعبارة تابع الهدف.

نلاحظ أن القيم في الحل الأمثل للنموذج الخطي السابق هي قيم نيتروسوفيقية.

6-3- معالجة النموذج القيود مختلطة:

نوضح كيفية إيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية التي قيودها مختلطة باستخدام

خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية من خلال المثال التالي:

مثال 2:

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = -3x_1 + [8,10]x_2 + [0,6]x_3$$

ضمن القيود:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq [3,7]$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq [9,6]$$

$$2x_1 - x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نحول هذا النموذج إلى الصيغة القياسية تصبح المسألة:

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي:

$$\text{Min } Z = -3x_1 + [8,10]x_2 + [0,6]x_3 + 0y_1 + 0y_2$$

ضمن القيود:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + y_1 = [3,7]$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - y_2 = [9,6]$$

$$2x_1 - x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0$$

إن المتحول y_1 في القيد الأول هو متحول قاعدي وبما أنه لا يوجد متحولات قاعدية أخرى فإننا نضيف متحولات اصطناعية إلى القيد الثاني والثالث وندخلها إلى تابع الهدف بأمثال موجبة بالقدر الكافي لأنه نموذج تقليل وبذلك نحصل على الشكل القاعدي التالي:

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي:

$$\text{Min } Z = -3x_1 + [8,10]x_2 + [0,6]x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 12\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2$$

ضمن القيود:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + y_1 = [3,7]$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - y_2 + \varepsilon_1 = [9,6]$$

$$2x_1 - x_3 + \varepsilon_2 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$$

نتبع نفس الخطوات الواردة في المثال 1 لإخراج المتحولات الاصطناعية من القاعدة وإدخال المتحولات الأساسية وبعد الحصول على الحل القاعدي نقوم باستخدام طريقة السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل.

ملاحظات هامة:

- 1- إذا كان سطر ε_i لا يحوي عنصرا " موجبا" وكان $b_t > 0$ فإن ذلك يدل على تعارض القيود وتكون المسألة غير قابلة للحل.
- 2- إذا لم نتمكن من العثور على نسبة موجبة $\frac{NC_j}{a_{tj}}$ فإننا نقوم بحساب أكبر النسب السالبة θ' حيث:

$$\theta' = \text{Max} \left[\frac{NC_j}{a_{tj}} < 0 \right] = \frac{NC_s}{a_{ts}}$$

حيث $a_{tj} > 0$ وبذلك يكون a_{ts} هو عنصر الارتكاز وهو عنصر موجب بالتأكيد.

الخاتمة:

قدمنا من خلال الدراسة السابقة إحدى الطرق الهامة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية وهي طريقة السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية التي نلجأ لها عندما يتعذر علينا إيجاد حل قاعدي، ووجدنا أن الحل الأمثل الذي حصلنا عليه هو عبارة: عن قيم نيتروسوفيكية قيم غير محددة تحديد تام وتنتمي إلى مجال يمثل حده الأدنى أصغر قيمة يمكن أن يأخذها تابع الهدف وحده الأعلى يمثل أعلى قيمة لتابع الهدف الأمر الذي يتناسب مع الظروف المحيطة ببيئة عمل النظام الذي يمكن أن يمثله النموذج الخطي.

الفصل السابع

النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية والخوارزمية المزدوجة

مقدمة.

1-7-1 النماذج المرافقة النيتروسوفيكية.

1-1-7-1 الشكل المصفوفي للنماذج المرافقة النيتروسوفيكية.

1-7-2 إيجاد النماذج المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجدول المزدوج.

1-7-3-1 بناء النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجداول.

1-7-2-2 صياغة الخوارزمية المزدوجة النيتروسوفيكية.

1-7-2-1 خطوات خوارزمية السيمبلكس المزدوجة.

1-7-2-2 خوارزمية السيمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق.

1-7-3-1 التفسير الاقتصادي للنماذج المرافقة.

الخاتمة.

الفصل السابع

النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيقية والخوارزمية المزدوجة

مقدمة:

نواجه في حياتنا العملية الكثير من المسائل التي تصاغ على شكل نماذج رياضية خطية تتألف من تابع هدف ومجموعة من القيود على شكل معادلات أو متراجحات، ويكتب النموذج الخطي بالعديد من الصيغ التي يتم التمييز بينها من خلال نوع تابع الهدف وشكل القيود وتم توضيح صيغ النماذج الخطية في الفصل الثاني من هذا الكتاب، ذكرنا سابقا " أنه لكل صيغة من هذه الصيغ استخدام فمثلا" عندما نريد إيجاد الحل الأمثل للنموذج الخطي يجب علينا أولا" وضعه بالصيغة القياسية ، ونستخدم الصيغة المتناظرة عندما نريد إيجاد النموذج المرافق للنموذج الخطي ، ونذكر بأن حل النموذج الخطي الأصلي يعطي حلا" للنموذج المرافق هذا يعني أنه عند حل نموذج البرمجة الخطية فإننا نحصل فعليا" على حلول لنموذجين خطيين ، نقدم في هذا الفصل دراسة للنماذج المرافقة النيتروسوفيقية وخوارزمية السيمبلكس المزدوجة التي تعمل على إيجاد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق بنفس الوقت تتجلى أهمية هذه الخوارزمية بأنه يتم الاعتماد عليها في عدة مواضيع من بحوث العمليات مثل: خوارزميات البرمجة ذات الأعداد الصحيحة ، بعض خوارزميات البرمجة اللاخطية ، تحليل الحساسية في البرمجة الخطية ...

7-1- النماذج المرافقة النيتروسوفيقية:

7-1-1- الشكل المصفوفي للنماذج المرافقة النيتروسوفيقية:

لإيجاد النموذج المرافق لنموذج خطي نيتروسوفيكى معطى باستخدام المصفوفات نضع النموذج الخطي النيتروسوفيكى بالصيغة المتناظرة وكما وجدنا في الفصل الثاني، يكون النموذج الخطي موضوع بالشكل المتناظر إذا كانت جميع المتحولات مقيدة بأن تكون غير سالبة وإذا أعطيت جميع القيود بشكل متراجحات (ويجب أن تكون متراجحات قيود نموذج التعظيم موضوعة بصيغة (\leq) أقل من أو يساوي) في حين أن متراجحات قيود نموذج التقليل يجب أن تكون بصيغة (\geq) أكبر من أو يساوي)، عندها يكتب النموذج الخطي بالشكل المتناظر النيتروسوفيكى بأحد الحالتين:

الحالة الأولى: النموذج الأصلي متناظر ومن نوع تعظيم

النموذج الأصلي:

أوجد:

$$NZ = NC X \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$NA X \leq NB$$

$$X \geq 0$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ويكون النموذج المرافق:

أوجد:

$$NL = NB Y \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$NA^T Y \geq NC$$

$$Y \geq 0$$

حيث:

$$NA^T = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{21} & \dots & Na_{m1} \\ Na_{12} & Na_{22} & \dots & Na_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{1n} & Na_{2n} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: النموذج متناظر ومن نوع تصغير.

النموذج الأصلي:

أوجد:

$$NZ = NC X \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$NAX \geq NB$$

$$X \geq 0$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} & \dots & Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} & \dots & Na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} & \dots & Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

النموذج المرافق:

أوجد:

$$NL = NB Y \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$NA^T Y \leq NC$$

$$Y \geq 0$$

حيث:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \dots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \dots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$$

نلخص عملية إيجاد النماذج المرافقة النيتروسوفيقية باستخدام المصفوفات بالخطوات التالية:

1. نعرف متحول جديد غير سالب لكل قيد من قيود النموذج الأصلي.
2. نجعل متجه الربح (التكلفة) في النموذج الأصلي متجه عمود الثوابت في النموذج المرافق.
3. نجعل متجه عمود الثوابت في النموذج الأصلي متجه التكلفة (الربح) في النموذج المرافق.
4. نجعل منقول مصفوفة أمثال المتغيرات في القيود في النموذج الأصلي أمثال للمتغيرات في النموذج المرافق.
5. نعكس اتجاه متراجحات القيود.

6. نعكس اتجاه الأمثلة أي نغير الزيادة إلى الحد الأعظمي إلى إنقاص إلى الحد الأصغري والعكس بالعكس.

7-1-2 - إيجاد النماذج المرافقة النيتروسوفيقية باستخدام الجدول المزدوج:

وجدنا سابقاً أننا نستطيع كتابة النماذج الخطية بثلاث أشكال

- الشكل المصفوفي كما هو موضح بالفقرة السابقة.

- الشكل المختصر:

$$NZ = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \rightarrow (Max \text{ or } Min)$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n Na_{ij} x_j \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

- الشكل المفصل:

أوجد:

$$NZ = Nc_1 x_1 + Nc_2 x_2 + \dots + Nc_n x_n \rightarrow (Max \text{ or } Min)$$

ضمن القيود:

$$Na_{i1} x_1 + Na_{i2} x_2 + \dots + Na_{in} x_n \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} Nb_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

لإيجاد النموذج المرافق نضع النموذج الخطي النيتروسوفيكي بالصيغة المتناظرة
وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: النموذج الأصلي متناظر ومن نوع تعظيم

$$NZ = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n Na_{ij} x_j \leq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

الحالة الثانية: النموذج متناظر ومن نوع تصغير

$$NL = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n Na_{ij} x_j \geq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

وفي الحالتين لدينا $x_j \geq 0$ وهي متحولات القرار، قيم مجهولة نحصل عليها
بعد حل النموذج الخطي، أما:

$$Na_{ij} = a_{ij} \pm \mu_{ij} \quad \text{و} \quad Nb_i = b_i \pm \delta_i \quad \text{و} \quad Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$$

حيث: $(j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m)$.

فهي بيانات المسألة قيد الدراسة وهي قيم نيتروسوفيقية قيم غير محددة تتمتع بهامش من الحرية وتأخذ بحسب طبيعة الحالة التي يمثلها النموذج الخطي

7-1-3- بناء النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيقية باستخدام الجداول:

لبناء النماذج الخطية النيتروسوفيقية باستخدام الجداول نرسم جدول مزدوج للنموذجين الأصلي والمرافق وفق الخطوات التالية:

1- معاملات تابع الهدف في النموذج الأصلي هي: عمود الثوابت في النموذج المرافق، وعمود الثوابت في النموذج الأصلي هو: معاملات تابع الهدف في النموذج المرافق.

2- نعكس إشارات متراجحات القيود (إذا كانت في النموذج الأصلي من نوع \leq تصبح في النموذج المرافق من نوع \geq).

3- نغير الهدف من الزيادة إلى الحد الأعظمي في النموذج الأصلي إلى إنقاص إلى الحد الأصغري في النموذج المرافق.

4- نضع كل قيد (سطر) في النموذج الأصلي يوافق عمود في النموذج المرافق أي يوجد متحول واحد لكل قيد في النموذج الأصلي.

5- المتحولات في النموذج الأصلي والنموذج المرافق تحقق قيود عدم السلبية.

