T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK DEĞERLİ NEUTROSOPHIC ESNEK GRAFLAR

GÜVEN KARA

DOKTORA TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Güven KARA tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK danışmanlığında yürütülen “Aralık Değerli Neutrosophic Esnek Graflar” adlı bu tez, jürimiz tarafından 17 / 01 / 2019 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Başkan	:	Prof. Dr. Sultan YAMAK Matematik, Karadeniz Teknik Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Murat BEŞENK Matematik, Pamukkale Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

05 / 02 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu’nun 08 / 02 / 2019 tarih ve 2019 / 84 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Güven KARA

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-1811 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖZET

ARALIK DEĞERLİ NEUTROSOPHIC ESNEK GRAFLAR

Güven KARA

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019
Doktora Tezi, 161s.

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Bu tezin amacı, aralık değerli neutrosophic esnek graf kavramını vermek, temel özelliklerini incelemek ve elde edilen sonuçlar arasındaki ilişkiyi araştırmaktır.

Bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. 1. bölümde gerekli alt yapıyı sağlamamıza yardımcı olan ve tez konusuyla bağlantılı birçok çalışmayı ele alan literatür taramasına yer verilmiştir. 2. bölümde çalışmamızın temelini oluşturan bulanık küme, neutrosophic küme, esnek küme, graf, esnek graf ve neutrosophic esnek graf kavramları verilerek bu kavramlarla ilgili teoremler ifade edilmiştir. 3. bölümde aralık değerli neutrosophic küme ve aralık değerli neutrosophic graf kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiştir. 4. bölümde aralık değerli neutrosophic esnek küme ve aralık değerli neutrosophic esnek graf kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiştir. Ayrıca aralık değerli neutrosophic esnek grafların bir karar verme problemi üzerinde ki uygulaması ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, Neutrosophic küme, Aralık değerli neutrosophic esnek küme, Aralık değerli neutrosophic graf, Aralık değerli neutrosophic esnek graf

ABSTRACT

INTERVAL VALUED NEUTROSOPHIC SOFT GRAPHS

Güven KARA

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2019
PhD. Thesis, 161p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK

The aim of this thesis is to give the concept of interval valued neutrosophic soft graph, to examine the basic properties of it and to investigate the relationship between the obtained results.

This study consist of four main chapters. In chapter 1, a review of the literature that deals with many studies related to the thesis topic is given to help us to provide the necessary background. In the Chapter 2, the concepts of fuzzy set, neutrosophic set, soft set, graph, soft graph and neutrosophic soft graph which are the basis of our study are given and theorems related to these concepts are stated. In chapter 3, the concepts of interval valued neutrosophic sets and interval valued neutrosophic graphs are given and the algebraic properties of them are examined. In the chapter 4, the concepts of interval valued neutrosophic soft set and interval-valued neutrosophic soft graph are introduced and the algebraic properties of them are examined. Also, the application of the interval valued neutrosophic soft graphs on a decision making problem is discussed.

Key Words: Soft set, Neutrosophic set, Interval valued neutrosophic soft set, Interval valued neutrosophic graph, Interval valued neutrosophic soft graph

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK olmak üzere Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkür ederim. Ayrıca Ordu Üniversitesi BAP Koordinatörlüğüne B-1811 numaralı proje ile vermiş oldukları destek için teşekkür ederim.

Aynı zamanda, her zaman yanımda olan, hiçbir yardımı esirgemeyen, manevi desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim aileme de sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÇİZELGELER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

I^X	: X kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık kümelerin ailesi
$\mu \leq \eta$	: η, μ yü kapsar
$\vee$	: Bulanık kümelerin birleşimi
$\wedge$	: Bulanık kümelerin arakesiti
A_N	: A neutrosophic kümesi
$N(X)$	: X üzerindeki tüm neutrosophic kümelerin ailesi
$\subseteq_N$	: Neutrosophic alt küme
$=_N$	: Neutrosophic eşit küme
$\amalg_N$	: Neutrosophic kümelerin birleşimi
$\sqcap_N$	: Neutrosophic kümelerin arakesiti
$\coprod_N$	: Neutrosophic kümelerin genelleştirilmiş birleşimi
$\prod_N$	: Neutrosophic kümelerin genelleştirilmiş arakesiti
A_N^t	: Neutrosophic kümenin tümleyeni
$\varnothing_N$	: Boş neutrosophic küme
Ω_N	: Tam neutrosophic küme
(F, A)	: (F, A) esnek kümesi
$\subseteq_E$	: Esnek alt küme

$(F\ ,A)_N$	: $(F\ ,A)_N$ neutrosophic esnek kümesi
$NE(X)$	: X üzerindeki tüm neutrosophic esnek kümelerin ailesi
$\subseteq_{NE}$	: Neutrosophic esnek alt küme
$=_{NE}$	: Eşit neutrosophic esnek küme
$\varnothing_A$	: Kısmi boş neutrosophic esnek küme
Ω_A	: Kısmi tam neutrosophic esnek küme
$\varnothing_E$	: Boş neutrosophic esnek küme
Ω_E	: Tam neutrosophic esnek küme
$\overline{(F\ ,A)}_N$	: $\overline{(F\ ,A)}_N$ neutrosophic esnek kümenin tümleyeni
$\cup_N$	: Neutrosophic esnek kümelerin genişletilmiş birleşimi
$\amalg_N$	: Neutrosophic esnek kümelerin daraltılmış birleşimi
$\cap_N$	: Neutrosophic esnek kümelerin genişletilmiş arakesiti
Π_N	: Neutrosophic esnek kümelerin daraltılmış arakesiti
$\times_N$	: Neutrosophic esnek kümelerin kartezyen çarpımı
$G^* = (V, E)$	: G^* basit grafı
G_N	: Neutrosophic graf
$\bar{G}_N$	: Neutrosophic grafın tümleyeni
G_E	: Esnek graf

$EG(G^{*})$	: G^{*} üzerindeki tüm esnek grafların ailesi
$\sqsubseteq_{E}$	: Esnek alt graf
$\cup_{E}$	: Esnek grafların genişletilmiş birleşimi
$\amalg_{E}$	: Esnek grafların daraltılmış birleşimi
$\cap_{E}$	: Esnek grafların genişletilmiş arakesiti
Π_{E}	: Esnek grafların daraltılmış arakesiti
$\vee_{E}$	: Esnek grafların $\vee$- birleşimi
$\wedge_{E}$	: Esnek grafların $\wedge$- arakesiti
$\times_{E}$	: Esnek grafların kartezyen çarpımı
G_{NE}	: Neutrosophic esnek graf
$\sqsubseteq_{NE}$	: Neutrosophic esnek alt graf
$\bigcup$	: Neutrosophic esnek grafların genişletilmiş birleşimi
$\coprod$	: Neutrosophic esnek grafların daraltılmış birleşimi
$\bigcap$	: Neutrosophic esnek grafların genişletilmiş arakesiti
$\prod$	: Neutrosophic esnek grafların daraltılmış arakesiti
$\bar{G}_{NE}$	: Neutrosophic esnek grafın tümleyeni
$\hat{A}$	: $\hat{A}$ aralık değerli neutrosophic kümesi
$ADN(X)$	: X üzerindeki tüm aralık değerli neutrosophic kümelerin ailesi
$\hat{\varnothing}$	: Boş aralık değerli neutrosophic küme

$\hat{\Omega}$	: Tam aralık değerli neutrosophic küme
$\bar{\hat{A}}$	: Aralık değerli neutrosophic kümenin tümleyeni
$\hat{\subseteq}$	: Aralık değerli neutrosophic alt küme
$\hat{\cup}$	: Aralık değerli neutrosophic kümelerin birleşimi
$\hat{\cap}$	: Aralık değerli neutrosophic kümelerin arakesiti
$\hat{\times}$	: Aralık değerli neutrosophic kümelerin kartezyen çarpımı
$\hat{G}=(G^{*},A,B)$	: $\hat{G}$ aralık değerli neutrosophic grafı
$\hat{\sqsubseteq}$	: Aralık değerli neutrosophic alt graf
$\hat{\otimes}$	: Aralık değerli neutrosophic grafların kartezyen çarpımı
$\hat{\odot}$	: Aralık değerli neutrosophic grafların güçlü çarpımı
ô	: Aralık değerli neutrosophic grafların bileşkesi
$\hat{\bigcup}$	: Aralık değerli neutrosophic grafların birleşimi
$\hat{\bigcap}$	: Aralık değerli neutrosophic grafların arakesiti
(Υ, E)	: Aralık değerli neutrosophic esnek küme
$ADNE(X)$	: X üzerindeki tüm aralık değerli neutrosophic esnek kümelerin ailesi
$(\tilde{\varnothing}, E)$	: Boş aralık değerli neutrosophic esnek küme
$(\tilde{\Omega}, E)$	: Tam aralık değerli neutrosophic esnek küme
$\tilde{\subseteq}$	: Aralık değerli neutrosophic esnek alt küme
$(\Upsilon, E)^{t}$	: Aralık değerli neutrosophic esnek kümenin tümleyeni

$\tilde{\cup}$: Aralık değerli neutrosophic esnek kümelerin genişletilmiş birleşimi

$\tilde{\sqcup}$: Aralık değerli neutrosophic esnek kümelerin daraltılmış birleşimi

$\tilde{\cap}$: Aralık değerli neutrosophic esnek kümelerin genişletilmiş arakesiti

$\tilde{\sqcap}$: Aralık değerli neutrosophic esnek kümelerin daraltılmış arakesiti

$\tilde{\times}$: Aralık değerli neutrosophic kümelerin kartezyen çarpımı

$\tilde{G}$: $\tilde{G}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafı

$\tilde{\sqsubseteq}$: Aralık değerli neutrosophic esnek alt graf

$\tilde{\otimes}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların kartezyen çarpımı

$\tilde{\odot}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların güçlü çarpımı

$\tilde{o}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların bileşkesi

$\tilde{\bigcup}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların genişletilmiş birleşimi

$\tilde{\bigsqcup}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların daraltılmış birleşimi

$\hat{\bigcap}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların genişletilmiş arakesiti

$\tilde{\prod}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların daraltılmış arakesiti

$\bar{\tilde{G}}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafın tümleyeni

$\tilde{\bigvee}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların $\vee$- birleşimi

$\tilde{\bigwedge}$: Aralık değerli neutrosophic esnek grafların $\wedge$- arakesiti

$H_{\tilde{\vee}}$: $\tilde{G}$ nin alt graflarının parametrik $\vee$- birleşimi

$H_{\tilde{\wedge}}$: $\tilde{G}$ nin alt graflarının parametrik $\wedge$- arakesiti

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda karşılaştığımız bazı olaylar belirsizlik ve doğrusal olmama özellikleri taşıdığı için bunları kesin tanımlamalarla açıklamak ve ifade etmeye çalışmak mümkün olmayabilir. Belirsizliğin farklı türlerine iktisat, biyoloji, fizik, mühendislik, tıp ve sosyal bilimler gibi birçok alanda sıkça rastlanmaktadır. Belirsizlik, açıkça tanımlanmamış, karmaşık ve geniş bir kavram olduğu için belirsizlikle ilgilenen birçok çalışma alanı bu durumu klasik matematiksel yöntemlerle başarılı bir şekilde modelleme konusunda yetersiz kalmıştır. Bundan dolayı bilim adamları belirsizliği anlamak, kavramak ve buna uygun çözümler önermek için birçok teori geliştirmeye çalışmıştır. Bulanık küme teorisi [64], esnek küme teorisi [42], yaklaşımlı küme teorisi [46] ve neutrosophic küme teorisi [52] iyi bilinen ve belirsizlik içeren problemleri modellemek için kullanılan yaygın matematiksel yaklaşımlardır.

Klasik küme teorisinde bir elemanın bir kümeye ait olması sadece 0 ve 1 sayıları kullanılarak mutlak bir biçimde derecelendirilir. Oysa gerçek hayatta bir olguya değer vermede ara geçiş değerleri yani bulanık değerleri de kullanırız. Örneğin havanın sıcaklığını değerlendirirken soğuk, biraz soğuk, ılık, biraz sıcak, sıcak gibi derecelendirmeler yaparız. Bu nedenle klasik küme teorisi, ara durum değerlerini ifade etme noktasında yetersiz kalmaktadır. Klasik küme teorisindeki bu yetersiz durum, ilk olarak bulanık mantık ile aşılmak istenmiştir.

