FLORENTIN SMARANDACHE

Generalisations du théorème de Ceva

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”. Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984

GENERALISATIONS DU THEOREME DE CEVA

Dans ces paragraphes on présente trois généralisations du célèbre théorème de Ceva, dont l'énoncé est :
"Si dans un triangle ABC on trace les droites concourantes AA_1, BB_1, CC_1 alors $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1$".

<u>Théorème</u> : Soit le polygone $A_1A_2\ldots A_n$, un point M dans son plan , et une permutation circulaire $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$. On note M_{ij} les intersections de la droite A_iM avec les droites $A_{i+s}A_{i+s+1}, \ldots, A_{i+s+t-1}A_{i+s+t}$ (pour tous i et j, $j \in \{i+s,\ldots,i+s+t-1\}$).
Si $M_{ij} \neq A_k$ pour tous les indices respectifs, et si $2s+t = n$, on a :

$$\prod_{i=1}^{n}\ \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = (-1)^n \quad \text{(s et t naturels non nuls).}$$

<u>Démonstration analytique</u> : Soit M un point dans le plan du triangle ABC , tel qu'il satisfasse aux conditions du théorème. On choisit un système cartésien d'axes , tel que les deux parallèles aux axes qui passent par M ne passent par aucun point A_i (ce qui est possible).
On considère $M(a,b)$, où a et b sont des variables réelles, et $A_i(X_i,Y_i)$, où X_i et Y_i sont connues , $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
Le choix antérieur nous assure les relations suivantes :
$X_i - a \neq 0$ et $Y_i - b \neq 0$ pour tout i de $\{1,2,\ldots,n\}$.
L'équation de la droite A_iM $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est :
$\frac{x-a}{X_i-a} - \frac{y-b}{Y_i-b} = 0$. On la note $d(x,y;X_i,Y_i) = 0$.

$$\text{On a } \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = \frac{\delta(A_j,A_iM)}{\delta(A_{p(j)},A_iM)} = \frac{d(X_j,Y_j;X_i,Y_i)}{d(X_{p(j)},Y_{p(j)};X_i,Y_i)} = \frac{D(j,i)}{D(p(j),i)}.$$

Où $\delta(A,ST)$ est la distance de A à la droite ST, et où l'on note $D(a,b)$ pour $d(X_a,Y_a;X_b,Y_b)$.
Calculons le produit , où nous utiliserons la convention suivante :
a+b signifiera $\underbrace{p(p(\ldots p}_{\text{b fois}}(a)\ldots))$ et a-b signifiera $\underbrace{p^{-1}(p^{-1}(\ldots p^{-1}}_{\text{b fois}}(a)\ldots))$

$$\prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} = \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{D(j,i)}{D(j+1,i)} =$$

$$\frac{D(i+s,i)}{D(i+s+1,i)}\cdot\frac{D(i+s+1,i)}{D(i+s+2,i)}\cdots\frac{D(i+s+t-1,i)}{D(i+s+t,i)} = \frac{D(i+s,i)}{D(i+s+t,i)} = \frac{D(i+s,i)}{D(i-s,i)}.$$

Le produit initial est égal à :

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{D(i+s,i)}{D(i-s,i)} = \frac{D(1+s,1)}{D(1-s,1)}\,\frac{D(2+s,2)}{D(2-s,2)}\cdots\frac{D(2s,s)}{D(n,s)}\cdot\frac{D(2s+1,s+1)}{D(1,s+1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{D(2s+2,s+2)}{D(2,s+2)}\cdots\frac{D(2s+t,s+t)}{D(t,s+t)}\cdot\frac{D(2s+t+1,s+t+1)}{D(t+1,s+t+1)}\cdot\frac{D(2s+t+2,s+t+2)}{D(t+2,s+t+2)}\cdots$$

$$\cdots\frac{D(2s+t+s,s+t+s)}{D(t+s,s+t+s)} = \frac{D(1+s,1)}{D(1,1+s)}\cdot\frac{D(2+s,2)}{D(2,2+s)}\cdots\frac{D(2s+t,s+t)}{D(s+t,2s+t)}\cdots\frac{D(s,n)}{D(n,s)} =$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{D(i+s,i)}{D(i,i+s)} = \prod_{i=1}^{n}\left(-\frac{P(i+s)}{P(i)}\right) = (-1)^n \text{ parce que :}$$