نوضح ما سبق من خلال الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: النموذج الأصلي متناظر ومن نوع تعظيم

أوجد:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

النماذج الخطية البينية وسوفيكية وخواصها لإيجاد الحل الأمثل لها

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n \leq Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n \leq Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n \leq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

يكون الجدول المزدوج للنموذج الأصلي والنموذج المرافق كما يلي:

النموذج الأصلي					
		تابع الهدف NZ	$Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n$		Max
		القيود			عمود الثوابت
المحولات المرافقة	y_1	1	$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n$	\leq	Nb_1
	y_2	2	$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n$	\leq	Nb_2
	\leq	...
	y_m	m	$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n$	\leq	Nb_m
			قيود عدم السلبية	x_1, x_2, \dots, x_n	\geq
النموذج المرافق					
		تابع الهدف NL	$Nb_1y_1 + Nb_2y_2 + \dots + Nb_my_m$		Min
		القيود			عمود الثوابت
		1	$Na_{11}y_1 + Na_{21}y_2 + \dots + Na_{m1}y_m$	\geq	Nc_1
		2	$Na_{12}y_1 + Na_{22}y_2 + \dots + Na_{m2}y_m$	\geq	Nc_2
		\geq	...
		n	$Na_{1n}y_1 + Na_{2n}y_2 + \dots + Na_{mn}y_m$	\geq	Nc_n
		قيود عدم السلبية	y_1, y_2, \dots, y_m	\geq	0

جدول رقم (1) تابع الهدف من نوع تعظيم

الحالة الثانية: النموذج الأصلي متناظر ومن نوع تقليل

أوجد:

$$NL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n \geq Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n \geq Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n \geq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

يكون الجدول المزوج للنموذج الأصلي والنموذج المرافق كمايلي:

النموذج الأصلي				
		تابع الهدف NL		Min
		القيود		عمود الثوابت
المحولات المرافقة	y_1	1	$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n$	$\geq Nb_1$
	y_2	2	$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n$	$\geq Nb_2$

	y_m	m	$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n$	$\geq Nb_m$
		قيود عدم السلبية	x_1, x_2, \dots, x_n	≥ 0
النموذج المرافق				
		تابع الهدف NZ		Max
		القيود		عمود الثوابت
		1	$Na_{11}y_1 + Na_{21}y_2 + \dots + Na_{m1}y_m$	$\leq Nc_1$
		2	$Na_{12}y_1 + Na_{22}y_2 + \dots + Na_{m2}y_m$	$\leq Nc_2$
	
		n	$Na_{1n}y_1 + Na_{2n}y_2 + \dots + Na_{mn}y_m$	$\leq Nc_n$
		قيود عدم السلبية	y_1, y_2, \dots, y_m	≥ 0

جدول رقم (2) تابع الهدف في النموذج الأصلي من نوع تقليل

7-2- صياغة الخوارزمية المزدوجة النيتروسوفيكية:

خوارزمية السيمبلكس المزدوجة (للمنوجين الأصلي والمرافق) النيتروسوفيكية، من خلال هذه الخوارزمية نستطيع إيجاد الحلين المثاليين لكل من النموذجين الأصلي والمرافق بأن واحد، وقبل البدء بخوارزمية السيمبلكس المزدوجة لا بد من أن نذكر بخوارزمية السيمبلكس المعدلة الواردة في الفصل الرابع التي سنستخدمها ضمن خطوات الخوارزمية المزدوجة.

خوارزمية السيمبلكس المعدلة:

في خوارزمية السيمبلكس المعدلة وبعد تحويل النموذج الخطي النظامي إلى الشكل القاعدي نضع المعاملات في جدول مختصر يتضمن عموده الأول المتحولات القاعدية وفي سطره الأعلى المتحولات غير القاعدية فقط. نحدد عمود الارتكاز وهو العمود المقابل لأكبر قيمة موجبة في سطر تابع الهدف إذا كان تابع الهدف تابع تعظيم (أما إذا كان تابع الهدف تابع تقليل فهو العمود المقابل لأكثر القيم سالبية) وليكن هذا العمود هو عمود المتحول x_s ، نحدد سطر الارتكاز، يتم تحديد سطر الارتكاز من خلال المؤشر:

$$\theta \in \text{Min} \left[\frac{Nb_i}{Na_{is}} \right] = \frac{Nb_t}{Na_{ts}} > 0; \quad Na_{is} > 0, Nb_i > 0$$

وليكن هذا السطر هو سطر المتحول القاعدي y_t ، عندها يكون عنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من تقاطع عمود الارتكاز وسطر الارتكاز أي a_{ts} ، ثم نقوم بحساب العناصر الجديدة المقابلة لسطر وعمود الارتكاز كما يلي:

$$1- \text{نضع مقابل عنصر الارتكاز } Na_{ts} \text{ مقلوبه } \frac{1}{Na_{ts}}$$

- 2- نءسب عناصر السءر المءابل لسءر الاءءكاز (ما عءا عنصر سءر الاءءكاز) بءقسفم عناصر سءر الاءءكاز على عنصر الاءءكاز Na_{ts} .
- 3- نءسب جمفء عناصر العموء المءابل لعموء الاءءكاز (ما عءا عنصر الاءءكاز) بءقسفم عناصر عموء الاءءكاز على عنصر الاءءكاز Na_{ts} ثم ضربها بـ (-1) .

نقوم بحساب العناصر الأءرى من العلاقات:

$$Na'_{ij} = Na_{ij} - Na_{tj} \frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Na_{ij}Na_{ts} - Na_{tj}Na_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nb'_i = Nb_i - Nb_t \frac{a_{is}}{a_{ts}} = \frac{Nb_i a_{ts} - Nb_t a_{is}}{a_{ts}}$$

$$Nc'_j = Nc_j - Nc_s \frac{a_{tj}}{a_{ts}} = \frac{Nc_j a_{ts} - Nc_s a_{tj}}{a_{ts}}$$

نءبء معفار ءوءف ءوارزمفة السفمبلكس المءاشرة على سءر ءابع الءءف فإءا كان من نوع ءءظفم ففءب أن فكون سءر ءابع الءءف فف الءءول لا فءوفف أف قفمة موءبة، (أما إذا كان ءابع الءءف من نوع ءقلفل ففءب أن فكون سءر ءابع الءءف فف الءءول الءفءفد لا فءوفف أف قفمة سالبة)، فف ءال عءم ءءقق المعفار نءرر نفس الءءوءاء ءءى فءءقق معفار ءوءقف ونءصل على الءل الأمءل المءلوب.

7-2-1- خطوات ءوارزمفة السفمبلكس المءءوءة:

a. نءءب النموءءفن بالشكل القاعءف وءلك بفإءافة أو طرء مءءوءاء إءاففة

أو باءءءءام المءءوءاء الاصطناعفة ونعزل المءءوءاء ءفر المقفءة

الشكل القاعءف للنموءء الأصلف:

أوجد:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n + 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_m \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n + u_1 = Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n + u_2 = Nb_2$$

.....

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n + u_m = Nb_m$$

$$x_j \geq 0 ; j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_i \geq 0 ; i = 1, 2, \dots, m$$

هنا لا نشترط أن تكون $Nb_i \geq 0$.

الشكل القاعدي للنموذج المرافق:

أوجد:

$$NL = Nb_1y_1 + Nb_2y_2 + \dots + Nb_iy_m + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$Na_{11}y_1 + Na_{21}y_2 + \dots + Na_{m1}y_m - v_1 = Nc_1$$

$$Na_{12}y_1 + Na_{22}y_2 + \dots + Na_{m2}y_m - v_2 = Nc_2$$

.....

$$Na_{1n}y_1 + Na_{2n}y_2 + \dots + Na_{mn}y_m - v_n = Nc_n$$

$$y_i \geq 0 ; i = 1, 2, \dots, m$$

$$v_j \geq 0 ; j = 1, 2, \dots, n$$

هنا لا نشترط أن تكون $Nc_j \geq 0$.

إن للنموذجين نفس المعاملات، ومصفوفة أمثال النموذج المرافق هي منقول

مصفوفة أمثال النموذج الأصلي نكتب النموذجين بالجدول المختصر:

النماذج الخطية البينية وسوفيكية وخواصها لإيجاد الحل الأمثل لها

		النموذج الأصلي		
		التابع NZ القيود	$Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n + 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_m$	Max عمود الثوابت
المتحولات المرافقة	y_1	1	$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \dots + Na_{1n}x_n + u_1$	$= Nb_1$
	y_2	2	$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \dots + Na_{2n}x_n + u_2$	$= Nb_2$
	$= \dots$
	y_m	m	$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \dots + Na_{mn}x_n + u_m$	$= Nb_m$
		قيود عدم السلبية	$x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$	≥ 0
		النموذج المرافق		
		التابع NL القيود	$Nb_1y_1 + Nb_2y_2 + \dots + Nb_m y_m + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$	Min عمود الثوابت
		1	$Na_{11}y_1 + Na_{21}y_2 + \dots + Na_{m1}y_m - v_1$	$= Nc_1$
		2	$Na_{12}y_1 + Na_{22}y_2 + \dots + Na_{m2}y_m - v_2$	$= Nc_2$
		$= \dots$
		n	$Na_{1n}y_1 + Na_{2n}y_2 + \dots + Na_{mn}y_m - v_n$	$= Nc_n$
		قيود عدم السلبية	$y_1, y_2, \dots, y_m, v_1, v_2, \dots, v_n$	≥ 0

جدول رقم (2) الشكل القياسي للنموذجين الأصلي والمرافق

b. نضع متحولات ومعاملات النموذج الأصلي في جدول السيمبلكس المعدلة،

ونضع متحولات النموذج المرافق خارج الجدول بالشكل:

		المتحولات القاعدية مع إشارتها (-)					تابع الهدف للنموذج المرافق
		للنموذج المرافق					
		$-v_1$	$-v_2$...	$-v_n$		
		المتحولات غير القاعدية	x_1	x_2	...	x_n	NB_i
		المتحولات القاعدية					
المتحولات غير القاعدية للنموذج	y_1	u_1	Na_{11}	Na_{12}	...	Na_{1n}	Nb_1
	y_2	u_2	Na_{21}	Na_{22}	...	Na_{2n}	Nb_2

	y_m	u_m	Na_{m1}	Na_{m2}	...	Na_{mn}	Nb_m
		تابع الهدف للنموذج الأصلي	Nc_1	Nc_2	...	Nc_n	$L - 0 \rightarrow Min$ $Z - 0 \rightarrow Max$

جدول رقم (3) الجدول المزدوج للنموذجين الأصلي والمرافق وفق خوارزمية السيمبلكس المعدلة

7-2-2- خوارزمية السيمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق:

من خوارزمية السيمبلكس المعدلة للنموذج الأصلي نحصل على الحل الأمثل للنموذج الأصلي عندما تكون جميع العناصر في السطر الأخير (سطر تابع الهدف للنموذج الأصلي) $Nc_j \geq 0 ; j = 1, 2, \dots, n$ وفي الوقت نفسه تكون جميع العناصر في العمود الأخير (عمود تابع الهدف المرافق)

عندما تكون جميع العناصر في العمود الأخير (عمود تابع الهدف المرافق) $Nb_i \geq 0 ; i = 1, 2, \dots, m$ ونحصل على الحل الأمثل للنموذج المرافق

(سطر تابع الهدف للنموذج الأصلي) $Nc_j \leq 0 ; j = 1, 2, \dots, n$

(لأنها ستقابل $Nc_j = -v_j$) وهما الشرطان نفسيهما لكل من النموذجين.

لذلك علينا عند البحث عن الحل الأمثل للنموذجين معاً أن نعمل على جعل جميع العناصر $Nb_i \geq 0 ; i = 1, 2, \dots, m$ وعلى جعل جميع العناصر $Nc_j \leq 0 ; j = 1, 2, \dots, n$ ولتحقيق ذلك نعلم على أحد النموذجين ونضع متحولاته ومعاملاته في جدول ونضع النموذج المرافق في إطار خارجي لذلك الجدول، بصورة عامة نجد أن ضرورة وضع النموذجين في جدول مختصر لا تسمح لنا بالتخلص من الثوابت السالبة في الطرف الأيمن ولهذا فإن الحالة العامة للجدول المزدوج السابق يمكن أن تتضمن ثابت سالبة $Nb_i < 0$ كما أن عناصر السطر الأخير يمكن أن تتضمن عناصر موجبة $Nc_j > 0$ موجبة، لذلك يجب علينا عند البحث عن الحل الأمثل للنموذجين أن نعمل على معالجة هذه العناصر اعتماداً على أحد النموذجين.

بالاعتماد على النموذج الأصلي ونقوم بذلك على مرحلتين هما:

المرحلة الأولى:

نجعل الثوابت Nb_i غير سالبة وهذا ما يقابل الحصول على حل قاعدي غير سالب للنموذج الأصلي.

المرحلة الثانية:

نجعل جميع عناصر سطر تابع الهدف غير موجبة (في حالة تابع الهدف تعظيم) وهذا ما يقابل الحصول على الحل الأمثل المطلوب للنموذج الأصلي.

بالاعتماد على النموذج المرافق نقوم بذلك على مرحلتين هما:
المرحلة الأولى:

يجب أن نجعل عناصر عمود تابع الهدف المرافق
 $Nb_i \geq 0 ; i = 1, 2, \dots, m$ في السطر الأخير غير سالبة.

المرحلة الثانية:

يجب أن نجعل الثوابت الحرة بالنسبة للنموذج المرافق $(-Nc_j)$ غير موجبة وهذا
يقابل الحصول على الحل الأمثل للنموذج المرافق.