Bulanık küme teorisi ilk olarak Zadeh [64] tarafından 1967 yılında ortaya atılmıştır. Bulanık mantığa göre evrendeki bir nesne o evrendeki bir kümenin mutlaka elemanıdır ancak eleman olma derecesi farklıdır. Bir bulanık küme, bir X evrensel kümesinin elemanlarını $[0, 1]$ aralığına götüren bir üyelik fonksiyonu yardımı ile karakterize edilir. Klasik küme teorisinde sadece 0 ve 1 değerlerinden birisi ile temsil edilebilen bir olgu, bulanık mantıkta $[0, 1]$ aralığında sonsuz değer alabilir. Böylece bir olgu, bulanık mantık yaklaşımında kesin olmayan (belirsiz) değerlere de sahip olabilir. Bulanık mantık denetleyicileri kullanılarak elektrikli ev aletlerinden oto elektroniğine, gündelik kullandığımız iş makinelerinden üretim mühendisliğine, endüstriyel denetim teknolojilerinden otomasyona kadar birçok alanda uygulama alanı bulmuştur.

Bulanık A kümesinde bir x elemanın kümeye ait olma derecesi $\mu_A(x)$ iken ait olmama derecesi ise doğal olarak $1 - \mu_A(x)$ dir. Böylece ait olma derecesi ve ait olmama derecelerinin toplamı 1 'e eşittir. Fakat bu yaklaşım gerçek hayatta karşılaşılan uygulamalardaki belirsizliği ele almakta etkin bir yöntem değildir. Çünkü ait olma ve ait olmama derecelerinin toplamı birden küçük olabilmektedir. Bu nedenle Atanassov [10], bulanık kümelerdeki üyelik fonksiyonunun yanına üye olmama fonksiyonunu da ilave ederek daha hassas aidiyet (üyelik) ölçümleri için bulanık küme teorisinin genelleştirilmiş bir hali olan sezgisel bulanık küme teorisini ortaya koymuştur. Daha sonra Atanassov ve Gargow [11] sezgisel bulanık kümeleri, aralık değerli sezgisel bulanık kümelere genişleterek bu yeni kavramın özellikleri üzerinde çalıştı.

Bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorilerinde bir elemanın üye olup, üye olmama gibi değerleri üzerinde durulmasına rağmen bir elemanın belirsizlik durumu üzerinde durulmamıştır. Buradan yola çıkarak Smarandache [52], üye olma fonksiyou ve üye olmama fonksiyonunun yanına üçüncü bir bileşen olarak belirsizlik fonksiyonunu da ilave ederek bulanık mantığın genişletilmiş ve özel bir durumu olan neutrosophic küme teorisini ortaya koydu ve bu teori üzerinde bazı uygulamalar ele aldı. Neutrosophic kümelerde doğru üyelik fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonunun birbirinden bağımsız olması, sezgisel bulanık kümeler kullanılarak yapılan modellemelerden daha esnek ve daha gerçekçi olmasını sağlamaktadır. Ayrıca bir konu hakkında bir birey her zaman tam olarak bilgi sahibi olmayabilir. Bu durumda belirsiz üyelik fonksiyonu devreye girmektedir ve birçok belirsizlik içeren olayın modellenmesi için oldukça geniş bir yer oluşturmaktadır.

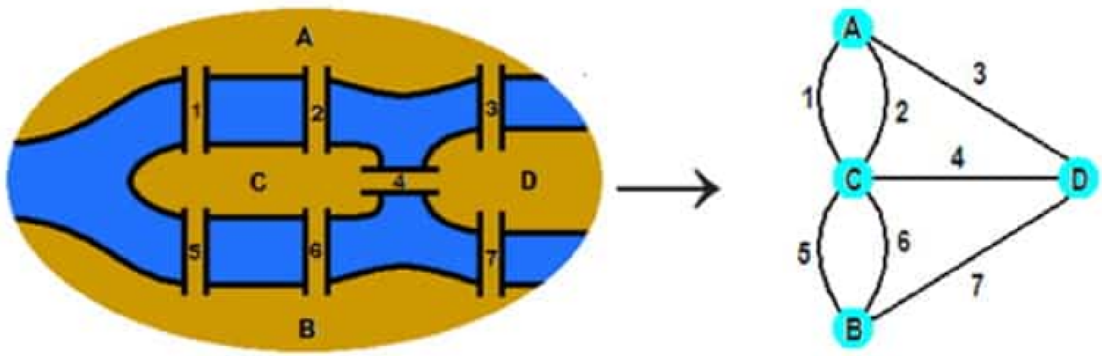
Neutrosophic kümelerde üyelik fonksiyonları $]^{-}0, 1^{+}[$ dış aralığının standart veya standart olmayan alt kümeleri olarak tanımlandığı için neutrosophic kümeleri bilimsel ve mühendislik uygulamalarında kullanmak zor ve elverişsizdi. Wang ve ark. [60] uygulamalarda kolaylık sağlamak için neutrosophic kümelerin bir alt sınıfı olan tek değerli neutrosophic küme kavramını tanımladılar. Wang ve ark. [59] hassas üyelik ölçümleri için tek değerli neutrosophic kümeleri aralık değerli neutrosophic kümelere genişleterek bu kümelerle ilgili bazı işlemler tanımladılar. Zhang ve ark. [66] aralık değerli neutrosophic kümelerde farklı işlemler tanımlayarak karar verme problemi için uygulamalı bir yaklaşım sundular. Lupiañez [36] aralık değerli neutrosophic kümelerde tanımlı işlemleri inceleyerek bunlara bağlı olarak bazı sonuçlar elde etti. Deli [24] aralık değerli neutrosophic kümelerle esnek kümeleri birleştirerek, aralık değerli neutrosophic esnek küme kavramını verdi ve bu kavram üzerinde bazı cebirsel işlemler tanımlayarak aralık değerli neutrosophic kümelerin karar verme problemi üzerinde uygulamasını inceledi.

Esnek küme kavramı belirsizliğe farklı bir yaklaşım olarak ilk kez Molodtsov [42] tarafından tanımlandı. Esnek kümeler birçok yönü ile zengin bir uygulama potansiyeline sahip olup bu uygulamalardan birkaç tanesi Molodtsov [42–44] tarafından kendi çalışmalarında incelendi. Maji ve ark. [39], Pawlak'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptılar ve esnek kümelerde bazı işlemler tanımladılar. Daha sonra esnek kümelerle ilgili olarak Maji ve ark. [38] çeşitli esnek küme işlemlerini tanımladılar. Chen ve ark. [21] esnek kümelerin parametre dönüşümlerini tanımlayarak bir karar verme problemi üzerinde esnek kümelerin uygulamasını geliştirdiler. Ali ve ark. [7] esnek kümelerde iki esnek kümenin daraltılmış arakesiti, daraltılmış birleşimi, genişletilmiş arakesiti ve genişletilmiş birleşimi gibi bazı yeni tanımlar verdiler.

Aktaş ve Çağman [6], esnek küme teorisinin bulanık küme teorisi ve kaba küme teorisi ile olan ilişkisini incelediler. Majumdar ve ark. [40] genelleştirilmiş bulanık esnek küme kavramını verdiler ve bulanık esnek kümelerin karar verme problemi üzerinde uygulamasını yaptılar. Aralık değerli bulanık küme kavramı farklı şekillerde ve birbirinden bağımsız olarak 1970 li yıllarda Zadeh [65], Grattan-Guiness [29], Jahn [33] ve Sambuc [49] tarafından tanımlandı. Gorzalczany [27, 28], tanımladığı aralık değerli bulanık kavramın biçimsel özelliklerinin kısa bir analizini verip zekaya dayalı yaklaşık akıl yürütme probleminde uygulamasını yaptı. Yang ve ark. [63], aralık değerli bulanık esnek küme kavramını verip bu kavramın özelliklerini incelediler.

Maji [37], esnek kümeler ve neutrosophic kümeleri birleştirerek neutrosophic esnek küme kavramını tanımladı ve bu yeni kavrama ait özellikleri inceledi. Broumi [14], neutrosophic esnek kümelerin bir genellemesi olan genelleştirilmiş netrosophic esnek küemeler üzerinde çalıştı ve netrosophic esnek kümelerin karar verme problemi üzerinde uygulamasını yaptı. Broumi [15] sezgisel neutrosophic esnek kümeleri tanımladı.

Bazı büyük bilimsel teoriler basit sorulara aranan yanıtlardan doğmuştur. Graf Teori de bunlardan biridir. Graf teori ilk kez 1735 yılında Euler [26] tarafından ortaya konulmuştur. Graflar, verilen bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi ortaya koymak için kullanılır. Her bir eleman köşe noktaları ve bunlara ait ilişki kenarlar yardımıyla ifade edilebilmektedir.



Graf Teorinin ortaya çıkışına neden olan eski Prusya'daki Königsberg (şimdi Rusya'da Kaliningrad adını almıştır) kentinin meraklı halkıdır. Königsberg kentinde, eski ve yeni Pregel nehirleri birleşerek Pregel (Pregolya) nehrini oluşturmaktadır. Bu nehirler şehri dört bölüme ayırmaktadır ve nehir üzerinde bu bölgeleri birleştiren yedi köprü bulunmaktadır. Merak edilen ise şudur: Kentin belirli bir noktasından hareket edip her köprüden yalnız bir kez geçmek şartıyla başlangıç noktasına dönülebilir mi? Kent halkının meraklı insanları, farklı noktalardan hareket ederek yedi köprüyü birer kez geçip başladıkları noktaya dönmeyi denedilerse de hiçbiri bu geziyi başaramadı. Kentin ortak merakı haline gelen bu problem o zamanın ünlü matematikçisi Euler (1707-1783) 'in ilgisini çekti. Euler, 1735 yılında, kent akademisine söz konusu gezinin imkânsızlığını kanıtlayan matematiksel ispatını sundu. 1741 yılında bu ispat "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (Konum geometrisiyle ilgili bir problemin çözümü)" adıyla akademinin dergisinde yayınlandı. Euler, meşhur Königsberg Köprüsü sorununa çözüm ararken graf teorinin temellerini atanlardan biri olmuştur. Graf teori, geometri, cebir, sayılar teorisi, topoloji, optimizasyon ve bilgisayar bilimi gibi bir çok farklı alanda karmaşık problemin çözümü için faydalı bir matematiksel araçtır.

Euler'in graf kavramını tanıtmasından sonra Rosenfeld [47], bulanık graf teoriyi Euler'in graf teorisinin bir genellemesi olarak ortaya koydu. Bhattacharya [12] bulanık grafların bazı özelliklerini verdi. Mordeson ve Peng [45] bulanık graflar üzerinde bazı işlemler tanımladılar. Craine, [22] aralık değerli bulanık grafların karakterizasyonunu verdi. Daha sonra birçok araştırmacı [13, 48, 53] bulanık küme kavramını graf teori üzerinde ele alarak farklı yapılar tanımlayıp bunların özelliklerini incelediler. Akram ve Dudek [3] bulanık grafları, aralık değerli bulanık graflara genişleterek bu kavramın özelliklerini incelediler.

Thumbakara ve George [57] esnek graf, esnek alt graf, esnek graf homomorfizması ve esnek tam graf kavramlarını verdiler ve bu yapıların özelliklerini incelediler. Akram ve Nawaz [1] esnek graflar üzerinde bazı yeni cebirsel işlemler tanımladılar. Mohinta ve Samanta [41] bulanık esnek graf kavramını tanımladılar. Daha sonra Akram ve Nawaz [3] bulanık esnek grafların farklı türlerini incelediler ve bulanık esnek grafların uygulamasını yaptılar. Zihni ve ark. [67] aralık değerli bulanık esnek graf kavramını verdiler ve temel özelliklerini incelediler. Çelik [23], bipolar bulanık esnek graf kavramını verdi ve temel özelliklerini inceledi.