$$\frac{D(r,p)}{D(p,r)} = \frac{\dfrac{X_r-a}{X_p-a}-\dfrac{Y_r-b}{Y_p-b}}{\dfrac{X_p-a}{X_r-a}-\dfrac{Y_p-b}{Y_r-a}} = -\frac{(X_r-a)(Y_r-b)}{(X_p-a)(Y_p-b)} = -\frac{P(r)}{P(p)} \quad ,$$

la dernière égalité résultant de ce que l'on note : $(X_t-a)(Y_t-b) = P(t)$. De (1) il résulte que $P(t) \neq 0$ pour tout t de $\{1,2,\ldots,n\}$. La démonstration est terminée.

Commentaires sur le théorème :

t représente le nombre des droites du polygone qui sont coupées par une droite $A_{i_o}M$; si on note les côtés A_iA_{i+1} du polygone a_i, alors $s+1$ représente l'ordre de la première droite coupée par la droite A_1M (c'est a_{s+1} la première droite coupée par A_1M).

Exemple : Si $s = 5$ et $t = 3$, le théorème dit que :

- la droite A_1M coupe les côtés A_6A_7 , A_7A_8 , A_8A_9 .
- la droite A_2M coupe les côtés A_7A_8 , A_8A_9 , A_9A_{10}.
- la droite A_3M coupe les côtés A_8A_9 , A_9A_{10} , $A_{10}A_{11}$,

etc...

Observation : la condition restrictive du théorème est nécessaire pour l'existence des rapports $\dfrac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}}$.

Conséquence 1 : Soient un polygone $A_1A_2\ldots A_{2k+1}$ et un point M dans son plan. Pour tout i de $\{1,2,\ldots,2k+1\}$, on note M_i l'intersection de la droite $A_iA_{p(i)}$ avec la droite qui passe par M et par le sommet opposé à cette droite. Si $M_i \notin \{A_i , A_{p(i)}\}$ alors on a :

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{p(i)}}} = -1 \quad .$$

La démonstration résulte immédiatement du théorème, puisqu'on a $s = k$ et $t = 1$, c'est-à-dire $n = 2k+1$.

La réciproque de cette conséquence n'est pas vraie.

D'où il résulte immédiatement que la réciproque du théorème n'est pas non plus vraie.

Contre-exemple :

On considère un polygone de 5 côtés. On trace les droites A_1M_3, A_2M_4 et A_3M_5 concourantes en M.

Soit $K = \dfrac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_4}} \cdot \dfrac{\overline{M_4A_4}}{\overline{M_4A_5}} \cdot \dfrac{\overline{M_5A_5}}{\overline{M_5A_1}}$

Puis on trace la droite A_4M_1 telle qu'elle ne passe pas par M et telle qu'elle forme le rapport : (2)

$\dfrac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}} = 1/K$ ou $2/K$. (on choisit l'une de ces valeurs, pour que A_4M_1 ne passe pas par M).

A la fin on trace A_5M_2 qui forme le rapport $\dfrac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}} = -1$ ou $-\dfrac{1}{2}$

en fonction de (2). Donc le produit :

$$\prod_{i=1}^{5} \frac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{p(i)}}} = -1$$ sans que les droites respectives soient concourantes.

Conséquence 2 : Dans les conditions du théorème, si pour tout i et j, $j \notin \{i, p^{-1}(i)\}$, on note $M_{ij} = A_iM \cap A_jA_{p(j)}$, et $M_{ij} \notin \{A_j, A_{p(j)}\}$, alors on a :

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ j \notin \{i, p^{-1}(i)\}}}^{n} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = (-1)^n .$$

En effet on a $s=1$, $t=n-2$, et donc $2s+t = n$.

Conséquence 3 : Pour $n = 3$, il vient $s = 1$ et $t = 1$, càd on obtient (comme cas particulier) le théorème de Céva.