نوضح ما سبق من خلال المثال:

أوجد الحل الأمثل لكل من النموذج الخطي النيتروسوفيكى التالي ومرافقه باستخدام
الخوارزمية المزدوجة

مثال 1:

أوجد:

$$[5,8] x_1 + [3,6] x_2 \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$2x_1 + 3x_2 \leq [14,20]$$

$$2x_1 + x_2 \leq [10,16]$$

$$3x_2 \leq [12,18]$$

$$3x_1 \leq [15,21]$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

نشكل الجدول المزدوج للنموذج والنموذج المرافق:

النماذج الخطية البينية وسوفيكية وخوارزميات البرمجة الخط الأمثل لها

		النموذج الأصلي			
		تابع الهدف NZ	$[5, 8] x_1 + [3, 6] x_2$		Max عمود الثوابت
المتغيرات	y_1	1	$2x_1 + 3x_2$	\leq	[14,20]
	y_2	2	$2x_1 + x_2$	\leq	[10,16]
	y_3	3	$3x_2$	\leq	[12,18]
	y_4	4	$3x_1$	\leq	[15,21]
		قيود عدم السلبية	x_1, x_2	\geq	0
		النموذج المرافق			
		تابع الهدف NL	$[14, 20]y_1 + [10, 16]y_2 + [12, 18]y_3 + [15, 21]y_4$		Min عمود الثوابت
		1	$2y_1 + 2y_2 + 3y_4$	\geq	[5,8]
		2	$3y_1 + y_2 + 3y_4$	\geq	[3,6]
		قيود عدم السلبية	y_1, y_2, y_3, y_4	\geq	0

جدول رقم (4) النموذج الأصلي ونموذجه المرافق

في الجدول التالي كتبنا النموذجين بالشكل القياسي:

النماذج الخطية النيرة وسوفيكية وخوارزميات الإيجاد الحل الأمثل لها

		النموذج الأصلي			
		تابع الهدف NZ القيود	$[5,8] x_1 + [3,6] x_2 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4$	عمود الثوابت Max	
المتحولات المساوية	y_1	1	$2x_1 + 3x_2 + u_1$	= [14,20]	
	y_2	2	$2x_1 + x_2 + u_2$	= [10,16]	
	y_3	3	$3x_2 + u_3$	= [12,18]	
	y_4	4	$3x_1 + u_4$	= [15,21]	
		قيود عدم السلبية	$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4$	\geq	0
النموذج المرافق					
		تابع الهدف NL القيود	$[14, 20]y_1 + [10, 16]y_2 + [12, 18]y_3 + [15, 21]y_4 + 0v_1 + 0v_2$	عمود الثوابت Min	
		1	$2y_1 + 2y_2 + 3y_4 - v_1$	= [5,8]	
		2	$3y_1 + y_2 + 3y_4 - v_2$	= [3,6]	
		قيود عدم السلبية	$y_1, y_2, y_3, y_4, v_1, v_2$	\geq	0

جدول رقم (5) الشكل القياسي للنموذج الأصلي والنموذج المرافق

نلاحظ من الجدول أن الشكل القياسي للنموذج الأصلي يتضمن قاعدة جاهزة من المتحولات الإضافية u_1, u_2, u_3, u_4 ، أما بالنسبة للنموذج المرافق لا يوجد قاعدة جاهزة لذلك نقوم بضرب القيدين ب (-1) فنحصل على الشكل القاعدي للنموذج المرافق والجدول التالي يوضح الشكل القاعدي للنموذجين الأصلي والمرافق:

النماذج الخطية الثنائية وسوفيكية وخوارزميات البرمجة الخط الأمثل لها

		النموذج الأصلي			
		تابع الهدف NZ القيود	$[5, 8] x_1 + [3, 6] x_2 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4$		Max عمود التوابت
المحولات	y_1	1	$2x_1 + 3x_2 + u_1$	=	$[14, 20]$
	y_2	2	$2x_1 + x_2 + u_2$	=	$[10, 16]$
	y_3	3	$3x_2 + u_3$	=	$[12, 18]$
	y_4	4	$3x_1 + u_4$	=	$[15, 21]$
		قيود عدم السلبية		$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4$	\geq
		النموذج المرافق			
		تابع الهدف NZ القيود	$[14, 20]y_1 + [10, 16]y_2 + [12, 18]y_3 + [15, 21]y_4 + 0v_1 + 0v_2$		Min عمود التوابت
		1	$-2y_1 - 2y_2 - 3y_4 + v_1$	=	$-[5, 8]$
		2	$-3y_1 - y_2 - 3y_4 + v_2$	=	$-[3, 6]$
		قيود عدم السلبية	$y_1, y_2, y_3, y_4, v_1, v_2$	\geq	0

جدول رقم (6) الشكل القاعدي للنموذج الأصلي والنموذج المرافق

نضع النموذجين في جدول خوارزمية السيمبلكس المعدلة نحصل على الجدول:

النماذج الخطية النيتروسوفية وخوارزميات الإيجاد الحل الأمثل لها

		حسب النموذج الأصلي			تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i		
		$-v_1$	$-v_2$				
		المتحولات غير القاعدية المتحولات القاعدية		x_1	x_2		
المتحولات غير القاعدية للنموذج	y_1	u_1	2	3	[14,20]		
	y_2	u_2	2	1	[10,16]		
	y_3	u_3	0	3	[12,18]		
	y_4	u_4	3	0	[15,21]		
		تابع الهدف للنموذج الأصلي Nc_i	[5,8]	[3,6]	$L - 0$ $Z - 0$		
		حسب النموذج المرافق					
		u_1	u_2	u_3	u_4		
		المتحولات غير القاعدية المتحولات القاعدية				تابع الهدف لنموذج الأصلي Nc_i	
		y_1	y_2	y_3	y_4		
المتحولات غير القاعدية لنموذج المرافق	x_1	v_1	-2	-2	0	-3	-[5,8]
	x_2	v_2	-3	-1	-3	0	-[3,6]
		تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i	[14,20]	[10,16]	[12,18]	[15,21]	$Z - 0$ $L - 0$

جدول رقم (7) الجدول المزدوج للنموذجين الأصلي والمرافق وفق خوارزمية السيمبلكس المعدلة

المرحلة الأولى:

1- بالنسبة للنموذج الأصلي:

بما أن القيم في عمود الثوابت جميعها موجبة ندرس القيم في سطر تابع الهدف ونحدد القيمة الموجبة الأكبر نجد:

$$\text{Max}([5,8], [3,6]) = [5,8]$$

وهي مقابلة للمتحول x_1 هذا يعني أنه سيدخل إلى القاعدة لنحدد العنصر الذي سيخرج من القاعدة نحسب المؤشر θ حيث:

$$\theta \in \text{Min} \left[\frac{[14,20]}{2}, \frac{[10,16]}{2}, \frac{[15,21]}{3} \right] = \frac{[15,21]}{3} = [5,7]$$

نجد أن عمود الارتكاز هو عمود المتحول غير القاعدي x_1 ، أي أن المتحول x_1 سيدخل إلى القاعدة بدلا من المتحول u_4 ، وعنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من تقاطع سطر الارتكاز وعمود الارتكاز وهو (3)

نجري التبديل بين المتحولين باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة.

2- بالنسبة للنموذج المرافق:

ندرس عناصر سطر تابع الهدف نلاحظ أن جميع القيم موجبة لذلك ندرس عناصر عمود الثوابت فنجدها جميعها قيم سالبة نختار أكثرها سالبية وهو $(-[5,8])$ سطر المتحول القاعدي v_1 فيكون سطره هو سطر الارتكاز ولتحديد عمود الارتكاز وعنصر الارتكاز نحسب المؤشر θ' حيث:

$$\theta' \in \text{Max} \left[\frac{[14,20]}{-2}, \frac{[10,16]}{-2}, \frac{[15,21]}{-3} \right] = \frac{[15,21]}{-3}$$

فيكون عمود المتحول غير القاعدي u_4 هو عمود الارتكاز أي أن المتحول u_4 سيدخل إلى القاعدة بدلا من المتحول v_1 وعنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من

النماذج الخطية النيرة وسوفيكية وخوارزميات الإيجاد الحل الأمثل لها

تقاطع سطر الارتكاز وعمود الارتكاز وهو (3-) تجري التبديل بين المتحولين باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة، من (1) و (2) نحصل على الجدول المزدوج:

		حسب النموذج الأصلي				تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i		
		$-y_4$	$-v_2$	u_4	x_2			
المتحولات غير القاعدية للمرافق		y_1	u_1	$-\frac{2}{3}$	3	[4,6]		
		y_2	u_2	$-\frac{2}{3}$	1	[0,4]		
		y_3	u_3	0	3	[12,18]		
		v_1	x_1	$\frac{1}{3}$	0	[5,7]		
		تابع الهدف للنموذج الأصلي NC_i		$\left[\frac{-8}{3}, \frac{-5}{3} \right]$		[3,6]	$L - [25,56]$ $Z - [25,56]$	
		حسب النموذج المرافق				تابع الهدف للنموذج الأصلي NC_i		
		u_1	u_2	u_3	x_1			
المتحولات غير القاعدية للنموذج المرافق		y_1	y_2	y_3	v_1	$L - [25,56]$ $Z - [25,56]$		
		u_4	y_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\left[\frac{8}{3}, \frac{5}{3} \right]$
		x_2	v_2	-3	-1	-3	0	-[3,6]
تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i		[4,6]	[0,4]	[12,18]	[5,7]	$Z - [25,56]$ $L - [25,56]$		

جدول رقم (8) الجدول المزدوج للمرحلة الأولى الحل حسب للنموذجين الأصلي والمرافق

المرحلة الثانية:

نطبق معيار توقف الخوارزمية:

1- بالنسبة للنموذج الأصلي:

بما أن القيم في عمود الثوابت جميعها موجبة ندرس القيم في سطر تابع الهدف نلاحظ أنه يوجد قيمة موجبة هي [3,6] أي أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، لذلك نحدد عمود الارتكاز وهو عمود المتحول x_2 المقابل للقيمة الموجبة الوحيدة في سطر تابع الهدف [3,6] ومن أجل تحديد سطر الارتكاز وعنصر الارتكاز نحسب المؤشر θ حيث:

$$\theta \in \text{Min} \left[\frac{[4,6]}{3}, \frac{[0,4]}{1}, \frac{[12,18]}{3} \right] = \frac{[4,6]}{3} = \left[\frac{4}{3}, 2 \right]$$

وهي مقابلة للعنصر القاعدي u_1 ، فيكون سطره هو سطر الارتكاز ويكون عنصر الارتكاز هو (3) ، نبدل بين المتحولين باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة.

1- بالنسبة للنموذج المرافق:

ندرس عناصر سطر تابع الهدف نلاحظ أن جميع القيم موجبة لذلك ندرس عناصر عمود الثوابت نجد أنه يوجد قيمة سالبة وحيدة هي (-[3,6]) هي سطر المتحول القاعدي v_2 فيكون سطره هو سطر الارتكاز ولتحديد عمود الارتكاز وعنصر الارتكاز نحسب المؤشر θ' حيث:

$$\theta' \in \text{Max} \left[\frac{[4,6]}{-3}, \frac{[0,4]}{-1}, \frac{[12,18]}{-3} \right] = \frac{[4,6]}{-3}$$

النماذج الخطية النيتروسوفية وخوارزميات الإيجاد الحل الأمثل لها

فيكون عمود المتحول غير القاعدي y_1 هو عمود الارتكاز أي أن المتحول y_1 سيدخل إلى القاعدة بدلاً من المتحول v_2 وعنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من تقاطع سطر الارتكاز وعمود الارتكاز وهو (-3) نجري التبديل بين المتحولين باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة، من (1) و(2) نحصل على الجدول المزدوج:

		حساب النموذج الأصلي			تابع الهدف للمنموذج المرافق NB_i		
		$-y_4$	$-y_1$				
		المتحولات غير القاعدي المتحولات القاعدية	u_4	u_1			
		v_2	x_2	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$[\frac{4}{3}, 2]$	
المتحولات غير القاعدية للمنموذج المرافق	y_2	u_2	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$[\frac{4}{3}, 2]$		
	y_3	u_3	$\frac{2}{3}$	-1	[8,12]		
	v_1	x_1	1	0	[5,7]		
		تابع الهدف للمنموذج الأصلي NC_i	[-6, -1]	[-2, -1]	$L = [29,68]$ $Z = [29,68]$		
		حساب النموذج المرافق				تابع الهدف للمنموذج الأصلي NC_i	
		x_2	u_2	u_3	x_1		
		المتحولات غير القاعدي المتحولات القاعدية	v_2	y_2	y_3	v_1	
		u_4	y_4	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$	-1
المتحولات غير القاعدية للمنموذج	u_1	y_1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	[-2, -1]
			تابع الهدف للمنموذج المرافق NB_i	$[\frac{4}{3}, 2]$	$[\frac{4}{3}, 2]$	[8,12]	[5,7]

جدول رقم (9) الجدول الخوارزمية المزدوجة للمرحلة الثانية

نطبق معيار توقف الخوارزمية:

1- بالنسبة للنموذج الأصلي نقوم بدراسة عناصر سطر تابع الهدف إلى أن

يتحقق معيار توقف الخوارزمية وهو عدم وجود أي عنصر موجب.