Kandasamy ve ark. [34] neutrosophic graf kavramını verdiler ve neutrosophic grafların çeşitli uygulamalarını yaptılar. Akram ve ark. [5] neutrosophic esnek küme kavramı ve graf teoriyi birleştirerek neutrosophic esnek graf, tam neutrosophic esnek graf, güçlü neutrosophic esnek graf gibi farklı graf çeşitleri tanımladı ve neutrosophic esnek grafların karar verme problemi üzerinde uygulamasını yaptı. Shah ve Hussain [51] neutrosophic esnek graflar üzerinde yeni özellikler elde ettiler.

Broumi ve ark. [17] tek değerli neutrosophic graf kavramını vererek bu kavramın özelliklerini araştırdılar. Akram ve Sitara [4] tek değerli neutrosophic küme kavramını graf yapısı üzerinde ele alarak tek değerli neutrosophic graf kavramını tanımladılar ve bu graf yapısının bazı temel özelliklerini ortaya koydular. Dhavaseelan ve ark. [25] tam ve güçlü neutrosophic graf kavramlarını vererek bunların bazı özelliklerini incelediler. Broumi ve ark. tek değerli neutrosophic grafların bir genellemesi olarak aralık değerli neutrosophic graf [16, 18–20] kavramını vererek bazı yeni işlemler tanımladılar ve bu yapının özelliklerini incelediler.

Bu tezin amaçlarından biri aralık değerli neutrosophic esnek küme kavramı ile graf teoriyi birleştirerek yeni bir kavram olarak aralık değerli neutrosophic esnek graf yapısını tanımlamak, bu yeni yapının cebirsel özellikleri detaylı bir şekilde incelemek ve elde edilen sonuçları ortaya koymaktır. Tezin amaçlarından bir diğeri ise aralık değerli neutrosophic esnek grafların karar verme problemlerinde ki uygulamasını değerlendirmek ve buna bağlı olarak yeni sonuçları elde etmektir.

Bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. 1. Bölümde gerekli alt yapıyı sağlamamıza yardımcı olan ve tez konusuyla bağlantılı birçok çalışmayı ele alan literatür taramasına yer verilmiştir. 2. Bölümde çalışmamızın temelini oluşturan bulanık küme, neutrosophic küme, esnek küme, graf, esnek graf ve neutrosophic esnek graf kavramları verilerek bu kavramlarla ilgili teoremler ifade edilmiştir. 3. Bölümde aralık değerli neutrosophic küme ve aralık değerli neutrosophic graf kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiştir. 4. bölümde aralık değerli neutrosophic esnek küme ve aralık değerli neutrosophic esnek graf kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiştir. Ayrıca aralık değerli neutrosophic esnek grafların bir karar verme problemi üzerinde ki uygulaması ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bulanık Kümeler, Sezgisel Bulanık Kümeler, Neutrosophic Kümeler, Esnek Kümeler, Neutrosophic Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1 [64] $\emptyset \neq X$ olmak üzere $\mu : X \to [0,1]$ fonksiyonuna X in bulanık alt kümesi denir ve

$$\mu = \{\big(x, \mu(x)\big) : x \in X, \ \ \mu(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde gösterilir. X kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık alt kümelerin kümesi $F(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 [64] $\mu, \nu \in F(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise ν'ye μ'yü kapsar denir ve $\mu \leq \nu$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 [64] $\mu, \nu \in F(X)$ ve $x \in X$ olsun.

$(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) = max\{\mu(x), \nu(x)\}$

$(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) = min\{\mu(x), \nu(x)\}$

ile tanımlanan bulanık alt kümelere sırasıyla μ ile ν'nün birleşimi ve arakesiti denir.

Tanım 2.1.4 [10] $\emptyset \neq X$ olsun. X üzerinde bir A_S sezgisel bulanık kümesi

$$A_S = \{\big\langle x, T_{A_S}(x), F_{A_S}(x)\big\rangle \mid x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada T_{A_S} ve F_{A_S} fonksiyonları $X \to [0,1]$ tanımlı olup $T_{A_S}(x)$ ve $F_{A_S}(x)$ değerleri $x \in X$ elemanının A_S sezgisel bulanık kümesine sırasıyla üye olma ve üye olmama derecelerini gösterir. Ayrıca A_S sezgisel bulanık kümesinde her $x \in X$ için $T_{A_S+}(x) + F_{A_S}(x) \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. $T_{A_S+}(x) + F_{A_S}(x) = 1$ olması durumunda bulanık küme elde edileceği açıktır.

Tanım 2.1.5 [52] $\emptyset \neq X$ olmak üzere X üzerinde bir A_N neutrosophic kümesi

$$A_N = \Big\{\big\langle x, T_{A_N}(x), I_{A_N}(x), F_{A_N}(x)\big\rangle \mid x \in X\Big\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada T_{A_N}, I_{A_N} ve $F_{A_N} : X \to]^{-}0, 1^{+}[$ tanımlıdır ve her $x \in X$ için

$$^{-}0 \leq T_{A_N}(x) + I_{A_N}(x) + F_{A_N}(x) \leq 3^{+}$$

eşitsizliği sağlanır. X kümesi üzerinde tanımlı tüm neutrosophic kümelerin ailesi $N(X)$ ile gösterilir. Standart olmayan aralıklar uygulamalarda çok elverişli olmadığından tezin kalan kısmında $[0,1]$ aralığı kullanılacaktır.
$T_{A_N}: X \to [0,1]$, $I_{A_N}: X \to [0,1]$ ve $F_{A_N}: X \to [0,1]$ fonksiyonlarına sırasıyla doğru üyelik fonksiyonu, belirsiz üyelik fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.6 [35] $A_N, B_N \in N(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $T_{A_N}(x) \leq T_{B_N}(x)$, $I_{A_N}(x) \geq I_{B_N}(x)$ ve $F_{A_N}(x) \geq F_{B_N}(x)$ oluyorsa A_N'ya, B_N'nin neutrosophic alt kümesi denir ve $A_N \subseteq_N B_N$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7 [35] $A_N, B_N \in N(X)$ olsun. $A_N \subseteq_N B_N$ ve $B_N \subseteq_N A_N$ ise A_N ve B_N kümelerine eşit neutrosophic kümeler denir ve $A_N =_N B_N$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8 [35] $A_N, B_N \in N(X)$ olsun. A_N ve B_N neutrosophic kümelerinin birleşimi $A_N \sqcup B_N$ ile gösterilir ve

$$A_N \sqcup B_N = \Big\{\big\langle x, T_{A_N}(x) \vee T_{B_N}(x), I_{A_N}(x) \wedge I_{B_N}(x), F_{A_N}(x) \wedge F_{B_N}(x)\big\rangle : x \in X\Big\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.9 [35] $A_N, B_N \in N(X)$ olsun. A_N ve B_N neutrosophic kümelerinin arakesiti $A_N \sqcap B_N$ ile gösterilir ve

$$A_N \sqcap B_N = \Big\{\big\langle x, T_{A_N}(x) \wedge T_{B_N}(x), I_{A_N}(x) \vee I_{B_N}(x), F_{A_N}(x) \vee F_{B_N}(x)\big\rangle : x \in X\Big\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.10 [35] $\{A_{N_i} : i \in I\} \subseteq N(X)$ neutrosophic kümelerin bir ailesi verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i \in I} A_{N_i} &= \Big\{\big\langle x, \bigvee_{i \in I} T_{A_{N_i}}(x), \bigwedge_{i \in I} I_{A_{N_i}}(x) \bigwedge_{i \in I} F_{A_{N_i}}(x)\big\rangle : x \in X\Big\} \\ \bigsqcap_{i \in I} A_{N_i} &= \Big\{\big\langle x, \bigwedge_{i \in I} T_{A_{N_i}}(x), \bigvee_{i \in I} I_{A_{N_i}}(x), \bigvee_{i \in I} F_{A_{N_i}}(x)\big\rangle : x \in X\Big\} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.1.11 [35] $A_N \in N(X)$ olsun. A_N neutrosophic kümesinin tümleyeni A_N^t ile gösterilir ve $A_N^t = \big\{\langle x, F_{A_N}(x), 1 - I_{A_N}(x), T_{A_N}(x)\rangle : \ x \in X\big\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.12 [35] $A_N \in N(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $T_{A_N}(x) = 0$ ve $I_{A_N}(x) = F_{A_N}(x) = 1$ ise A_N'ye boş neutrosophic küme denir ve $\emptyset_N$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13 [35] $A_N \in N(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $T_{A_N}(x) = 1$ ve $I_{A_N}(x) = F_{A_N}(x) = 0$ ise A_N'ye tam neutrosophic küme denir ve Ω_N ile gösterilir.

Teorem 2.1.1 [35] A_N,$B_N \in N(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $A_N \sqcap A_N = A_N$ ve $A_N \sqcup A_N = A_N$

ii. $A_N \sqcap B_N = B_N \sqcap A_N$ ve $A_N \sqcup B_N = B_N \sqcup A_N$

iii. $A_N \sqcap \emptyset_N = \emptyset_N$ ve $A_N \sqcap \Omega_N = A_N$

iv. $A_N \sqcup \emptyset_N = A_N$ ve $A_N \sqcup \Omega_N = \Omega_N$

v. $A_N \sqcap (B_N \sqcap C_N) = (A_N \sqcap B_N) \sqcap C_N$ ve $A_N \sqcup (B_N \sqcup C_N) = (A_N \sqcup B_N) \sqcup C_N$

vi. $(A_N^t)^t = A_N$

Teorem 2.1.2 [35] $\{A_{N_i} : i \in I\} \subseteq N(X)$ neutrosophic küme ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

i. $\left(\bigsqcup_{i\in I} A_{N_i}\right)^t = \bigsqcap_{i\in I} A_{N_i}^t$

ii. $\left(\bigsqcap_{i\in I} A_{N_i}\right)^t = \bigsqcup_{i\in I} A_{N_i}^t$

Teorem 2.1.3 [35] $B_N \in N(X)$ ve $\left\{A_{N_i} : i \in I\right\} \subseteq N(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

i. $B \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in I} A_{N_i}\right) = \bigsqcup_{i\in I} \left(B \sqcap A_{N_i}\right)$

ii. $B \sqcup \left(\bigsqcap_{i\in i} A_{N_i}\right) = \bigsqcap_{i\in I} \left(B \sqcup A_{N_i}\right)$

Tanım 2.1.14 [42] $\emptyset \neq X$ bir küme, E bir parametre kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : A \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü ile verilen (F, A) ikilisine X üzerinde bir esnek küme denir. $e \in A$ için $F(e)$ ye (F, A) esnek kümesinin e- yaklaşımlı elemanlarının kümesi denir.

Tanım 2.1.15 [42] (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki esnek küme olsun.(F, A)'ya (G, B)'nin alt kümesi denir $\Leftrightarrow$

i. $A \subseteq B$

ii. Her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$.

Bu durum $(F, A) \subseteq_E (G, B)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.1.16 [37] $\emptyset \neq X$ bir küme, $N(X)$ kümesi X üzerindeki tüm neutrosophic kümelerin bir ailesi, E bir parametre kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : A \rightarrow N(X)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, A) ikilisine X üzerinde bir neutrosophic esnek küme denir. Bu durum $(F, A)_N$ ile gösterilir. Bir neutrosophic esnek küme X kümesinin neutrosophic alt kümelerinin parametreleştirilmiş bir ailesidir. X üzerindeki tüm neutrosophic esnek kümelerin ailesi $NE(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.17 $(F, A)_N$ ve $(G, B)_N$ ikilileri X üzerinde iki neutrosophic esnek küme olsun. $(F, A)_N$ ya $(G, B)_N$ nin alt kümesi denir $\Leftrightarrow$

i. $A \subseteq B$

ii. Her $e \in A$ ve $x \in X$ için $T_{F(e)}(x) \leq T_{G(e)}(x)$, $I_{F(e)}(x) \geq I_{G(e)}(x)$, $F_{F(e)}(x) \geq F_{G(e)}(x)$

Bu durum $(F, A)_N \subseteq_{NE} (G, B)_N$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18 $(F, A)_N$ ve $(G, B)_N$, X üzerinde iki neutrosophic esnek küme olmak üzere $(F, A)_N$, $(G, B)_N$ ye neutrosophic esnek eşittir denir $\Leftrightarrow$ $(F, A)_N \subseteq_{NE} (G, B)_N$ ve $(F, A)_N \supseteq_{NE} (G, B)_N$. Bu durum $(F, A)_N =_{NE} (G, B)_N$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.19 X bir evrensel küme, E bir parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun.

i. $(H, A)_N$, X üzerinde bir neutrosophic esnek küme olsun. Eğer her $e \in A$ ve $x \in X$ için $T_{H(e)}(x) = 1, I_{H(e)}(x) = 0, F_{H(e)}(x) = 0$ ise $(H, A)_N$ ikilisine A parametre alt kümesine göre kısmi tam neutrosophic esnek küme denir ve Ω_A ile gösterilir.

ii. $(H, A)_N$, X üzerinde bir neutrosophic esnek küme olsun. Eğer her $e \in A$ ve $x \in X$ için $T_{H(e)}(x) = 0, I_{H(e)}(x) = 1, F_{H(e)}(x) = 1$ ise $(H, A)_N$ ikilisine A parametre alt kümesine göre kısmi boş neutrosophic esnek küme denir ve $\emptyset_A$ ile gösterilir.

iii. E parametre kümesine göre oluşturulan kısmi tam neutrosophic esnek kümeye, X üzerinde tam neutrosophic esnek küme denir ve Ω_E ile gösterilir.

iv. E parametre kümesine göre oluşturulan kısmi boş neutrosophic esnek kümeye, X üzerinde boş neutrosophic esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.20 Bir $(H, A)_N$ neutrosophic esnek kümesinin tümleyeni $(\overline{H, A})_N = (\overline{H}, A)_N$ şeklinde verilir. Burada $\overline{H} : A \to N(X)$ bir dönüşüm olmak üzere $(\overline{H}, A)_N$ kümesinin üyelik değerleri her $e \in A$ için $T_{\overline{H}(e)} = F_{H(e)}, I_{\overline{H}(e)} = 1 - I_{H(e)}, F_{\overline{H}(e)} = T_{H(e)}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.21 $(H, A)_N$ ve $(G, B)_N$ kümeleri X üzerinde tanımlı iki neutrosophic esnek küme olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere $(H, A)_N$ ve $(G, B)_N$ neutrosophic esnek kümelerinin genişletilmiş birleşimi $(H, A)_N \cup_N (G, B)_N = (K, C)_N$ şeklinde gösterilir ve her $e \in C$ ve $x \in X$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_{K(e)}(x) = \begin{cases} T_{H(e)}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ T_{G(e)}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{T_{H(e)}(x), T_{H(e)}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$I_{K(e)}(x) = \begin{cases} I_{H(e)}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ I_{G(e)}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{I_{H(e)}(x), I_{H(e)}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$F_{K(e)}(x) = \begin{cases} F_{H(e)}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ F_{G(e)}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{F_{H(e)}(x), F_{H(e)}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

Tanım 2.1.22 $(H, A)_N$ ve $(G, B)_N$ kümeleri X üzerinde tanımlı iki neutrosophic esnek küme olsun. $C = A \cap B$ olmak üzere $(H, A)_N$ ve $(G, B)_N$ neutrosophic esnek kümelerinin daraltılmış birleşimi $(H, A)_N \sqcup_N (G, B)_N = (K, C)_N$ şeklinde gösterilir ve her $e \in C$ ve $x \in X$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_{K(e)}(x) = max\{T_{H(e)}(x), T_{G(e)}(x)\}$$

$$I_{K(e)}(x) = min\{I_{H(e)}(x), I_{G(e)}(x)\}$$

$$F_{K(e)}(x) = min\{F_{H(e)}(x), F_{G(e)}(x)\}$$

Tanım 2.1.23 $(H,A)_N$ ve $(G,B)_N$ kümeleri X üzerinde tanımlı iki neutrosophic esnek küme olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere $(H,A)_N$ ve $(G,B)_N$ neutrosophic esnek kümelerinin genişletilmiş arakesiti $(H,A)_N \cap_N (G,B)_N = (K,C)_N$ şeklinde gösterilir ve her $e \in C$ ve $x \in X$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_{K(e)}(x) = \begin{cases} T_{H(e)}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ T_{G(e)}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{T_{H(e)}(x), T_{H(e)}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$I_{K(e)}(x) = \begin{cases} I_{H(e)}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ I_{G(e)}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{I_{H(e)}(x), I_{H(e)}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$F_{K(e)}(x) = \begin{cases} F_{H(e)}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ F_{G(e)}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{F_{H(e)}(x), F_{H(e)}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

Tanım 2.1.24 $(H,A)_N$ ve $(G,B)_N$ kümeleri X üzerinde tanımlı iki neutrosophic esnek küme olsun. $C = A \cap B$ olmak üzere $(H,A)_N$ ve $(G,B)_N$ neutrosophic esnek kümelerinin daraltılmış arakesiti $(H,A)_N \sqcap_N (G,B)_N = (K,C)_N$ şeklinde gösterilir ve her $e \in C$ ve $x \in X$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_{K(e)}(x) = min\{T_{H(e)}(x), T_{G(e)}(x)\}$$

$$I_{K(e)}(x) = max\{I_{H(e)}(x), I_{G(e)}(x)\}$$

$$F_{K(e)}(x) = max\{F_{H(e)}(x), F_{G(e)}(x)\}$$

Tanım 2.1.25 $(H,A)_N$, X üzerinde; $(G,B)_N$, Y üzerinde tanımlı iki neutrosophic esnek küme olsun. $(H,A)_N$ ile $(G,B)_N$ nin kartezyen çarpımı $(H,A)_N \times_N (G,B)_N = (K, A \times B)_N$ şeklinde gösterilir ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ ve $(x,y) \in X \times Y$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_{K(e_1,e_2)}(x,y) = min\{T_{H(e_1)}(x), T_{G(e_2)}(y)\}$$

$$I_{K(e_1,e_2)}(x,y) = max\{T_{H(e_1)}(x), T_{G(e_2)}(y)\}$$

$$F_{K(e_1,e_2)}(x,y) = max\{T_{H(e_1)}(x), T_{G(e_2)}(y)\}$$

2.2 Graflar, Neutrosophic Graflar, Esnek Graflar, Neutrosophic Esnek Graflar

Tanım 2.2.1 [26] Bir G^* grafı sonlu sayıda nesne içeren $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ köşe (düğüm) elemanları kümesiyle $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ kenar elemanları kümesinden oluşur ve $G^* = (V, E)$ ikilisiyle gösterilir. G^* bir graf olmak üzere $\{u, v\}$ kümesi G^* grafının bir kenarı olsun. Sıklıkla bu kenar uv veya vu şeklinde gösterilir. Eğer $e = uv$, G^* grafına ait bir kenar ise u ve v köşe noktalarının G^* grafında komşu (bağlantılı) olduğunu veya e nin u ve v köşe noktalarını birleştirdiğini söyleriz. Herhangi bir köşe ile bağlantılı olmayan bir köşeye ayrık köşe denir.

Tanım 2.2.2 [26] Bir grafın, bir köşesini yine kendisine bağlayan bir kenarına döngü denir.

Tanım 2.2.3 [26] Bir grafta birden fazla kenar iki köşeyi birleştirirse bu kenarlara çoklu kenar veya paralel kenar denir. Çoklu kenar içeren graflarada çoklu graf denir.

Tanım 2.2.4 [26] Döngü ve çoklu kenar içermeyen graflara basit graf denir.

Tanım 2.2.5 [30] Bir G^* grafının alt grafı, tüm köşe noktaları ve kenarları G^* tarafından kapsanan bir graftır.

Tanım 2.2.6 [30] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olmak üzere bu iki grafın birleşimi, köşe elemanları kümesinin birleşimi $V_1 \cup V_2$ ile kenar elemanları kümesinin birleşimi $E_1 \cup E_2$ kümelerinden oluşan basit graftır. Bu durum $G_1^* \cup G_2^* = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7 [30] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olmak üzere bu iki grafın arakesiti, köşe elemanları kümesinin arakesiti $V_1 \cap V_2$ ile kenar elemanları kümesinin arakesiti $E_1 \cap E_2$ kümelerinden oluşan basit graftır. G_1^* ve G_2^* graflarının arakesiti $G_1^* \cap G_2^* = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8 [32] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olsun. G_1^* ve G_2^* nin kartezyen çarpımı $G^* = (V, E) = (V_1 \times V_2, E = \{(uv_1, uv_2) \mid u \in V_1,\ v_1v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1v, u_2v \mid v \in V_2,\ u_1u_2 \in E_1\})$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.9 [32] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olsun. G_1^* ve G_2^* nin güçlü çarpımı $G^* = (V, E) = (V_1 \times V_2, E = \{(uv_1, uv_2) \mid u \in V_1,\ v_1v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1v, u_2v) \mid v \in V_2,\ u_1u_2 \in E_1\} \cup \{(u_1v_1, u_2v_2) \mid u_1u_2 \in E_1,\ v_1v_2 \in E_2,\ u_1 \neq u_2, v_1 \neq v_2\})$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.10 [32] $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olsun. G_1^* ve G_2^* nin bileşkesi $G^* = (V, E) = (V_1 \times V_2, E = \{(uv_1, uv_2) \mid u \in V_1,\ v_1v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1v, u_2v) \mid v \in V_2,\ u_1u_2 \in E_1\} \cup \{(u_1v_1, u_2v_2) \mid u_1u_2 \in E_1,\ v_1 \neq v_2\})$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.11 [25] $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ve $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ bir basit graf olsun. $G_N = (G^*, A_N, B_N)$ üçlüsü aşağıdaki koşulları gerçeklerse G_N ye $G^* = (V, E)$ üzerinde neutrosophic graf denir.

i. A_N, V üzerinde bir neutrosophic küme olup $T_{A_N} : V \to [0,1]$, $I_{A_N} : V \to [0,1]$ ve $F_{A_N} : V \to [0,1]$ fonksiyonları $v_i \in V$ elemanlarının A_N neutrosophic kümesine sırasıyla üye olma, belirsiz üye olma ve üye olmama fonksiyonlarını ifade eder ve her $v_i \in V$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için $0 \leq T_{A_N}(v_i) + I_{A_N}(v_i) + F_{A_N}(v_i) \leq 3$ eşitsizliği sağlanır.

ii. B_N, E üzerinde bir neutrosophic küme olup $T_{B_N} : E \to [0,1]$, $I_{B_N} : E \to [0,1]$ ve $F_{B_N} : E \to [0,1]$ fonksiyonları $v_iv_j \in E$ elemanlarının B_N neutrosophic kümesine sırasıyla üye olma, belirsiz üye olma ve üye olmama fonksiyonlarını ifade eder ve her $v_iv_j \in E$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ için $0 \leq T_{B_N}(v_iv_j) + I_{B_N}(v_iv_j) + F_{B_N}(v_iv_j) \leq 3$ eşitsizliği sağlanır.

iii. $v_iv_j \in E$ için G_N nin köşe noktaları ve kenarları arasında aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$T_{B_N}(v_iv_j) \leq min\{T_{A_N}(v_i), T_{A_N}(v_j)\}$

$I_{B_N}(v_iv_j) \geq max\{T_{A_N}(v_i), T_{A_N}(v_j)\}$

$F_{B_N}(v_iv_j) \geq max\{T_{A_N}(v_i), T_{A_N}(v_j)\}$

Tanım 2.2.12 [17] $G_N = (G^*, A_N, B_N)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir neutrosophic graf olsun. G_N ye tam neutrosophic graf denir. $\Leftrightarrow$ Her $v_i, v_j \in V$ için

$T_{B_N}(v_iv_j) = min\{T_{A_N}(v_i), T_{A_N}(v_j)\}$

$I_{B_N}(v_iv_j) = max\{I_{A_N}(v_i), I_{A_N}(v_j)\}$

$F_{B_N}(v_iv_j) = max\{F_{A_N}(v_i), F_{A_N}(v_j)\}$

Tanım 2.2.13 [17] $G_N = (G^*, A_N, B_N)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir neutrosophic graf olsun. G_N nin tümleyeni $\overline{G_N} = (G^*, \overline{A_N}, \overline{B_N})$ ile gösterilir ve aşağıdaki koşulları sağlar

i. Her $v_i \in V$ için $\overline{T}_{A_N}(v_i) = T_{A_N}(v_i)$, $\overline{I}_{A_N}(v_i) = I_{A_N}(v_i)$, $\overline{F}_{A_N}(v_i) = F_{A_N}(v_i)$

ii. Her $(v_i, v_j) \in E$ için,

$$\overline{T}_{B_N}(v_iv_j) = min\{T_{A_N}(v_i), T_{A_N}(v_j)\} - T_{B_N}(v_iv_j)$$
$$\overline{I}_{B_N}(v_iv_j) = max\{T_{A_N}(v_i), T_{A_N}(v_j)\} - I_{B_N}(v_iv_j)$$
$$\overline{F}_{B_N}(v_iv_j) = max\{T_{A_N}(v_i), T_{A_N}(v_j)\} - F_{B_N}(v_iv_j)$$

Tanım 2.2.14 [1] $G_E = (G^*, F, K, A)$ dörtlüsü aşağıdaki koşulları sağlarsa G_E ye bir esnek graf denir.

i. $G^* = (V, E)$ bir basit graftır.

ii. $A \neq \emptyset$ bir küme

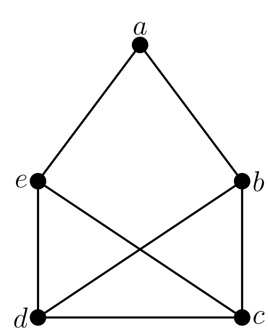
iii. (F, A), V üzerinde bir esnek kümedir.

iv. (K, A), E üzerinde bir esnek kümedir.

v. Her $x \in A$ için $H(x) = (F(x), K(x))$, $G^* = (V, E)$ grafının bir alt grafıdır.