2- بالنسبة للنموذج المرافق ندرس عناصر عمود الثوابت أيضا" إلى أن يتحقق

معيار توقف الخوارزمية وهي عدم وجود أي عنصر سالب.

نجد أن المعيار قد تحقق وبالتالي توصلنا إلى حصلنا الحل الأمثل.

الحل الأمثل للنموذج الأصلي هو:

$$x_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2 \right], u_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2 \right], u_3^* \in [8, 12],$$

$$x_1^* \in [5, 7], u_1^* = u_4^* = 0$$

ويقابل قيمة لتابع الهدف هي:

$$Z^* = \text{Max } Z \in [29, 68]$$

الحل الأمثل للنموذج المرافق هو:

$$y_1^* \in [1, 2], y_4^* \in [1, 6], v_2^* = y_2^* = y_3^* = v_1^* = 0$$

ويقابل قيمة لتابع الهدف هي:

$$L^* = \text{Min } L \in [29, 166]$$

نلاحظ أن:

$$Z^* = \text{Max } Z \in [29, 68] \leq L^* = \text{Min } L \in [29, 166]$$

هذا الحل مقبول وذلك حسب النظرية التالية:

إذا كان (x_1, x_2, \dots, x_n) حلاً مقبولاً للنموذج الأصلي من نوع Max وكان (y_1, y, \dots, y_m) حلاً مقبولاً للنموذج المرافق من نوع Min فإن قيمة تابع الهدف للنموذج الأصلي لا تتجاوز قيمة تابع الهدف للنموذج المرافق عند هذين الحلين أي يكون:

$$\sum_{j=1}^n Nc_j x_j \leq \sum_{i=1}^m Nb_i y_i$$

7-3- التفسير الاقتصادي للنماذج المرافقة:

نوضح التفسير الاقتصادي للنموذج المرافق من خلال المثال:

مثال 2:

يريد مصنع نقل منتجاته من مخزنيين إلى ثلاثة مراكز للبيع بالمفرق وبأقل تكلفة ممكنة ونوضح بالجدول التالي البيانات التي قدمها المسؤول في المصنع:

مراكز البيع المخازن	B_1	B_2	B_3	الكميات المتوفرة a_i
A_1	[1,3]	[2,4]	[0,3]	300
A_2	[4,6]	[1,4]	[1,5]	600
الكميات المطلوبة b_j	200	300	400	900

كان طلب المسؤول عن إدارة المصنع خطة نقل ذات تكلفة أصغرية بحيث يتم تلبية طلبات مراكز التوزيع من الكميات المتوفرة:

إن المسألة السابقة هي مسألة نقل متوازنة لأن:

$$\sum_{i=1}^2 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j = 900$$

لصيغة النموذج الرياضي:

نفرض x_{ij} الكمية المنقولة من المخزن i حيث $i = 1, 2$ إلى مركز التوزيع j

حيث $j = 1, 2, 3$ بذلك نحصل على النموذج الخطي:

أوجد:

$$L \in [1,3]x_{11} + [2,4]x_{12} + [0,3]x_{13} + [4,6]x_{21} + [1,4]x_{22} + [1,5]x_{23} \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 300$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{23} \leq 600$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 200$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 400$$

$$x_{ij} \geq 0 ; i = 1, 2 , j = 1, 2, 3$$

نكتب النموذج بالصيغة المتناظرة:

بما أن تابع الهدف تابع تقليل فيجب أن تكون جميع القيود من نوع (أكبر من أو

يساوي) عندها يكتب النموذج بالصيغة المتناظرة:

أوجد:

$$L \in [1,3]x_{11} + [2,4]x_{12} + [0,3]x_{13} + [4,6]x_{21} + [1,4]x_{22} + [1,5]x_{23} \rightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$-x_{11} - x_{12} - x_{13} \geq -300$$

$$-x_{11} - x_{21} - x_{23} \geq -600$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 200$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 400$$

$$x_{ij} \geq 0 ; i = 1,2 , j = 1,2,3$$

نشكل النموذج المرافق نحصل على النموذج الخطي:

$$Z = -300y_1 - 600y_2 + 200y_3 + 300y_4 + 400y_5 \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$-y_1 + y_3 \leq [1,3]$$

$$-y_1 + y_4 \leq [2,4]$$

$$-y_1 + y_5 \leq [0,3]$$

$$-y_2 + y_3 \leq [4,6]$$

$$-y_2 + y_4 \leq [1,4]$$

$$-y_2 + y_5 \leq [1,5]$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

نقوم بصياغة نص مناسب للنموذج المرافق انطلاقاً من نص المسألة الأصلية:

واضح من النموذج الأصلي أن هدف المصنع هو نقل كامل منتجاته بأقل تكلفة

ممكنة:

نص المسألة حسب النموذج المرافق:

قدمت شركة نقل لمصنع عرضاً بأنها ستقوم بنقل كامل الكمية الموجودة في المخزن الأول أي 300 وحدة بسعر قدره y_1 وحدة نقدية للوحدة الواحدة ونقل كامل الكمية المتوفرة في المخزن الثاني 600 بسعر قدره y_2 وحدة نقدية للوحدة الواحدة وتعهدت الشركة بأنها ستقوم بإيصال 400, 300, 200 وحدة إلى مراكز بيع المفرق الثلاثة على الترتيب.

حيث يتم ببيع هذه الوحدات في هذه المراكز بسعر قدره y_3, y_4, y_5 وحدة نقدية على الترتيب.

حتى تتمكن من إقناع المسؤول في المعمل بأنه إذا قبل بعرضها ستكون تكلفة النقل في مصنعه أقل من التكلفة في حال قام هو بعملية النقل.

استخدمت القيود في النموذج المرافق وأجرت معه النقاش التالي:

أنت تدفع تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع الأول إلى مركز البيع الأول مبلغ قيمته تنتمي إلى المجال [1,3] ولكن لو استخدمت شركة النقل فإن التكلفة

هي $y_3 - y_1$ ، ولدينا من القيد الأول في النموذج المرافق

$$y_3 - y_1 \leq [1,3]$$

وهنا سيلاحظ المسؤول في المعمل أن عرض شركة النقل عرض مناسب.

بنفس الأسلوب نناقش جميع قيود النموذج المرافق، النتيجة التي سيصل لها المسؤول في المصنع هي أن تكلفة النقل على أي مسار في حال تم قبول عرض

شركة النقل أقل من أو تساوي التكلفة التي سيدفعها لو قام هو بنفسه بعملية النقل

وشركة النقل ستعتمد القيم y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 لأنها ستحقق من خلالها ربح أعظمي حيث أن ربح شركة النقل يحسب من العلاقة:

$$-300y_1 - 600y_2 + 200y_3 + 300y_4 + 400y_5$$

وهي نفسها تابع الهدف للنموذج المرافق، أي أن النموذج المرافق يمثل شركة النقل التي تحاول زيادة أرباحها الى أعظم حد ممكن.

إن النظرية الأساسية للترافق تنص على أن القيم المثلى للنموذج والنموذج المرافق دوماً متساوية فإن المصنع لا يوفر أي مال لأنه سيدفع لشركة النقل كلفة النقل الأصغرية ولكنه سيوفر متاعب حل النموذج الأصلي لتعين التكلفة الأصغرية للنقل، وبالنسبة لشركة النقل فقد ضمنت صفقة نقل البضائع بربح أعظمي.

الخاتمة:

من الدراسة السابقة توصلنا إلى حل للنموذجين الأصلي والمرافق بنفس الوقت، وهي قيم نيتروسوفيكية نعلم من خلالها الحد الأدنى والحد الأعلى للربح الذي يمكن أن نحصل عليه، لأن تفسير الحل الأمثل للنموذج الأصلي هو أنه يعطينا أفضل خطة للإنتاج تجعل قيمة ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن وذلك ضمن الإمكانيات المتاحة، أما الحل الأمثل للنموذج المرافق فهو يعطينا أفضل قيم لأسعار المواد الأولية التي إذا استخدمت بدون هدر ستعطينا أيضاً أفضل خطة للإنتاج، والنتيجة هي الربح الأعظمي.

الفصل الثامن

بعض التطبيقات على النماذج الخطية النيتروسوفيكية

مقدمة.

8-1- مسألة تركيب الخلائط.

8-2- مسألة خليط المنتجات.

8-3- نموذج الاستخدام الأمثل للأراضي الزراعية.

8-4- مسألة تعيين موقع مستودع.

8-5- مسألة ميزانية رأس المال.

8-6- مسألة تعيين مفتشين.

8-7- مسألة تحديد التكلفة.

الخاتمة.

الفصل الثامن

بعض التطبيقات على النماذج الخطية النيوتروسوفية

مقدمة:

يعد أسلوب البرمجة الخطية من أكثر اساليب بحوث العمليات المستخدم في أغلب المجالات العملية، ويعتمد هذا الأسلوب على تحويل المسألة قيد الدراسة إلى نموذج رياضي خطي ومن ثم نقوم بإيجاد الحل الأمثل باستخدام الخوارزميات الخاصة لحل النماذج الخطية، إن هذا الحل يساعد صناع القرار المسؤولين عن إدارة المنظومة التي تعمل وفق هذا النموذج على اتخاذ قرارات سليمة مبنية على أسس علمية، إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة انشاء النموذج الخطي ، أي التعبير عن الحالة قيد الدراسة بعلاقات رياضية ، ومن أجل صياغة النموذج الخطي يجب توفر العناصر الأساسية التالية:

- 1- تحديد الهدف بصورة كمية، ويعبر عنه بتابع الهدف وهو عبارة عن التابع المطلوب إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى له، أي يجب أن يكون بإمكاننا التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق أكبر ربح أو تحقيق أقل تكلفة.
- 2- تحديد القيود: يجب أن تكون القيود التي تعبر عن الموارد المتاحة محددة، أي يجب أن تكون الموارد قابلة للقياس، ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو مساويات.
- 3- تحديد البدائل المختلفة: ويشير هذا العنصر إلى أن يكون للمشكلة أكثر من حل واحد حتى يمكن تطبيق البرمجة الخطية، لأنه لو كان للمشكلة حل

واحد لما كانت هناك ضرورة لاستخدام البرمجة الخطية التي تتركز فائدتها في المساعدة على اختيار أفضل حل من بين الحلول المقبولة.

نقدم في هذا الفصل بعض المسائل التي تؤول إلى نماذج خطية نيتروسوفيقية، أي أننا سنأخذ بعض أو كل بيانات المسألة قيم نيتروسوفيقية.

8-1- مسألة تركيب الخلائط:

نقصد بالخلائط أي شيء يتم تركيبه من عدد من المواد مثل الوجبات الغذائية - الدواء - أي خليطة معدنية --- ويكون هنا المطلوب هو اختيار المواد التي تدخل بتركيب هذا الخليط بحيث تكون تكلفة الإنتاج أقل ما يمكن.