Bir esnek graf $G_E = (F, K, A) = \{H(x) \mid x \in A\}$ şeklinde de gösterilebilir. Takip eden bölümde G^* ile basit grafları G_E ile de esnek grafları göstereceğiz. G^* grafının tüm esnek graflarının kümesini $EG(G^*)$ ile göstereceğiz.

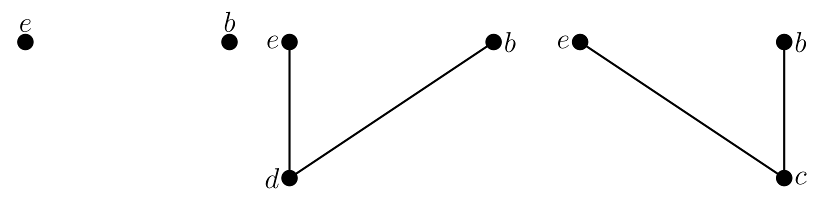
Örnek 2.2.1 [1] $G^* = (V, E)$ basit grafı aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 2.1: $G^* = (V, E)$ basit grafı

$A = \{a, c, d\}$ bir parametre kümesi olmak üzere V üzerinde (F, A) esnek kümesi her $x \in A$ için $F(a) = \{b, e\}$, $F(c) = \{b, d, e\}$ ve $F(d) = \{b, c, e\}$ şeklinde verilsin.
E üzerinde (K, A) esnek kümesi her $x \in A$ için $K(a) = \emptyset$, $K(c) = \{bd, de\}$, $K(d) = \{bc, ce\}$ şeklinde verilsin.

G^* ın altgrafları her $x \in A = \{a, c, d\}$ için $H(a) = (F(a), K(a))$, $H(c) = (F(c), K(c))$ ve $H(d) = (F(d), K(d))$ şeklindedir.



$H(a)$ alt grafı $H(c)$ alt grafı $H(d)$ alt grafı

Şekil 2.2: $H(a), H(c), H(d)$ alt grafları

Sonuç olarak $G_E = \{H(a), H(c), H(d)\}$ kümesi $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir esnek graftır. Bu esnek grafın tablo gösterimi gibi aşağıdaki gibidir.

Tablo 2.1: G_E esnek grafının tablo gösterimi

A/V	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	1
c	0	1	0	1	1
d	0	1	1	0	1

A/E	ab	bc	cd	de	ea	bd	ce
a	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	0	1	0
d	0	1	0	0	0	0	1

Tanım 2.2.15 [1] $G_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki esnek graf olsun. G_{E_1} e G_{E_2} nin esnek alt grafı denir. $\Leftrightarrow$

i. $A \subseteq B$

ii. Her $x \in A$ için $H_1(x) = (F_1(x), K_1(x)) \subseteq H_2(x) = (F_2(x), K_2(x))$ dir.

Tanım 2.2.16 [1] $G_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki esnek graf olsun. G_{E_1} ve G_{E_2} nin genişletilmiş birleşimi $G_{E_1} \cup_E G_{E_2} =$

(G^*, F, K, C) ile gösterilir. Burada $C = A \cup B$ olmak üzere her $e \in C$ için $F(e)$ ve $K(e)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(e) = \begin{cases} F_1(e) & e \in A \backslash B \\ F_2(e) & e \in B \backslash A \\ F_1(e) \cup F_2(e) & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$\text{K(e)=} \begin{cases} K_1(e) & e \in A \backslash B \\ K_2(e) & e \in B \backslash A \\ K_1(e) \cup K_2(e) & e \in A \cap B \end{cases}$$

Not 2.2.1 [1] $G_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki esnek graf olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $G_{E_1} \cup_E G_{E_2}$ daima G^* üzerinde bir esnek graftır.

Tanım 2.2.17 [1] $G_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde $A \cap B \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan iki esnek graf olsun. G_{E_1} ve G_{E_2} nin daraltılmış birleşimi $G_{E_1} \sqcup_E G_{E_2} = (G^*, F, K, C)$ ile gösterilir. Burada $C = A \cap B$ olmak üzere her $e \in C$ için $F(e) = F_1(e) \cup F_2(e)$ ve $K(e) = K_1(e) \cup K_2(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.18 [1] $G_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki esnek graf olsun. G_{E_1} ve G_{E_2} nin genişletilmiş arakesiti $G_{E_1} \cap_E G_{E_2} = (G^*, F, K, C)$ şeklinde gösterilir. Burada $C = A \cup B$ olmak üzere her $e \in C$ için $F(e)$ ve $K(e)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(e) = \begin{cases} F_1(e) & e \in A \backslash B \\ F_2(e) & e \in B \backslash A \\ F_1(e) \cap F_2(e) & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$\text{K(e)=} \begin{cases} K_1(e) & e \in A \backslash B \\ K_2(e) & e \in B \backslash A \\ K_1(e) \cap K_2(e) & e \in A \cap B \end{cases}$$

Tanım 2.2.19 [1] $G_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde $A \cap B \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan iki esnek graf olsun. G_{E_1} ve G_{E_2} nin daraltılmış arakesiti $G_{E_1} \sqcap_E G_{E_2} = (G^*, F, K, C)$ ile gösterilir. Burada $C = A \cap B$ olmak üzere her $e \in C$ için $F(e) = F_1(e) \cap F_2(e)$ ve $K(e) = K_1(e) \cap K_2(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.20 [1] $G_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki esnek graf olsun. G_{E_1} ve G_{E_2} esnek graflarının $\bigvee -$ birleşimi $G_{E_1} \bigvee_E G_{E_2} = (G^*, F, K, C)$ ile gösterilir. Burada $C = A \times B$ olmak üzere her $(a, b) \in A \times B$ için $F(a, b) = F_1(a) \cup F_2(b)$ ve $K(a, b) = K_1(a) \cup K_2(b)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.21 [1] $G_{E_1} = (G^*, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*, F_2, K_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki esnek graf olsun. G_{E_1} ve G_{E_2} esnek graflarının $\bigwedge -$ arakesiti $G_{E_1} \bigwedge_E G_{E_2} = (G^*, F, K, C)$ ile gösterilir. Burada $C = A \times B$ olmak üzere her $(a, b) \in A \times B$ için $F(a, b) = F_1(a) \cap F_2(b)$ ve $K(a, b) = K_1(a) \cap K_2(b)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.22 [1] $G_{E_1} = (G^*_{E_1}, F_1, K_1, A)$ ve $G_{E_2} = (G^*_{E_2}, F_2, K_2, B)$ esnek grafları $A \cap B = \emptyset$ koşulunu sağlayan iki esnek graf olsun. G_{E_1} ve G_{E_2} nin kartezyen çarpımı $G_{E_1} \times_E G_{E_2} = (G^*, F, K, C)$ ile gösterilir. $C = A \times B$ olmak üzere her $(a, b) \in A \times B$ için $F(a, b) = F_1(a) \times F_2(b)$ ve $K(a, b) = K_1(a) \times K_2(b)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.23 [1] $G_E = (G^*, F, K, A)$, $G^* = (V, E)$ üzerinde bir esnek graf olmak üzere G_E nin tümleyeni $\overline{G_E} = (G^*, \overline{F}, \overline{K}, A)$ ile gösterilir. Burada her $a \in A$ için $\overline{F}(a) = F(a)$ ve $\overline{K}(a) = \{uv \mid u, v \in V,\ uv \notin E\}$ dir.

Tanım 2.2.24 $G_{NE} = (G^*, f, g, A)$ şeklinde gösterilen dörtlü aşağıdaki koşulları gerçeklerse G_{NE} ye $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir neutrosophic esnek graf denir.

i. $G^* = (V, E)$ bir basit graftır.

ii. f, V üzerinde bir neutrosophic esnek kümedir. $f : A \to N(V)$ bir dönüşüm olmak üzere $f(e) = f_e = \{\langle x, T_{f_e}(x), I_{f_e}(x), F_{f_e}(x)\rangle \mid x \in V\}$ şeklindedir.

iii. g, E üzerinde bir neutrosophic esnek kümedir. $g : A \to N(E)$ bir dönüşüm olmak üzere $g(e) = g_e = \{\langle xy, T_{g_e}(xy), I_{g_e}(xy), F_{g_e}(xy)\rangle \mid xy \in E\}$ şeklindedir.

iv. Her $xy \in E$ ve her $e \in A$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$T_{g_e}(xy) \leq min\{T_{f_e}(x), T_{f_e}(y)\}$

$I_{g_e}(xy) \geq max\{I_{f_e}(x), I_{f_e}(y)\}$

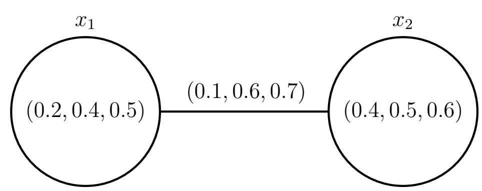
$F_{g_e}(xy) \geq max\{F_{f_e}(x), F_{f_e}(y)\}$

Neutrosophic esnek graflar, $G_{NE} = (G^*, f, g, A) = \{N(e) \mid e \in A\}$ şeklinde neutrosophic grafların parametreleştirilmiş bir ailesi olarak göz önüne alınabilir.

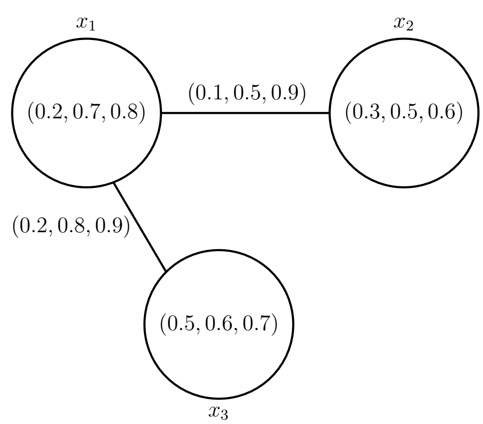
Örnek 2.2.2 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. f ve g neutrosophic esnek kümeleri sırasıyla V ve E üzerinde Tablo 2.2 de gösterildiği gibi verilsin. Açıkça $G_{NE} = (G^*, f, g, A)$, G^* üzerinde neutrosophic esnek graftır.