النص العام للمسألة:

نريد تركيب خليط من المواد الأولية A_1, A_2, \dots, A_n وسعر الوحدة الواحدة من كل منها يساوي NC_1, NC_2, \dots, NC_n على الترتيب ويشترط أن تتضمن الوجبة مقداراً من العناصر الهامة B_1, B_2, \dots, B_m على ألا تقل الكمية من كل عنصر من العناصر B_1, B_2, \dots, B_m عن Nb_1, Nb_2, \dots, Nb_m وحدة على الترتيب المطلوب إيجاد المقادير اللازمة من كل مادة من المواد A_1, A_2, \dots, A_n التي يجب إدخالها في الخليط بحيث تكون تكلفته أقل ما يمكن علماً بأن ما تحويه كل مادة من المواد A_1, A_2, \dots, A_n من كل عنصر من العناصر B_1, B_2, \dots, B_m موضح بالجدول التالي:

النماذج الخطية البينية وسوفيكية وخواص كميات الإنتاج البلى الأمثل لها

المواد الأولية العناصر	A_1	A_2	A_n	NB
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	Nb_2
.....	
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	Nb_m

جدول رقم (1) المواد الأولية والعناصر لمسألة تركيب الخلناط

إن $Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$ و $j = 1, 2, \dots, n$ حيث ε_j هو اللاتحديد وممكن أن يكون $\varepsilon_j \in [\lambda_{1j}, \lambda_{2j}]$ أو $\varepsilon_j \in \{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\}$ أو ... غير ذلك أيضاً القيم التي تعبر عن كميات العناصر التي يجب أن تتوفر في الخليط $Nb_i = b_i \pm \delta_i$ و $i = 1, 2, \dots, m$ حيث δ_i هو اللاتحديد وممكن أن يكون $\delta_i \in [\mu_{1i}, \mu_{2i}]$ أو $\delta_i \in \{\mu_{1i}, \mu_{2i}\}$ أو ... غير ذلك.
بناء النموذج الرياضي:

نرمز للمقادير المطلوبة من كل مادة من المواد A_1, A_2, \dots, A_n بـ x_1, x_2, \dots, x_n ونضع جميع المعلومات بالجدول:

المواد الأولية العناصر	A_1	A_2	A_n	المقادير الدنيا
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	Nb_2
.....
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	Nb_m
ربح الوحدة الواحدة	Nc_1	Nc_2	Nc_n	
المقادير المطلوبة	x_1	x_2	x_n	

جدول رقم (2) المعطيات العامة لمسألة تركيب الخلناط

يكون المطلوب في المسألة تحديد قيمة لكل من المتحولات x_1, x_2, \dots, x_n بحيث يأخذ تابع الهدف أصغر قيمة، وذلك ضمن الشروط المفروضة

بناء على معطيات المسألة يكتب تابع الهدف بالصيغة:

$$NL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n$$

صياغة الشروط بشكل رياضي نقدم التوضيح التالي:

كل واحدة من المادة A_1 تعطينا a_{11} واحدة من العنصر B_1 وبذلك نجد أن x_1 واحدة تعطينا $a_{11}x_1$ واحدة من العنصر B_1 وهكذا نجد بالنسبة لبقية المواد والعناصر وبالتالي يكون الشرط المتعلق بالعنصر B_1 كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq Nb_1$$

نتابع بنفس الطريقة بالنسبة لجميع المواد وجميع العناصر نحصل على النموذج الرياضي:

$$MinNL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n$$

ضمن القيود:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq Nb_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq Nb_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

ويكتب بالشكل المختصر:

$$MinNL = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j)x_j$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \pm \delta_i \quad ; i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

حيث: $c_j \pm \varepsilon_j$, $b_i \pm \delta_i$, a_{ij} , $j = 1,2, \dots, n$, $i = 1,2, \dots, m$ ،
بيانات المسألة وهي قيم نيتروسوفيقية.

مثال 1:

تريد مدرسة تأمين وجبة افطار للطلاب مكونة من أربعة أنواع من المواد الغذائية هي A_1, A_2, A_3, A_4 وأن سعر الوحدة الواحدة من كل منها NC_1, NC_2, NC_3, NC_4 على الترتيب، ولنفترض أنه يشترط أن تتضمن الوجبة مقداراً معيناً من العناصر الغذائية الهامة B_1 البروتينات B_2 النشويات B_3 الكربوهيدرات على ألا تقل كمية البروتين فيها عن Nb_1 واحدة وكمية النشويات عن Nb_2 واحدة وكمية الكربوهيدرات عن Nb_3 واحدة، المطلوب إيجاد المقادير اللازمة من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 التي يجب إدخالها في الوجبة بحيث تكون تكلفتها أقل ما يمكن وتحتوي على الأقل الحد الأدنى من العناصر الغذائية المطلوب توفرها في الوجبة وذلك إذا علمت أن من كل مادة من المواد وما تحتويه من العناصر الغذائية الهامة المطلوبة موضحة بالجدول المرفق:

$$\text{حيث: } NC_j = c_j \pm \varepsilon_j \text{ و } j = 1,2,3,4$$

حيث ε_j هو اللاتحديد

وممكن أن يكون $\varepsilon_j \in [\lambda_{1j}, \lambda_{2j}]$ أو $\varepsilon_j \in \{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\}$ أو ... غير ذلك

أيضاً القيم التي تعبر عن كميات العناصر الغذائية التي يجب أن تتوفر في الوجبة $Nb_i = b_i \pm \delta_i$ و $i = 1, 2, 3$ حيث δ_i هو اللاتحديد ويمكن أن يكون $\delta_i \in [\mu_{1i}, \mu_{2i}]$ أو $\delta_i \in \{\mu_{1i}, \mu_{2i}\}$ أو... غير ذلك.

نرمز للمقادير المطلوبة من كل من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 بالرموز x_1, x_2, x_3, x_4 على الترتيب ونضع المعلومات الواردة في نص المسألة بجدول كما يلي:

المواد الغذائية العناصر الغذائية	A_1	A_2	A_3	A_4	المقادير الدنيا
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	Nb_2
B_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	Nb_3
ربح الوحدة الواحدة	Nc_1	Nc_2	Nc_3	Nc_4	
المقادير المطلوبة	x_1	x_2	x_3	x_4	

جدول رقم (3) البيانات الأساسية لبناء النموذج الخطي للمثال 1

تابع الهدف:

من الجدول السابق نجد:

$$NL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + Nc_3x_3 + Nc_4x_4$$

شروط العناصر الغذائية:

شرط البروتينات العنصر الغذائي B_1

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq Nb_1$$

شرط النشويات العنصر الغذائي B_2

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq Nb_2$$

شرط الكربوهيدرات العنصر الغذائي B_3

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq Nb_3$$

شرط عدم السلبية:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

عندها يصبح النموذج الرياضي المناسب.

أوجد أصغر قيمة للدالة

$$MinNL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + Nc_3x_3 + Nc_4x_4$$

ضمن القيود:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq Nb_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq Nb_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq Nb_3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

للحصول على الحل الأمثل نستخدم إحدى الخوارزميات السابقة الذكر.

8-2- مسألة خليط المنتجات:

المقصود بخليط المنتجات إنتاج منتجات يدخل في تركيبها عدد من المواد الأولية ففي جميع المؤسسات الإنتاجية حتى يكون سير العمل مثالي ويحقق لها الربح الأعظمي يجب أن تعتمد على دراسة علمية تحدد من خلالها الكميات التي يجب إنتاجها من كل منتج من المنتجات وذلك باستخدام الموارد المتاحة بشكل مثالي بحيث يتم تأمين حاجة السوق وتحقيق المؤسسة ربح أعظمي.

النص العام للمسألة:

مؤسسة إنتاجية يمكنها إنتاج A_1, A_2, \dots, A_n من المنتجات ويدخل في تركيبها B_1, B_2, \dots, B_m من المواد الأولية، الكميات المستخدمة من كل مادة من المواد الأولية في كل منتج من المنتجات موضحة بالجدول:

المواد الأولية العناصر	A_1	A_2	A_n	NB
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	Nb_2
.....	
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	Nb_m

جدول رقم (4) المواد الأولية والعناصر لمسألة خليط المنتجات

الكميات المتوفرة لدى المؤسسة من هذه المواد الأولية هي

$$Nb_i = b_i \pm \delta_i \text{ على الترتيب حيث } Nb_1, Nb_2, \dots, Nb_m$$

$i = 1, 2, \dots, m$ حيث δ_i هو اللاتحديد ويمكن أن يكون:

$$\delta_i = [\mu_{1i}, \mu_{2i}] \text{ أو } \delta_i \in \{\mu_{1i}, \mu_{2i}\} \text{ أو } \dots \text{ غير ذلك.}$$

المطلوب إيجاد مقدار ما يجب إنتاجه من كل منتج من المنتجات

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

علماً أن الربح العائد من الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجات هو

$$NC_j = c_j \pm \varepsilon_j \text{ على الترتيب حيث } NC_1, NC_2, \dots, NC_n$$

$j = 1, 2, \dots, n$ حيث ε_j هو اللاتحديد ويمكن أن يكون $\varepsilon_j \in [\lambda_{1j}, \lambda_{2j}]$ أو

$$\varepsilon_j \in \{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\} \text{ أو } \dots \text{ غير ذلك.}$$

بناء النموذج الرياضي:

نرمز للكميات المنتجة من كل منتج من المنتجات A_1, A_2, \dots, A_n بـ x_1, x_2, \dots, x_n ونضع جميع المعلومات بالجدول:

المنتجات المواد الاولية	A_1	A_2	A_n	الكميات المتوفرة
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	Nb_2
.....
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	Nb_m
ربح الوحدة الواحدة	Nc_1	Nc_2	Nc_n	
الكميات المنتجة	x_1	x_2	x_n	

جدول رقم (5) البيانات النيتروسوفيقية للنموذج

يكون المطلوب في المسألة تحديد قيمة لكل من المتحولات x_1, x_2, \dots, x_n بحيث يأخذ تابع الهدف أعظم قيمة، وذلك ضمن الشروط المفروضة بناء على معطيات المسألة يكتب تابع الهدف بالصيغة:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n$$

صياغة الشروط بشكل رياضي نقدم التوضيح التالي:

لإنتاج وحدة واحدة من المنتج A_1 يلزمنا a_{11} من المادة B_1 وبذلك نجد أن x_1 وحدة من المنتج A_1 تحتاج $a_{11}x_1$ وحدة من المادة B_1 وهكذا نجد بالنسبة لبقية المنتجات والمواد وبالتالي يكون الشرط المتعلق بالمادة B_1 كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq Nb_1$$

نتابع بنفس الطريقة بالنسبة لكل المنتجات وجميع المواد نحصل على النموذج الرياضي:

أوجد القيمة العظمى للدالة:

$$MaxNZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n$$

ضمن القيود:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq Nb_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq Nb_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

وتكتب بالشكل المختصر:

$$MaxNZ = \sum_{j=1}^n (c_j \pm \varepsilon_j)x_j$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \dots m$$

$$x_j \geq 0$$

حيث: $c_j \pm \varepsilon_j$, $b_i \pm \delta_i$, a_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$

بيانات المسألة وهي قيم نيتروسوفيقية.

مثال 2:

يقوم مصنع لتصنيع الأقلام بإنتاج أربعة أنواع S_1, S_2, S_3, S_4 ويستخدم من أجل ذلك المواد الأولية الآتية M_1, M_2, M_3 . ترغب إدارة المصنع في دراسة التنظيم الأمثل للإنتاج خلال فترة زمنية (شهر مثلاً) وتحديد الإنتاج الشهري لكل منتج من أجل تحقيق ربح أعظمي، علماً بأن الربح يتناسب طردياً مع عدد الوحدات المباعة من المنتجات. نوضح الكميات المتوفرة من المواد الأولية اللازمة لكل منتج والربح العائد بالجدول:

المواد الغذائية العناصر الغذائية	S_1	S_2	S_3	S_4	الكميات المتوفرة
M_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	Nm_1
M_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	Nm_2
M_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	Nm_3

جدول رقم (6) بيانات المعطيات في المثال 2

لبناء النموذج الرياضي نفرض x_1 عدد الوحدات المنتجة من S_1

x_2 عدد الوحدات المنتجة من S_2

x_3 عدد الوحدات المنتجة من S_3

x_4 عدد الوحدات المنتجة من S_4

خلال الفترة الإنتاجية (شهر مثلاً) نضع المعلومات في الجدول:

النماذج الخطية النير وسوفيكية وخوارزميات البرمجة الخط الأمثل لها

المواد الغذائية العناصر الغذائية	S_1	S_2	S_3	S_4	الكميات المتوفرة
M_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	Nm_1
M_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	Nm_2
M_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	Nm_3
ربح الوحدة الواحدة	Nc_1	Nc_2	Nc_3	Nc_4	
المقادير المنتجة	x_1	x_2	x_3	x_4	

جدول رقم (7) معلومات أساسية لبناء النموذج الرياضي

من الجدول نلاحظ أن شرط المادة الأولية M_1 :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq Nm_1$$

شرط المادة الأولية M_2 :

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq Nm_2$$

شرط المادة الأولية M_3 :

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leq Nm_3$$

بالإضافة إلى ذلك يجب أن تكون الكميات المنتجة غير سالبة أي:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

نحدد تابع الهدف إذا تم إنتاج وحدات قدرها x_1, x_2, x_3, x_4 من الأنواع على

الترتيب فإن الربح خلال الفترة الإنتاجية سوف يكون:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + Nc_3x_3 + Nc_4x_4$$

وعليه يكون النموذج الرياضي للمسألة:

أوجد القيمة العظمى للدالة:

$$MaxNZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + Nc_3x_3 + Nc_4x_4$$

ضمن القيود :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq Nm_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq Nm_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leq Nm_3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

8-3- نموذج الاستخدام الأمثل للأراضي الزراعية:

نص المسألة:

لنفرض أنه لدينا n منطقة زراعية مساحة كل منها تساوي A_1, A_2, \dots, A_n ونريد زرعها بـ m نوعا من المحاصيل الزراعية لتأمين متطلبات المجتمع منها مع العلم أنه يلزمنا من المحصول i المقدار b_i ، إذا كان متوسط إنتاجية واحدة المساحة في السهل j من المحصول i تساوي Na_{ij} طن/هكتار حيث $j = 1, 2, \dots, n$ و $i = 1, 2, \dots, m$ ، وكان الربح العائد من الوحدة الواحدة من المحصول i يساوي Np_i ، حيث Na_{ij} هي قيمة نيتروسوفيقية قيمة غير محددة غير معينة تعين تام ويمكن أن تكون أي جوار للقيمة a_{ij} ، أيضا Np_i التي يمكن أن تكون أي جوار للقيمة p_i .