Tablo 2.2: G_{NE} neutrosophic esnek grafı

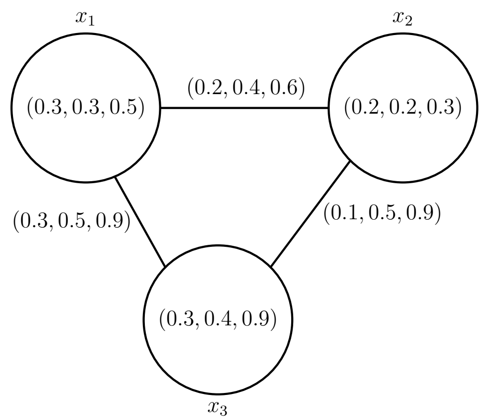
f	x_1	x_2	x_3
e_1	(0.2,0.4,0.5)	(0.4,0.5,0.6)	(0,1,1)
e_2	(0.2,0.7,0.8)	(0.3,0.5,0.6)	(0.5,0.6,0.7)
e_3	(0.3,0.3,0.5)	(0.2,0.2,0.3)	(0.3,0.4,0.9)
g	(x_1x_2)	(x_2x_3)	(x_1x_3)
e_1	(0.1,0.6,0.7)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0.1,0.5,0.9)	(0,1,1)	(0.2,0.8,0.9)
e_3	(0.2,0.4,0.6)	(0.1,0.5,0.9)	(0.3,0.5,0.9)



Şekil 2.3: $N(e_1)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.4: $N(e_2)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.5: $N(e_3)$ neutrosophic grafı

Tanım 2.2.25 $G'_{NE} = (G^*, f', g', A')$ ve $G_{NE} = (G^*, f, g, A)$ iki neutrosophic esnek graf olsun. G'_{NE} ye G_{NE} nin bir neutrosophic esnek alt grafı denir. $\Leftrightarrow$

i. $A' \subseteq A$

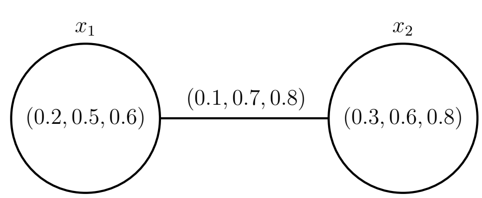
ii. $f'_e \subseteq f_e$ yani her $e \in A'$ için $T_{f'_e}(x) \leq T_{f_e}(x)$, $I_{f'_e}(x) \geq I_{f_e}(x)$, $F_{f'_e}(x) \geq F_{f_e}(x)$

iii. $g'_e \subseteq g_e$ yani her $e \in A'$ ve $xy \in E$ için $T_{g'_e}(xy) \leq T_{g_e}(xy)$, $I_{g'_e}(xy) \geq I_{g_e}(xy)$, $F_{g'_e}(xy) \geq F_{g_e}(xy)$

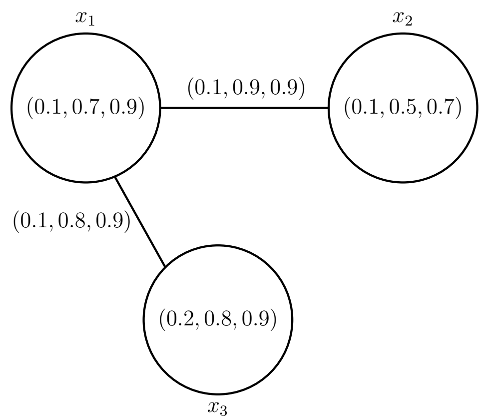
Örnek 2.2.3 Örnek 2.2.2 de verilen G_{NE} neutrosophic esnek grafının bir G'_{NE} neutrosophic esnek alt grafı aşağıdaki gibidir.

Tablo 2.3: G'_{NE} neutrosophic esnek grafı

f'	x_1	x_2	x_3
e_1	(0.2,0.5,0.6)	(0.3,0.6,0.8)	(0,1,1)
e_2	(0.1,0.7,0.9)	(0.1,0.5,0.7)	(0.2,0.8,0.9)
g'	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	(x_1, x_3)
e_1	(0.1,0.7,0.8)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0.1,0.9,0.9)	(0,1,1)	(0.1,0.8,0.9)



Şekil 2.6: $N'(e_1)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.7: $N'(e_2)$ neutrosophic grafı

Tanım 2.2.26 $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ ve $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki neutrosophic esnek graf olsun. Bu iki neutrosophic esnek grafın genişletilmiş birleşimi $G^1_{NE} \bigcup G^2_{NE} = (G^*, f, g, A) = (G^*, f^1 \cup_N f^2, g^1 \cup_N g^2, A_1 \cup A_2)$ ile gösterilir. $G^1_{NE} \bigcup G^2_{NE}$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $e \in A = A_1 \cup A_2$ ve $x \in V$ için

$$T_{f_e}(x) = \begin{cases} T_{f^1_e}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ T_{f^2_e}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{T_{f^1_e}(x), T_{f^2_e}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$I_{f_e}(x) = \begin{cases} I_{f^1_e}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ I_{f^2_e}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{I_{f^1_e}(x), I_{f^2_e}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$F_{f_e}(x) = \begin{cases} F_{f^1_e}(x) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ F_{f^2_e}(x) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{F_{f^1_e}(x), F_{f^2_e}(x)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

ii. Her $e \in A$ ve $xy \in E$ için

$$T_{g_e}(xy) = \begin{cases} T_{g^1_e}(xy) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ T_{g^2_e}(xy) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{T_{g^1_e}(xy), T_{g^2_e}(xy)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$I_{g_e}(xy) = \begin{cases} I_{g^1_e}(xy) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ I_{g^2_e}(xy) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{I_{g^1_e}(xy), I_{g^2_e}(xy)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

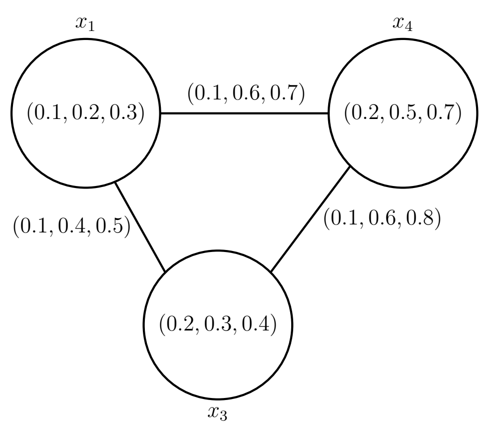
$$F_{g_e}(xy) = \begin{cases} T_{g_e^1}(xy) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ T_{g_e^2}(xy) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{I_{g_e^1}(xy), I_{g_e^2}(xy)\} & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

Örnek 2.2.4 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ve $E = \{x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_5, x_3x_4, x_3x_5\}$ olan bir $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $G^* = (V, E)$ üzerinde bir $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ neutrosophic esnek grafı Tablo 2.4 deki gibi verilsin.

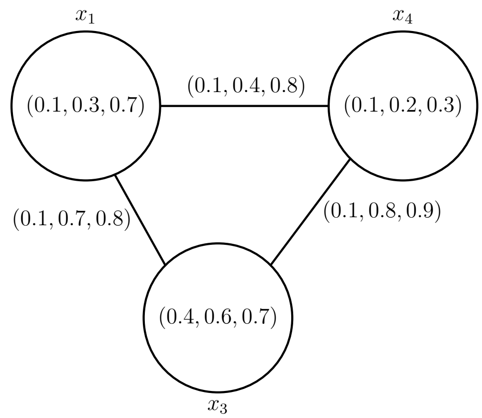
Tablo 2.4: G^1_{NE} neutrosophic esnek grafı

f^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	(0.1,0.2,0.3)	(0,1,1)	(0.2,0.3,0.4)	(0.2,0.5,0.7)	(0,1,1)
e_2	(0.1,0.3,0.7)	(0,1,1)	(0.4,0.6,0.7)	(0.1,0.2,0.3)	(0,1,1)
e_3	(0.5,0.6,0.7)	(0,1,1)	(0.6,0.8,0.9)	(0.3,0.4,0.6)	(0,1,1)

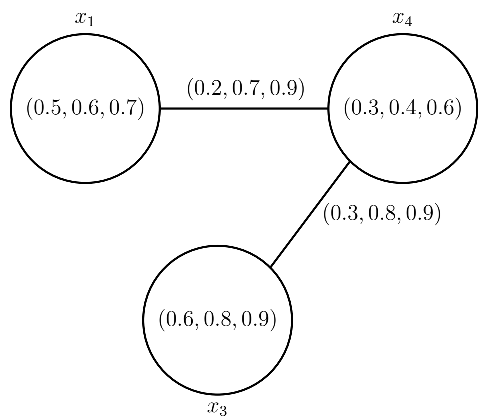
g^1	(x_1x_2)	(x_1x_3)	(x_1x_4)	(x_1x_5)	(x_2x_3)
e_1	(0,1,1)	(0.1,0.4,0.5)	(0.1,0.6,0.7)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0,1,1)	(0.1,0.7,0.8)	(0.1,0.4,0.8)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_3	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.2,0.7,0.9)	(0,1,1)	(0,1,1)
g^1	(x_2x_4)	(x_2x_5)	(x_3x_4)	(x_3x_5)	(x_4x_5)
e_1	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.1,0.6,0.8)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.1,0.8,0.9)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_3	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.3,0.8,0.9)	(0,1,1)	(0,1,1)



Şekil 2.8: $N_1(e_1)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.9: $N_1(e_2)$ neutrosophic grafı



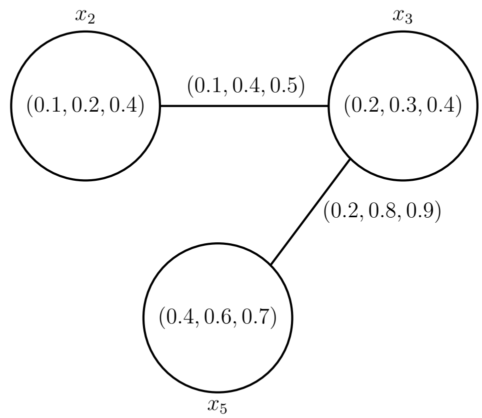
Şekil 2.10: $N_1(e_3)$ neutrosophic grafı

Ayrıca $A_2 = \{e_2, e_4\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde başka bir $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$ neutrosophic esnek grafı Tablo 2.5 deki gibi verilsin.

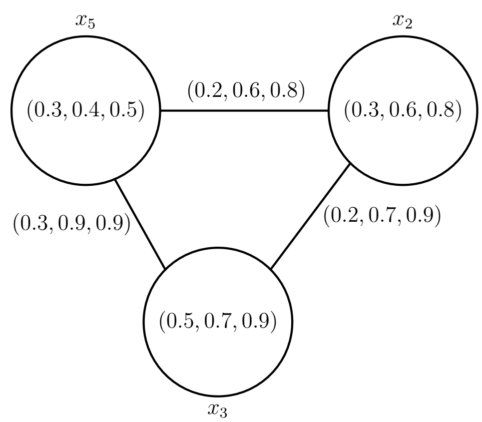
Tablo 2.5: G^2_{NE} neutrosophic esnek grafı

f^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_2	(0,1,1)	(0.1,0.2,0.4)	(0.2,0.3,0.4)	(0,1,1)	(0.4,0.6,0.7)
e_4	(0,1,1)	(0.3,0.6,0.8)	(0.5,0.7,0.9)	(0,1,1)	(0.3,0.4,0.5)

g^2	(x_1x_2)	(x_1x_3)	(x_1x_4)	(x_1x_5)	(x_2x_3)
e_2	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.1,0.4,0.5)
e_4	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.2,0.7,0.9)
g^2	(x_2x_4)	(x_2x_5)	(x_3x_4)	(x_3x_5)	(x_5x_6)
e_2	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.2,0.8,0.9)	(0,1,1)
e_4	(0,1,1)	(0.2,0.6,0.8)	(0,1,1)	(0.3,0.9,0.9)	(0,1,1)



Şekil 2.11: $N_2(e_2)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.12: $N_2(e_4)$ neutrosophic grafı

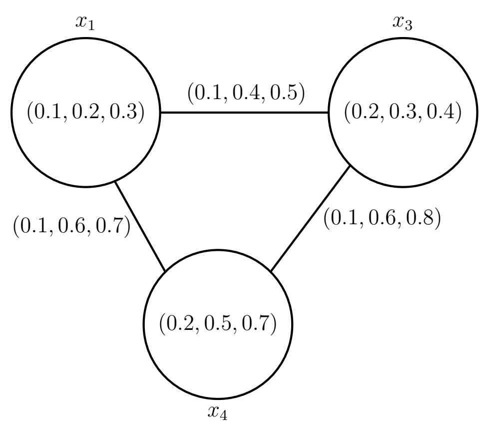
$A_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $A_2 = \{e_2, e_4\}$ olmak üzere $G^1_{NE} \bigcup G^2_{NE} = (G^*, f, g, A)$ neutrosophic esnek grafının parametre kümesi $A = A_1 \cup A_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklindedir.
Her $x_i x_j \in E \backslash \{(x_1x_4), (x_3x_4), (x_1x_3), (x_2x_3), (x_3x_5), (x_2x_5)\}$ için $T_{g_e}(x_i, x_j) = 0$, $I_{g_e}(x_i, x_j) = 0$, $F_{g_e}(x_i, x_j) = 1$ olduğundan $G^1_{NE} \bigcup G^2_{NE} = (G^*, f, g, A)$ neutrosophic esnek grafı Tablo 2.6 da olduğu gibi elde edilir.

Tablo 2.6: $G^1_{NE} \bigcup G^2_{NE}$ neutrosophic esnek grafı

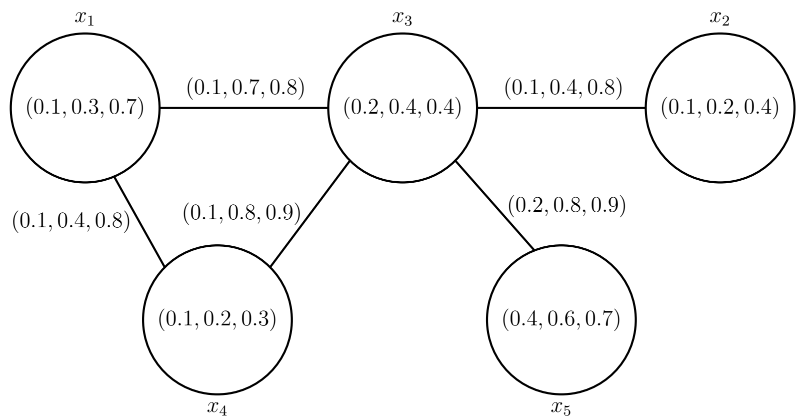
f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	(0.1,0.2,0.3)	(0,1,1)	(0.2,0.3,0.4)	(0.2,0.5,0.7)	(0,1,1)
e_2	(0.1,0.3,0.7)	(0.1,0.2,0.4)	(0.4,0.3,0.4)	(0.1,0.2,0.3)	(0.4,0.6,0.7)
e_3	(0.5,0.6,0.7)	(0,1,1)	(0.6,0.8,0.9)	(0.3,0.4,0.6)	(0,1,1)
e_4	(0,1,1)	(0.3,0.6,0.8)	(0.5,0.7,0.9)	(0,1,1)	(0.3,0.4,0.5)

g	(x_1x_2)	(x_1x_3)	(x_1x_4)	(x_1x_5)	(x_2x_3)
e_1	(0,1,1)	(0.1,0.4,0.5)	(0.1,0.6,0.7)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0,1,1)	(0.1,0.7,0.8)	(0.1,0.4,0.8)	(0,1,1)	(0.1,0.4,0.8)
e_3	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.2,0.7,0.9)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_4	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.2,0.7,0.9)

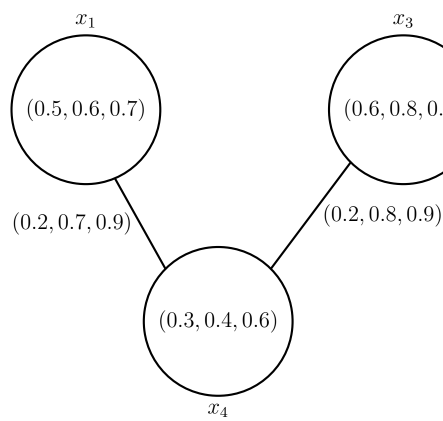
g	(x_2x_4)	(x_2x_5)	(x_3x_4)	(x_3x_5)	(x_4x_5)
e_1	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.1,0.6,0.8)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.1,0.8,0.9)	(0.2,0.8,0.9)	(0,1,1)
e_3	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.3,0.9,0.9)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_4	(0,1,1)	(0.2,0.6,0.8)	(0,1,1)	(0.3,0.4,0.6)	(0,1,1)



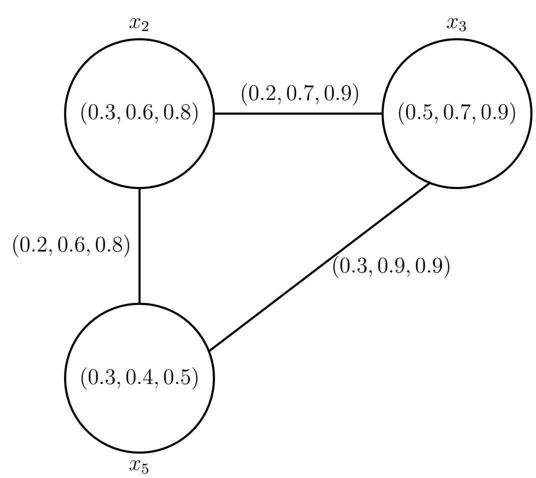
Şekil 2.13: $N(e_1)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.14: $N(e_2)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.15: $N(e_3)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.16: $N(e_4)$ neutrosophic grafı

Teorem 2.2.1 $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ ve $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $G^1_{NE} \bigcup G^2_{NE}$ de $G^* = (V, E)$ üzerinde bir neutrosophic esnek graftır.

Tanım 2.2.27 $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ ve $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki neutrosophic esnek graf olsun. Bu iki neutrosophic esnek grafın daraltılmış birleşimi $G^1_{NE} \bigsqcup G^2_{NE} = (G^*, f, g, A) = (G^*, f^1 \sqcup_N f^2, g^1 \sqcup_N g^2, A_1 \cap A_2)$ ile gösterilir. $G^1_{NE} \bigsqcup G^2_{NE}$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $e \in A = A_1 \cap A_2$ ve $x \in V$ için

$$T_{f_e}(x) = max\{T_{f^1_e}(x), T_{f^2_e}(x)\}$$
$$I_{f_e}(x) = min\{I_{f^1_e}(x), I_{f^2_e}(x)\}$$
$$F_{f_e}(x) = min\{F_{f^1_e}(x), F_{f^2_e}(x)\}$$

ii. Her $e \in A = A_1 \cap A_2$ ve $xy \in E$ için

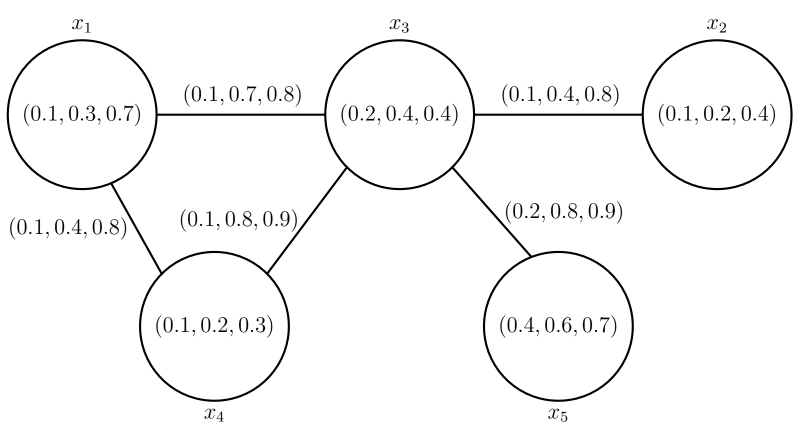
$$T_{g_e}(xy) = max\{T_{g^1_e}(xy), T_{g^2_e}(xy)\}$$
$$I_{g_e}(xy) = min\{I_{g^1_e}(xy), I_{g^2_e}(xy)\}$$
$$F_{g_e}(xy) = min\{F_{g^1_e}(xy), F_{g^2_e}(xy)\}$$

Örnek 2.2.5 Örnek 2.2.4 göz önüne alındığında $A = A_1 \cap A_2 = \{e_2\}$ şeklindedir ve G^1_{NE} ve G^2_{NE} neutrosophic esnek graflarının daraltılmış birleşimi aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 2.7: $G^1_{NE} \bigsqcup G^2_{NE}$ neutrosophic esnek grafı

f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_2	(0.1,0.3,0.7)	(0.1,0.2,0.4)	(0.4,0.3,0.4)	(0.1,0.2,0.3)	(0.4,0.6,0.7)

g	(x_1x_4)	(x_3x_4)	(x_1x_3)	(x_2x_3)	(x_3x_5)	(x_2x_5)
e_2	(0.1,0.4,0.8)	(0.1,0.8,0.9)	(0.1,0.7,0.8)	(0.1,0.4,0.8)	(0.2,0.8,0.9)	(0,1,1)



Şekil 2.17: $N(e_2)$ neutrosophic grafı

Teorem 2.2.2 $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ ve $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $G^1_{NE} \bigsqcup G^2_{NE}$ de $G^* = (V, E)$ üzerinde bir neutrosophic esnek graftır.

Tanım 2.2.28 $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ ve $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki neutrosophic esnek graf olsun. Bu iki neutrosophic esnek grafın genişletilmiş arakesiti $G^1_{NE} \bigcap G^2_{NE} = (G^*, f, g, A) = (G^*, f^1 \cap_N f^2, g^1 \cap_N g^2, A_1 \cup A_2)$ ile gösterilir. $G^1_{NE} \bigcap G^2_{NE}$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $e \in A = A_1 \cup A_2$ ve $x \in V$ için

$$T_{f_e}(x) = \begin{cases} T_{f^1_e}(x), & e \in A_1 \backslash A_2 \\ T_{f^2_e}(x), & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{T_{f^1_e}(x), T_{f^2_e}(x)\}, & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$I_{f_e}(x) = \begin{cases} I_{f^1_e}(x), & e \in A_1 \backslash A_2 \\ I_{f^2_e}(x), & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{I_{f^1_e}(x), I_{f^2_e}(x)\}, & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$F_{f_e}(x) = \begin{cases} F_{f^1_e}(x), & e \in A_1 \backslash A_2 \\ F_{f^2_e}(x), & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{F_{f^1_e}(x), F_{f^2_e}(x)\}, & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

ii. Her $e \in A = A_1 \cup A_2$ ve $xy \in E$ için

$$T_{g_e}(xy) = \begin{cases} T_{g^1_e}(xy) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ T_{g^2_e}(xy) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ min\{T_{g^1_e}(xy), T_{g^2_e}(xy)\}, & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$I_{g_e}(x) = \begin{cases} I_{g^1_e}(xy) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ I_{g^2_e}(xy) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{I_{g^1_e}(xy) I_{g^2_e}(xy)\}, & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

$$F_{g_e}(xy) = \begin{cases} F_{g^1_e}(xy) & e \in A_1 \backslash A_2 \\ F_{g^2_e}(xy) & e \in A_2 \backslash A_1 \\ max\{F_{g^1_e}(xy), F_{g^2_e}(xy)\}, & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

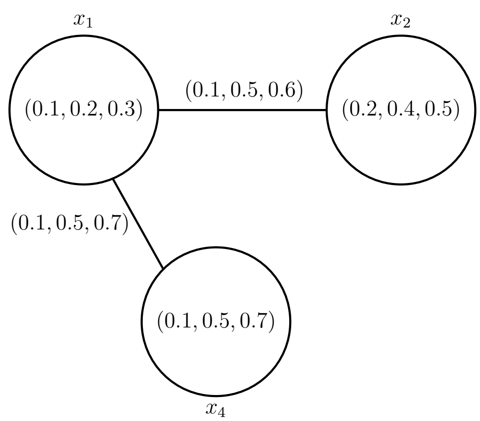
Örnek 2.2.6 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$ olan bir $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A_1 = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi olsun. $G^* =$

(V, E) üzerinde bir $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ neutrosophic esnek grafı Tablo 2.8 deki gibi verilsin.