المطلوب: تحديد مقدار المساحة اللازم زراعتها بكل محصول من المحاصيل وفي جميع المناطق لتحقيق أكبر ربح ممكن وتلبية حاجات المجتمع.

صياغة النموذج الرياضي:

نرمز بـ x_{ij} لمقدار المساحة من المنطقة j التي يجب زراعتها بالمحصول i ونضع بيانات المسألة في الجدول:

النماذج الخطية البرمجة وخواصها لإيجاد الحل الأمثل لها

المناطق المحاصيل	1	2	n	مقدار الطلب	مقدار الربح
1	Na_{11} x_{11}	Na_{12} x_{12}	Na_{1n} x_{1n}	b_1	Np_1
2	Na_{21} x_{12}	Na_{22} x_{22}	Na_{2n} x_{2n}	b_2	Np_2
.....
m	Na_{m1} x_{m1}	Na_{m2} x_{m2}	Na_{mn} x_{mn}	b_m	Np_m
مقدار المساحة المتوفرة	a_1	a_2	a_n		

جدول رقم (8) بيانات المسألة

عندها نجد أن الشروط المفروضة على المتحولات x_{ij} هي:

1- شروط المساحات:

يجب أن يكون إجمالي المساحة المخصصة لمختلف المحاصيل في المنطقة j مساويا a_j أي يجب أن يكون:

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{m1} = a_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = a_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = a_n$$

2- شروط تلبية متطلبات المجتمع:

يجب ألا يقل إجمالي الإنتاج من المحصول i في جميع المناطق عن المقدار b_i أي يجب أن يكون:

$$Na_{11}x_{11} + Na_{12}x_{12} + \dots + Na_{1n}x_{1n} \geq b_1$$

$$Na_{21}x_{21} + Na_{22}x_{22} + \dots + Na_{2n}x_{2n} \geq b_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Na_{m1}x_{m1} + Na_{m2}x_{m2} + \dots + Na_{mn}x_{mn} \geq b_m$$

$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots + a_{mn}x_{mn} \geq b_m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

مثال 3:

لنفترض أننا نريد استغلال أربع مناطق زراعية A_1, A_2, A_3, A_4 ومساحة كل منها على الترتيب 60, 150, 20, 10 ، وذلك بزراعتها بالمحاصيل الآتية: قمح، شعير، قطن، دخان، الشمندر، والتي نحتاج منها ما يلي: 800, 200, 600, 1000, 2500 ولنفترض أن إنتاجية المناطق من تلك المحاصيل وأسعارها معطية بالجدول التالي:

المناطق المحاصيل	A_1	A_2	A_3	A_4	الطلب	سعر الظن
قمح	{4,6}	4	3	6	2500	{1400,1600}
شعير	7	5	4	{3,5}	1000	{900,1100}
قطن	4	{9,11}	8	5	600	{4500,6000}
دخان	6	{2,4}	0	0	200	{4000,5000}
شمندر	3	{10,14}	10	6	800	{400,700}
المساحة	60	150	20	10		

جدول رقم (9) بيانات المثال

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة بحيث تكون قيمة الإنتاج أكبر ما يمكن.

لصياغة النموذج الرياضي نستخرج الشروط الخطية التالية:

شروط المساحة:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 10$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 15$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 100$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 50$$

شروط الطلب:

$$\{4,6\}x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} \geq 2500$$

$$7x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + \{3,5\}x_{24} \geq 1000$$

$$4x_{31} + \{9,11\}x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} \geq 600$$

$$6x_{41} + \{2,4\}x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} \geq 200$$

$$3x_{51} + \{10,14\}x_{52} + 10x_{53} + 6x_{54} \geq 800$$

شروط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0$$

تابع الهدف الذي يعبر عن قيمة الانتاج هو:

$$\begin{aligned} MaxZ = & \{1400,1600\}(\{4,6\}x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14}) \\ & + \{900,1100\}(7x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + \{3,5\}x_{24}) \\ & + \{4500,6000\}(4x_{31} + \{9,11\}x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}) \\ & + \{4000,5000\}(6x_{41} + \{2,4\}x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44}) \\ & + \{400,700\}(3x_{51} + \{10,14\}x_{52} + 10x_{53} + 6x_{54}) \end{aligned}$$

8-4- مسألة تعيين موقع مستودع:

المسألة الأولى: طلب مسؤول عن إدارة إحدى الشركات من خبير في علم بحوث العمليات أن يساعده في الحصول على حل أمثل يحقق من خلاله أقل تكلفة للنقل

النماذج الخطية النيتروسوفية وخوارزميات الإيجاد الحل الأمثل لها

والتشغيل لمستودعات يريد انشائها من أجل التوسع في عمل الشركة وقدم له معلومات صاغ من خلالها الخبير المسألة التالية:

نص المسألة وفق مفاهيم علم النيتروسوفيك: تخطط شركة بيع بالمفرق للتوسع في نشاطاتها في منطقة معينة عن طريق إنشاء مستودعين جديدين يوضح الجدول الآتي المواقع المحتملة وعدد الزبائن وامكانية تلبية الطلب للمواقع حيث تم وضع (*) في حال كان الموقع يستطيع تلبية طلب الزبون ووضع (X) عكس ذلك ورمز NC_{ij} لكلفة نقل الوحدة الواحدة من الموقع i إلى الزبون j حصل على الجدول:

الزبون \ الموقع	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	* NC_{11}	* NC_{12}	X	* NC_{14}
A_2	* NC_{21}	* NC_{22}	* NC_{23}	* NC_{24}
A_3	X	* NC_{32}	* NC_{33}	* NC_{34}
طلبات الزبائن	D_1	D_2	D_3	D_4

جدول رقم (10) تكلفة النقل في حال اختيار الموقع

ومع توفر المعلومات التالية لكل موقع من المواقع المرشحة للمستودعات

الموقع \ المعلومات	كلفة التشغيل للوحدة الواحدة (وحدة نقدية)	رأس المال المستثمر الابتدائي (وحدة نقدية)	سعة الموقع
الأول	Np_1	k_1	A_1
الثاني	Np_2	k_2	A_2
الثالث	Np_3	k_3	A_3

جدول رقم (11) معلومات للتشغيل

المطلوب اختيار المواقع الملائمة للمستودعين التي تجعل التكاليف الكلية للاستثمار والتشغيل والنقل أصغر ما يمكن.

بناء النموذج الرياضي:

إن لكل موقع كلفة رأسمال ثابتة مستقلة عن الكمية المخزنة في المستودع المشار إلى ذلك الموقع وله أيضا " كلفة متغيرة متناسبة مع الكمية المنقولة، وبالتالي فإن الكلفة الكلية لإنشاء المستودع وتشغيله هي تابع غير خطي للكمية المخزنة وباستخدام المتحولات الصحيحة الثنائية يمكن صياغة مسألة تعيين موقع المستودع بشكل برنامج ذي أعداد صحيحة حيث نفرض أن المتحول الصحيح الثنائي δ_i يرمز إلى قرار اختيار الموقع أو عدم اختياره وبعبارة أخرى:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا اخترنا الموقع } i \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

نفرض أن x_{ij} يرمز إلى الكمية المنقولة من الموقع i إلى الزبون j فيكون القيد المعبر عن قدرة الموقع الأول على تلبية الطلبات على الشكل:

$$x_{11} + x_{12} + x_{14} \leq A_1 \delta_1$$

فعندما يكون $\delta_1 = 1$ يتم اختيار الموقع الأول ذو السعة A_1 بحيث أن الكمية المنقولة من الموقع الأول لا يمكن أن تتجاوز سعة ذلك الموقع A_1 وعندما يكون $\delta_1 = 0$ تتعدم المتحولات غير السالبة x_{11}, x_{12}, x_{14} مباشرة مشيرة إلى عدم إمكانية الشحن من الموقع الأول.

وبطريقة مماثلة نحصل على القيدين التاليين للموقعين الثاني والثالث:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq A_2 \delta_2$$

$$x_{31} + x_{33} + x_{34} \leq A_3 \delta_3$$

ولاختيار موقعين بالضبط نحتاج إلى القيد:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$$

بما أن δ_1 يمكنه أن يأخذ احدى القيمتين 0 أو 1 فقط فإن القيد الجديد سوف يجبر متحولين من بين المتحولات δ_i الثلاثة ليكونا مساويين الواحد ويمكن كتابة القيود الخاصة بطلبات الزبائن على الشكل التالي:

$$x_{11} + x_{21} = D_1 \text{ الزبون الأول}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = D_2 \text{ الزبون الثاني}$$

$$x_{23} + x_{33} = D_3 \text{ الزبون الثالث}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = D_4 \text{ الزبون الرابع}$$

ولكتابة تابع الهدف نلاحظ أن التكلفة الكلية للاستثمار والتشغيل والنقل بخصوص الموقع الأول هي على الشكل:

$$k_1 \delta_1 + Np_1(x_{11} + x_{12} + x_{14}) + Nc_{11}x_{11} + Nc_{12}x_{12} + Nc_{14}x_{14}$$

وعندما لا نختار الموقع الأول ينعدم المتحول δ_1 وذلك يجبر المتحولات x_{11} ، x_{12} ، x_{14} على أن تصبح معدومة وبطريقة مشابهة يمكن كتابة توابع التكلفة للموقعين الثاني والثالث وبالتالي تختزل الصياغة الكاملة لمسألة تعيين موقع المستودع إلى البرنامج الصحيح المختلط التالي:

يراد جعل Z أصغرياً:

$$\begin{aligned}
 Z = & k_1\delta_1 + Np_1(x_{11} + x_{12} + x_{14}) + Nc_{11}x_{11} + Nc_{12}x_{12} + Nc_{14}x_{14} \\
 & + k_2\delta_2 + Np_2(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + Nc_{21}x_{21} \\
 & + Nc_{22}x_{22} + Nc_{23}x_{23} + Nc_{24}x_{24} + k_3\delta_3 \\
 & + Np_3(x_{32} + x_{33} + x_{34}) + Nc_{32}x_{32} + Nc_{33}x_{33} \\
 & + Nc_{34}x_{34}
 \end{aligned}$$

ضمن القيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{14} \leq A_1\delta_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq A_2\delta_2$$

$$x_{31} + x_{33} + x_{34} \leq A_3\delta_3$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$$

$$x_{11} + x_{21} = D_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = D_2$$

$$x_{23} + x_{33} = D_3$$

δ_i متحول صحيح من أجل $i = 1, 2, 3$

$$x_{ij} \geq 0 ; i = 1, 2, 3 \text{ and } j = 1, 2, 3, 4$$

8-5- مسألة ميزانية رأس المال:

إذا كان الطلب الموجه من قبل المسؤول كيف أستطيع اختيار المشاريع المناسبة لتشغيل رأسمال محدود متوفر في الشركة من خلال عدد من المشاريع المطروحة فمن خلال المعلومات التي قدمها المسؤول عن إدارة الشركة قام الخبير بصياغة المسألة التالية:

تخطط شركة لصرف رأسمالها خلال الفترات T_j حيث $j = 1, 2, \dots, n$ القادمة ، ويوجد A_i مشروع مقترح حيث $i = 1, 2, \dots, m$ مقابل رأسمال محدود B_j

النماذج الخطية النيتروسوفيقية وخواصها الرياضية لإيجاد الحل الأمثل لها

المتوافر للاستثمار في الفترة j ، وعند اختيار أي مشروع i يصبح بحاجة إلى رأس مال معين في كل فترة j نرسم له بـ Na_{ij} وهي قيمة نيتروسوفيقية، تقاس قيمة كل مشروع بدلالة تدفق السيولة الموافق للمشروع في كل فترة محسوماً منه قيمة التضخم ويدعى ذلك صافي القيمة الحالية نرسم لها بـ Nv_i ، وعليه يمكن تنظيم الجدول:

الفترة \ المشروع	T_1	T_2	T_n
A_1	Na_{11}	Na_{12}	Na_{1n}
A_2	Na_{21}	Na_{22}	Na_{2n}
...
A_m	Na_{m1}	Na_{m2}	Na_{mn}
رأس المال المحدد	B_1	B_2	B_n

جدول رقم (12) مردودية الاستثمار خلال الفترات

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو اختيار المشاريع المناسبة التي تجعل القيمة الكلية (NPV) لجميع المشاريع المختارة أعظم ما يمكن.

صياغة النموذج الرياضي:

هنا نفرض متحول صحيح ثنائي x_i يأخذ القيمة واحد في حال تم اختيار المشروع i ويأخذ القيمة صفر في حال عدم اختيار المشروع i أي

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا اخترنا المشروع } i \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عندها يعطى تابع الهدف بالعلاقة:

$$Z = \sum_{i=1}^m Nv_i x_i$$

ويعطى قيد رأس المال بالعلاقة:

$$\sum_{i=1}^m Na_{ij} x_i \leq B_j \quad ; j = 1, \dots, n$$

وعليه نحصل على النموذج الرياضي:

أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = \sum_{i=1}^m Nv_i x_i$$

ضمن القيود:

$$\sum_{i=1}^m Na_{ij} x_i \leq B_j \quad ; j = 1, \dots, n$$

x_i متحول ثنائي يأخذ إحدى القيمتين 0 أو 1 من أجل جميع قيم $i = 1, \dots, m$

8-6- مسألة تعيين مفتشين:

نص المسألة:

لدى شركة n مرتبة للمفتشين وتريد اسناد مهمة ضبط الجودة لهم، وينبغي تدقيق K قطعة يومياً خلال S ساعة عمل في اليوم الواحد، في الجدول التالي نوضح المعلومات الكاملة عن المفتشين ولجميع المراتب:

النماذج الخطية النيتروسوفيكية وجوارز رياضية لإيجاد الحل الأمثل لها

معلومات عن المفتش مرتبة المفتش	عدد القطع التي يدقها (الساعة)	الدقة (بالمائة)	أجر المفتش (وحدة نقدية في الساعة)	عدد المفتشين	الغرامة التي تدفعها الشركة مقابل كل خطأ للمفتش
1	NM_1	ND_1	G_1	A_1	R
2	NM_2	ND_2	G_2	A_2	R
...
n	NM_n	ND_n	G_n	A_n	R

جدول رقم (13) معلومات عن المفتشين باستخدام القيم النيتروسوفيكية

عدد القطع قيم نيتروسوفيكية $NM_j = M_j + \varepsilon_j$ حيث ε_j هو اللاتحديد على عدد القطع يمكن أن يأخذ بأحد الأشكال:

$$\{\lambda_{j1}, \lambda_{j2}\} \text{ أو } [\lambda_{j1}, \lambda_{j2}]$$

أو أي جوارز M_j وكذلك الدقة قيم نيتروسوفيكية $ND_j = D_j + \delta_j$ حيث δ_j هو اللاتحديد على الدقة يمكن أن يأخذ بأحد الأشكال:

$$D_j \text{ أو } \{\mu_{j1}, \mu_{j2}\} \text{ أو } [\mu_{j1}, \mu_{j2}]$$

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي المناسب الذي نستطيع من خلاله تعيين الاسناد الأمثل للمفتشين بحيث تكون تكلفة التفتيش أقل ما يمكن.

بناء النموذج الرياضي النيتروسوفيكي:

لبناء النموذج الرياضي نفرض x_1, x_2, \dots, x_n عدد المفتشين من كل مرتبة على الترتيب المكلفين بمهمة التفتيش عندها يجب أن تتحقق المتراجحات:

$$x_j \leq A_j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

بما أن الشركة تحتاج إلى تدقيق K قطعة يومياً خلال S ساعة عمل في اليوم الواحد عندها يجب أن تتحقق مجموعة القيود:

$$\sum_{j=1}^n S(NM_j)x_j \geq K$$

للحصول على تابع الهدف نلاحظ إن الشركة تتحمل نوعين من التكاليف خلال عملية التفتيش، أجر المفتش والغرامة المقابل للخطأ المرتكب من قبل المفتش عن كل قطعة عندها يكتب تابع الهدف كما يلي:

$$Z = S \sum_{j=1}^n G_j + NM_j R_j \left[\frac{100 - ND_j}{100} \right] x_j$$

عندها يكتب النموذج الرياضي كما يلي:

$$Z = S \sum_{j=1}^n G_j + NM_j R_j \left[\frac{100 - ND_j}{100} \right] x_j \rightarrow \text{Min}$$

ضمن القيود:

$$x_j \leq A_j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n S(NM_j)x_j \geq K$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

مثال 4:

لدى شركة ثلاث مراتب للمفتشين وتريد اسناد مهمة ضبط الجودة لهم، وينبغي تدقيق 1500 قطعة يوميا خلال 8 ساعات عمل في اليوم الواحد، في الجدول

النماذج الخطية النيتروسوفيقية وخواصها الرياضية لإيجاد الحل الأمثل لها

التالي نوضح المعلومات الكاملة عن المفتشين ولجميع المراتب، في هذا المثال سنأخذ عدد القطع التي يدققها المفتش من كل مرتبة قيم نيتروسوفيقية:

معلومات عن المفتش مرتبة المفتش	عدد القطع التي يدققها (الساعة)	الدقة (بالمائة)	أجر المفتش (وحدة نقدية في الساعة)	عدد المفتشين	الغرامة التي تدفعها الشركة مقابل كل خطأ للمفتش
1	{15,16}	95	4	10	2
2	{10,11}	90	3	6	2
3	{25,26}	98	5	8	2

جدول رقم (14) معلومات عن المفتشين باستخدام القيم النيتروسوفيقية مثال 4

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي المناسب الذي نستطيع من خلاله تعيين الاسناد الأمثل للمفتشين بحيث تكون تكلفة التفتيش أقل ما يمكن.

لبناء النموذج الرياضي نفرض x_1, x_2, x_3 عدد المفتشين من المراتب الثلاثة على الترتيب المكلفين بمهمة التفتيش عندها يجب أن تتحقق المتراجحات:

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_3 \leq 8$$

بما أن الشركة تحتاج إلى تدقيق K قطعة يومياً خلال S ساعة عمل في اليوم الواحد عندها يجب أن تتحقق مجموعة القيود:

$$\sum_{j=1}^n 8M_j x_j \geq 1500$$

أي:

$$8(M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3) \geq 1500$$

ومنه نحصل على القيد:

$$8\{15,16\}x_1 + 8\{10,11\}x_2 + 8\{25,26\}x_3 \geq 1500$$

للحصول على تابع الهدف نلاحظ إن الشركة تتحمل نوعين من التكاليف خلال عملية التفتيش، أجر المفتش والغرامة المقابل للخطأ المرتكب من قبل المفتش عن كل قطعة عندها يكتب تابع الهدف كما يلي:

عندها تحسب تكلفة المفتش من المرتبة j في الساعة من خلال العلاقة التالية:

$$C_j = G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - D_j}{100} \right) ; j = 1, 2, \dots, n$$

نحصل على:

$$C_1 = 4 + \{15,16\} \times 2 \times \left(\frac{100 - 95}{100} \right) \in \{5.5, 5.6\}$$

$$C_2 = 3 + \{10,11\} \times 2 \times \left(\frac{100 - 90}{100} \right) \in \{5, 5.2\}$$

$$C_3 = 5 + \{25,26\} \times 2 \times \left(\frac{100 - 98}{100} \right) \in \{6, 6.04\}$$

ويكون مجموع التكاليف لجميع المفتشين المكلفين بمهمة ضبط الجودة في الساعة يعطى بالعلاقة:

$$TC_j = \sum_{j=1}^n \left[G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - D_j}{100} \right) \right] x_j$$

$$TC_j = \{5.5, 5.6\}x_1 + \{5, 5.2\}x_2 + \{6, 6.04\}x_3$$

بالتعويض بعبارة تابع الهدف:

$$Z = S \sum_{j=1}^n \left[G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - D_j}{100} \right) \right] x_j$$

نحصل على:

$$Z = \{44,44.8\}x_1 + \{40,41,6\}x_2 + \{48,48.32\}x_3$$

مما سبق نستطيع وضع النموذج الرياضي:

أوجد:

$$\text{Min}Z = \{44,44.8\}x_1 + \{40,41,6\}x_2 + \{48,48.32\}x_3$$

ضمن القيود:

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_3 \leq 8$$

$$8\{15,16\}x_1 + 8\{10,11\}x_2 + 8\{25,26\}x_3 \geq 1500$$

$$x_j \geq 0 ; j = 1,2,3$$

مثال 5:

لدى شركة ثلاث مراتب للمفتشين وتريد اسناد مهمة ضبط الجودة لهم، وينبغي تدقيق 1500 قطعة يوميا" خلال 8 ساعات عمل في اليوم الواحد، في الجدول التالي نوضح المعلومات الكاملة عن المفتشين ولجميع المراتب، في هذا المثال سنأخذ دقة التفثيش لكل مفتش قيم نيتروسوفيكية على شكل مجالات يكون حدها الأدنى أقل دقة وحدها الأعلى أعلى دقة يصل لها المفتش حسب المرتبة.

النماذج الخطية النيتروسوفيقية وخواصها الرياضية لإيجاد الحل الأمثل لها

معلومات عن المفتش مرتبة المفتش	عدد القطع التي يدققها (الساعة)	الدقة (بالمائة)	أجر المفتش (وحدة نقدية في الساعة)	عدد المفتشين	الغرامة التي تدفعها الشركة مقابل كل خطأ للمفتش
1	15	[95,97]	4	10	2
2	10	[90,92]	3	6	2
3	25	[98,99.5]	5	8	2

جدول رقم (15) معلومات عن المفتشين باستخدام القيم النيتروسوفيقية مثال 5

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي المناسب الذي نستطيع من خلاله تعيين الاسناد الأمثل للمفتشين بحيث تكون تكلفة التفتيش أقل ما يمكن.

لبناء النموذج الرياضي نفرض عدد المفتشين من المراتب الثلاثة على الترتيب المكلفين بمهمة التفتيش عندها يجب أن تتحقق المترجمات:

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_3 \leq 8$$

بما أن الشركة تحتاج إلى تدقيق K قطعة يومياً خلال S ساعة عمل في اليوم الواحد عندها يجب أن تتحقق مجموعة القيود:

$$\sum_{j=1}^n 8M_j x_j \geq 1500$$

أي:

$$8(M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3) \geq 1500$$

ومنه نحصل على القيد:

$$120x_1 + 80x_2 + 200x_3 \geq 1500$$

للحصول على تابع الهدف نلاحظ إن الشركة تتحمل نوعين من التكاليف خلال عملية التفتيش، أجر المفتش والغرامة المقابل للخطأ المرتكب من قبل المفتش عن كل قطعة عندها يكتب تابع الهدف كما يلي:

عندها تحسب تكلفة المفتش من المرتبة j في الساعة من خلال العلاقة:

$$C_j = G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - ND_j}{100} \right) ; j = 1, 2, \dots, n$$

نحصل على:

$$C_1 = 4 + 15 \times 2 \times \left(\frac{100 - [95,97]}{100} \right) \in [4.9, 5.5]$$

$$C_2 = 3 + 10 \times 2 \times \left(\frac{100 - [90,92]}{100} \right) \in [4.6, 5]$$

$$C_3 = 5 + 25 \times 2 \times \left(\frac{100 - [98,99.5]}{100} \right) \in [5.25, 6]$$

ويكون مجموع التكاليف لجميع المفتشين المكلفين بمهمة ضبط الجودة في الساعة يعطى بالعلاقة:

$$TC_j = \sum_{j=1}^n \left[G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - ND_j}{100} \right) \right] x_j$$

$$TC_j = [4.9, 5.5]x_1 + [4.6, 5]x_2 + [5.25, 6]x_3$$

بالتعويض بعبارة تابع الهدف:

$$Z = S \sum_{j=1}^n \left[G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - ND_j}{100} \right) \right] x_j$$

نحصل على:

$$Z = [39.2,44]x_1 + [36.8,40]x_2 + [42,48]x_3$$

مما سبق نستطيع وضع النموذج الرياضي:

أوجد:

$$MinZ = [39.2,44]x_1 + [36.8,40]x_2 + [42,48]x_3$$

ضمن القيود:

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_3 \leq 8$$

$$120x_1 + 80x_2 + 200x_3 \geq 1500$$

$$x_j \geq 0 ; j = 1,2,3$$

8-7- مسألة تحديد التكلفة:

يتأثر ربح أي شركة يمكنها أن تنتج عدد من المنتجات بالاختيار الأمثل للمنتجات التي ستقوم بإنتاجه من مجموعة المنتجات التي تستطيع إنتاجها ولمساعدة هذه الشركات على اختيار المنتجات التي تحقق لها ربح اعظمي قدمت بحوث العمليات نماذج رياضية خطية سميت بخليط المنتجات وبما أن الحل الأمثل لأي نموذج خطي قد تكون إحدى مركباته أو جميعها قيم غير صحيحة قام الباحثون بصياغة النموذج المناسب لمثل هذه المسائل استخدم المتحول الصحيح الثنائي δ الذي يأخذ إحدى القيمتين 0 or 1 وهنا الواحد يوافق قرار إنتاج المنتج والصفير قرار عدم الإنتاج:

نص المسألة وفق علم النيتروسوفيك:

تريد شركة التخطيط لإنتاج N منتج حيث يحتاج المنتج j إلى كلفة تحضير ثابتة أو كلفة إنتاج ثابتة K_j مستقلة عن الكمية المنتجة ، ويحتاج إلى كلفة متغيرة $C_j + \mu_j$ لكل وحدة انتاج تتناسب مع الكمية المنتجة ، لنفرض أن كل وحدة من المنتج j تحتاج a_{ij} وحدة من المورد i حيث يوجد M مورد ن بفرض أن المنتج j الذي له فرصة مبيعات قدرها $d_j + \varepsilon_j$ وبياع بسعر $P_j + \varphi_j$ وحدة نقدية لكل وحدة وأنه يتوفر فقط b_j وحدة من المورد i حيث $i = 1, 2, \dots, M$ يصبح هدف المسألة تعين خليط المنتجات الأمثل الذي يجعل الربح الصافي أعظم ما يمكن صياغة النموذج الرياضي:

تحدد التكلفة:

من نص المسألة نلاحظ أن التكلفة الكلية للإنتاج هي عبارة عن التكلفة الثابتة بالإضافة إلى الكلفة المتغيرة وهي عبارة عن تابع لا خطي بالنسبة للكمية المنتجة، ولكن بمساعدة المتحولات الصحيحة الثنائية δ_j يمكن صياغة المسألة بشكل نموذج خطي ذي أعداد صحيحة

نفرض أن المتحول الصحيح الثنائي δ_j يرمز إلى القرار بإنتاج المنتج j أو عدم إنتاجه بعبارة أخرى:

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا اتخذ قرار بإنتاج المنتج } j \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عندها تصبح تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج j على الشكل التالي:

$K_j \delta_j + (C_j + \mu_j)x_j$ حيث $\delta_j = 1$ إذا كان $x_j > 0$ و $\delta_j = 0$ إذا كان $x_j = 0$ وبالتالي فإن تابع الهدف يكتب كما يلي:

$$Z = \sum_{j=1}^N (P_j + \varphi_j) x_j - \sum_{j=1}^N (K_j \delta_j + (C_j + \mu_j)x_j)$$

قيود المسألة:

قيد على المورد i يعطى بالعلاقة:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_j ; i = 1, 2, \dots, M$$

قيد الطلب على المنتج j يعطى بالعلاقة:

$$x_j \leq (d_j + \varepsilon_j) \delta_j ; j = 1, 2, \dots, N$$

النموذج الرياضي: أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = \sum_{j=1}^N (P_j + \varphi_j) x_j - \sum_{j=1}^N (K_j \delta_j + (C_j + \mu_j)x_j)$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_j ; i = 1, 2, \dots, M$$

$$x_j \leq (d_j + \varepsilon_j) \delta_j ; j = 1, 2, \dots, N$$

$x_j \geq 0$ و $\delta_j = 1$ أو $\delta_j = 0$ من أجل جميع قيم $j = 1, 2, \dots, N$

النموذج السابق نلاحظ أن x_j يأخذ قيمة موجبة فقط عندما يكون $\delta_j = 1$ وفي

هذه الحالة يكون إنتاج المنتج j محددًا بالكمية $d_j + \varepsilon_j$ وكلفة الإنتاج الثابتة K_j

متضمنة في تابع الهدف، بحل هذا النموذج نحصل على قيمة نيتروسوفيكية مثلى

لتابع الهدف NZ^* نعلم من خلالها الربح الذي يمكن أن تحققه الشركة في أحسن

وأسوأ الظروف ويمكن الشركة من وضع الخطط المناسبة لسير العمل فيها.

الخاتمة:

من خلال الدراسة السابقة نلاحظ أنه باستخدام أسلوب البرمجة الخطية نستطيع تقديم الحل الأمثل لمعظم المشاكل التي يمكن أن تواجه الشركات الإنتاجية وذلك بصياغة الحالة قيد المعالجة بمسألة يمكن تحويلها إلى نموذج خطي، حله الأمثل يساعد صناع القرار على اتخاذ قرارات مثالية لسير العمل بحيث يتم تحقيق أكبر ربح ممكن، ومن أجل الحصول على حلول تتمتع بهامش من الحرية يمكن استخدامنا البيانات قيم نيتروسوفيقية قيم تراعي جميع الظروف التي يمكن تمر بها المنظومة التي يمثلها النموذج الخطي.

المراجع العلمية

1. Florentin Smarandache, Maissam Jdid, On Overview of Neutrosophic and Plithogenic Theories and Applications, Applied Mathematics and Data Analysis, Vo .2, No .1, 2023
2. L. A. ZADEH. Fuzzy Sets. Inform. Control 8 (1965).
3. Linear and Nonlinear Programming-DavidG. Luenbrgrr.YinyuYe-Springer Science + Business Media-2015.
4. Maissam Jdid, Operations Research, Faculty of Informatics Engineering, Al-Sham Private University Publications,2021. (Arabic version).
5. Bugaha J.S, Mualla.W, and others -Operations Research Translator into Arabic, The Arab Center for Arabization, Translation, Authoring and Publishing, Damascus,1998. (Arabic version).
6. Alali. Ibrahim Muhammad, Operations Research. Tishreen University Publications, 2004. (Arabic version).
7. Al Hamid. Mohammed Dabbas, Mathematical programming, Aleppo University, Syria, 2010. (Arabic version).
8. Maissam Jdid, Huda E Khalid, Mysterious Neutrosophic Linear Models, International Journal of Neutrosophic Science, Vol.18, No. 2, 2022.
9. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, The Graphical Method for Finding the Optimal Solution for Neutrosophic linear Models and Taking Advantage of Non-Negativity Constraints to Find the Optimal Solution for Some Neutrosophic linear Models in Which the Number of Unknowns is More than Three, Journal Neutrosophic Sets and Systems, NSS Vol.58,2023.
10. Maissam Jdid, AA Salama, Huda E Khalid ,Neutrosophic Handling of the Simplex Direct Algorithm to Define the Optimal Solution in Linear Programming ,International Journal of Neutrosophic Science, Vol.18,No. 1, 2022.
11. Maissam Jdid, Florentin Smarandache ,Neutrosophic Treatment of the Modified Simplex Algorithm to find the Optimal Solution for

- Linear Models , International Journal of Neutrosophic Science, Vol.23,No. 1, 2023.
12. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, Neutrosophic Treatment of Duality Linear Models and the Binary Simplex Algorithm, Applied Mathematics and Data Analysis, Vo .2, No .2, 2023.
 13. Maissam Jdid, Some Important Theories about Duality and the Economic Interpretation of Neutrosophic Linear Models and Their Dual Models, Applied Mathematics and Data Analysis, Vo .2, No .2, 2023.
 14. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, Optimal Agricultural Land Use: An Efficient Neutrosophic Linear Programming Method, Journal of Neutrosophic Systems with Applications, Vol. 10, 2023.
 15. Maissam Jdid, The Use of Neutrosophic linear Programming Method in the Field of Education, Handbook of Research on the Applications of Neutrosophic Sets Theory and Their Extensions in Education, Chapter 15, IGI-Global,2023.
 16. Maissam Jdid, Neutrosophic Mathematical Model of Product Mixture Problem Using Binary Integer Mutant, Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems (JNFS), Vol .6, No .2, 2023.
 17. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, Said Broumi, Inspection Assignment Form for Product Quality Control, Journal of Neutrosophic Systems with Applications, Vol. 1, 2023.
 18. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, The Use of Neutrosophic Methods of Operation Research in the Management of Corporate Work, Journal of Neutrosophic Systems with Applications, Vol. 3, 2023.

المراجعة اللغوية



الأستاذة ميسون سعيد لباييدي

- مواليد: حماة في الخامس من آذار 1962.
- المؤهل العلمي:
- إجازة في اللغة العربية وآدابها – جامعة دمشق 1994.
- ماجستير في اللغة العربية – جامعة حلب 1998.
- الأعمال سابقاً:
- تدريس مادة اللغة العربية في مدارس تربية دمشق (15) سنة.
- تدقيق كتب جامعية لغة " المؤلفات بجامعة الشام الخاصة.
- العمل الحالي: رئيس قسم التدقيق اللغوي منذ 2017 جامعة الشام الخاصة.

المراجعة العلمية



الدكتور منتجب الحسن

Faculty of Science, Al-Baath University , Homs, Syria

Email: alhasanmountajab@gmail.com

- مواليد: حمص في اليوم الثامن والعشرين من شهر تشرين ثاني عام 1966
- الشهادة العلمية: دكتوراه (Ph. D) في العلوم الرياضية (ميكانيك أوساط مستمرة) من جامعة فروتسواف للعلوم والتكنولوجيا – بولندا.
- مكان العمل الحالي: عضو هيئة تدريسية في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث منذ عام 2003
- مكان العمل سابقاً:
- محاضر في جامعة الحواش الخاصة منذ عام 2020 حتى 2023
- محاضر في كلية العلوم بجامعة حماه منذ عام 2021 حتى 2023.
- محاضر في كلية العلوم بجامعة طرطوس منذ عام 2016 حتى عام 2022.
- استاذ مشارك زائر في كلية الاقتصاد في جامعة البعث (فرع حماه) من 2009 حتى 2011.
- استاذ مشارك زائر في كلية الهندسة الكهربائية جامعة حلب في العامين 2004 و2005.
- ناشر- 43 بحث علمي في مجلات محكمة محلية وخارجية.
- مشرف على 21 رسالة ماجستير ودكتوراه في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.



خليفة بن زايد الشقسي

Department of Mathematical and Physical Sciences, College of Arts and Sciences

University of Nizwa, Nizwa, Oman

Khalifa.alshaqsi@unizwa.edu.om

- من مواليد بهلاء في اليوم السادس عشر من شهر ديسمبر عام 1976
- المنشأ: بهلاء.
- الشهادة العلمية: دكتوراه (PhD) في التحليل المركب من الجامعة الوطنية الماليزية.
- مكان العمل الحالي:
- عضو هيئة تدريس في جامعة نزوى – كلية العلوم والآداب - قسم العلوم الرياضية والفيزيائية منذ 2020م.
- مكان العمل سابقاً:
- عضو هيئة تدريس – جامعة التقنية والعلوم التطبيقية – الكلية التقنية بنزوى
- معلم ومشرف تربوي رياضيات – وزارة التربية والتعليم 1999 – 2013.



دكتورة ندى عادل نبيه
مدرس كلية الحاسبات والمعلومات
قسم نظم المعلومات
جامعة المنصورة جمهورية مصر العربية
nadaadel@mans.edu.eg

- بكالوريوس من جامعة المنصورة (ممتاز مع مرتبة الشرف الأول) في عام 2011.
- ماجستير، في نظم المعلومات جامعة المنصورة في عام 2015. دكتوراه، في نظم المعلومات من جامعة المنصورة في عام 2019.
- أكثر من عشر سنوات من الخبرة في التدريس والبحث العلمي.
- العمل الحالية مدرس في كلية الحاسبات والمعلومات جامعة المنصورة في مصر.

الاهتمامات البحثية:

- مجموعات نيتروسوفيقية.
- التعلم الآلي.
- أنظمة دعم القرار؛ صنع القرار متعدد المعايير.
- الصناعة 4.0
- البيانات الضخمة.
- المدينة الذكية.
- إنترنت الأشياء.
- الشبكات العصبية.
- الذكاء الاصطناعي؛ الخوارزميات التطورية.

النماذج الخطية النيتروسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

ISBN 978-1-59973-778-2



Biblio Publishing
1091 West 1st Ave
Grandview Heights, OH 43212
United States of America
Ph. 614.485.0721

[Em. Info@BiblioPublishing.com](mailto:Info@BiblioPublishing.com)
<https://BiblioPublishing.com/>

2022-2023



**NEUTROSOPHIC LINEAR MODELS
AND ALGORITHMS TO FIND THEIR
OPTIMAL SOLUTION**

2022-2023