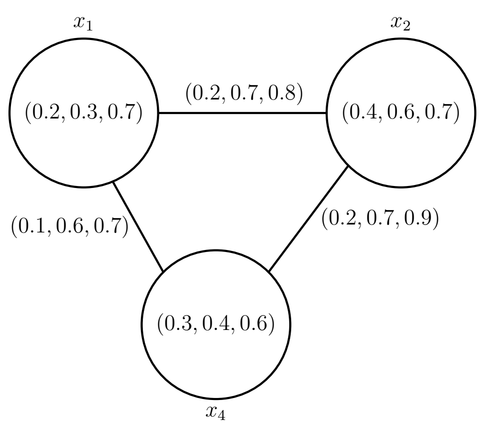
Tablo 2.8: G^1_{NE} neutrosophic esnek grafı

f^1	x_1	x_2	x_3	x_4
e_1	(0.1,0.2,0.3)	(0.2,0.4,0.5)	(0,1,1)	(0.1,0.5,0.7)
e_2	(0.2,0.3,0.7)	(0.4,0.6,0.7)	(0,1,1)	(0.3,0.4,0.6)

g^1	(x_1x_2)	(x_1x_3)	(x_1x_4)	(x_2x_3)	(x_2x_4)	(x_3x_4)
e_1	(0.1,0.5,0.6)	(0,1,1)	(0.1,0.5,0.7)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0.2,0.7,0.8)	(0,1,1)	(0.1,0.6,0,7)	(0,1,1)	(0.2,0.7,0.9)	(0,1,1)



Şekil 2.18: $N_1(e_1)$ neutrosophic grafı



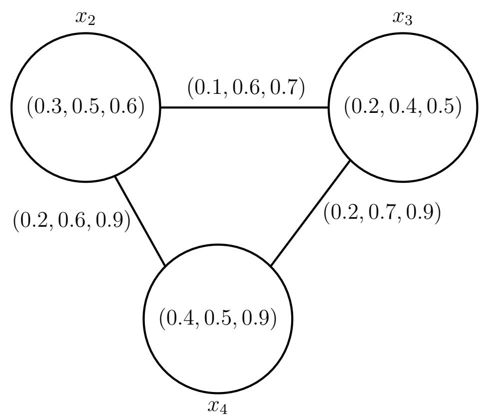
Şekil 2.19: $N_1(e_2)$ neutrosophic grafı

Şimdi $A_2 = \{e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $G^* = (V, E)$ üzerinde bir $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$ neutrosophic esnek grafı Tablo 2.9 daki gibi verilsin.

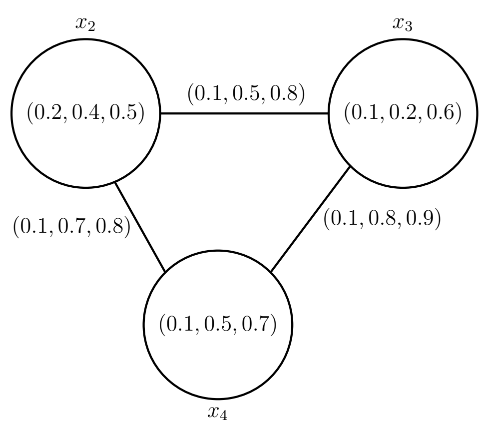
Tablo 2.9: G^2_{NE} neutrosophic esnek grafı

f^2	x_1	x_2	x_3	x_4
e_2	(0,1,1)	(0.3,0.5,0.6)	(0.2,0.4,0.5)	(0.4,0.5,0.9)
e_3	(0,1,1)	(0.2,0.4,0.5)	(0.1,0.2,0.6)	(0.1,0.5,0.7)

g^2	(x_1x_2)	(x_1x_3)	(x_1x_4)	(x_2x_3)	(x_2x_4)	(x_3x_4)
e_2	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.1,0.6,0.7)	(0.2,0.6,0.9)	(0.2,0.7,0.9)
e_3	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.1,0.5,0.8)	(0.1,0.7,0.8)	(0.1,0.8,0.9)



Şekil 2.20: $N_2(e_2)$ neutrosophic grafı



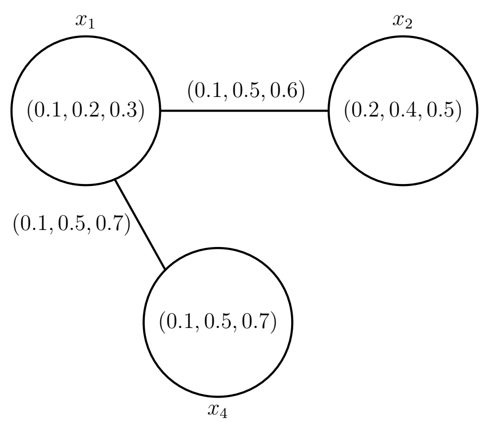
Şekil 2.21: $N_2(e_3)$ neutrosophic grafı

G^1_{NE} nin parametre kümesi $A_1 = \{e_1, e_2\}$ ve G^2_{NE} nin parametre kümesi $A_2 = \{e_2, e_3\}$ olduğundan $G^1_{NE} \bigcap G^2_{NE}$ nin parametre kümesi $A = A_1 \cup A_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ şeklindedir. $G^1_{NE} \bigcap G^2_{NE}$ neutrosophic grafının köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik değerleri Tanım 2.2.26 yardımıyla hesaplandıktan sonra $G^1_{NE} \bigcap G^2_{NE}$ aşağıdaki gibi elde edilir.

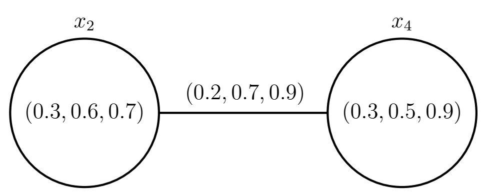
Tablo 2.10: $G^1_{NE} \bigcap G^2_{NE}$ neutrosophic esnek grafı

f	x_1	x_2	x_3	x_4
e_1	(0.1,0.2,0.3)	(0.2,0.4,0.5)	(0,1,1)	(0.1,0.5,0.7)
e_2	(0,1,1)	(0.3,0.5,0.7)	(0,1,1)	(0.3,0.5,0.9)
e_3	(0,1,1)	(0.2,0.4,0.5)	(0.1,0.2,0.6))	(0.1,0.5,0.7)

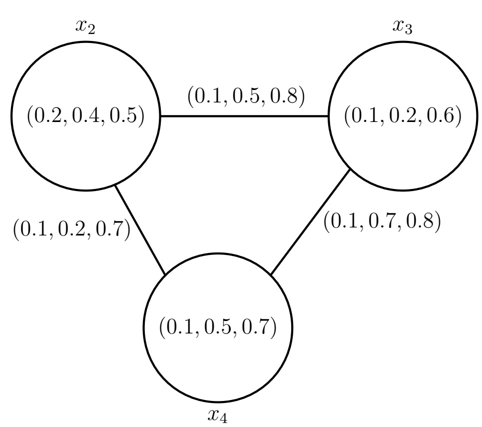
g	(x_1x_2)	(x_1x_3)	(x_1x_4)	(x_2x_3)	(x_2x_4)	(x_3x_4)
e_1	(0.1,0.5,0.6)	(0,1,1)	(0.1,0.5,0.7)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.2,0.7,0.9)	(0,1,1)
e_3	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.1,0.5,0.8)	(0.1,0.7,0.8)	(0.1,0.8,0.9)



Şekil 2.22: $N(e_1)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.23: $N(e_2)$ neutrosophic grafı



Şekil 2.24: $N(e_3)$ neutrosophic grafı

Teorem 2.2.3 $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ ve $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $G^1_{NE} \bigcap G^2_{NE}$ de $G^* = (V, E)$ üzerinde bir neutrosophic esnek graftır.

Tanım 2.2.29 $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ ve $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki neutrosophic esnek graf olsun. Bu iki neutrosophic esnek grafın daraltılmış arakesiti $G^1_{NE} \bigsqcap G^2_{NE} = (G^*, f, g, A) = (G^*, f^1 \sqcap_N f^2, g^1 \cap_N g^2, A_1 \sqcap A_2)$ ile gösterilir. $G^1_{NE} \bigsqcap G^2_{NE}$ nin köşe noktalarının T, I ve F üyelik değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $e \in A = A_1 \cap A_2$ ve $x \in V$ için

$$T_{f_e}(x) = min\{T_{f^1_e}(x), T_{f^2_e}(x)\}$$

$$I_{f_e}(x) = max\{I_{f^1_e}(x), I_{f^2_e}(x)\}$$

$$F_{f_e}(x) = max\{F_{f^1_e}(x), F_{f^2_e}(x)\}$$

ii. Her $e \in A = A_1 \cap A_2$ ve $xy \in E$ için

$$T_{g_e}(xy) = min\{T_{g^1_e}(xy), T_{g^2_e}(xy)\}$$

$$I_{g_e}(xy) = max\{I_{g^1_e}(xy), I_{g^2_e}(xy)\}$$

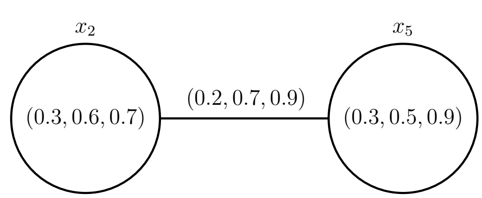
$$F_{g_e}(xy) = max\{F_{g^1_e}(xy), F_{g^2_e}(xy)\}$$

Örnek 2.2.7 Örnek 2.2.6 göz önüne alındığında $A = A_1 \cap A_2 = \{e_2\}$ şeklindedir ve G^1_{NE} ve G^2_{NE} neutrosophic esnek graflarının daraltılmış arakesiti aşağıdaki gibidir.

Tablo 2.11: $G^1_{NE} \bigsqcap G^2_{NE}$ neutrosophic esnek grafı

f	x_1	x_2	x_3	x_4
e_2	(0,1,1)	(0.3,0.6,0.7)	(0,1,1)	(0.3,0.5,0.9)

g	(x_1x_2)	(x_1x_3)	(x_1x_4)	(x_2x_3)	(x_2x_4)	(x_3x_4)
e_2	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,1)	(0.2,0.7,0.9)	(0,1,1)



Şekil 2.25: $N(e_2)$ neutrosophic grafı

Teorem 2.2.4 $G^1_{NE} = (G^*, f^1, g^1, A_1)$ ve $G^2_{NE} = (G^*, f^2, g^2, A_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $G^1_{NE} \prod G^2_{NE}$ de $G^* = (V, E)$ üzerinde bir neutrosophic esnek graftır.

Tanım 2.2.30 [51] $G_{NE} = (G^*, f, g, A)$ bir neutrosophic esnek graf olsun. G_{NE} ye güçlü neutrosophic esnek graf denir. $\Leftrightarrow$ Her $e \in A$ ve $xy \in E$ için

$$T_{g_e}(xy) = min\{T_{f_e}(x), T_{f_e}(y)\}$$
$$I_{g_e}(xy) = min\{I_{f_e}(x), I_{f_e}(y)\}$$
$$F_{g_e}(xy) = max\{F_{f_e}(x), F_{f_e}(y)\}$$

Tanım 2.2.31 [51] $G_{NE} = (G^*, f, g, A)$ bir güçlü neutrosophic esnek graf olsun. G_{NE} nin tümleyeni $\overline{G_{NE}} = (G^*, \bar{f}, \bar{g}, A)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $x \in V$ için $\bar{T}_{f_e}(x) = T_{f_e}(x)$, $\bar{I}_{f_e}(x) = I_{f_e}(x)$, $\bar{F}_{f_e}(x) = F_{f_e}(x)$

ii. $$\bar{T}_{g_e}(x, y) = \begin{cases} min\{T_{f_e}(x), T_{f_e}(y)\}, & T_{g_e}(x, y) = 0 \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$\bar{I}_{g_e}(x, y) = \begin{cases} min\{I_{f_e}(x), I_{f_e}(y)\}, & I_{g_e}(x, y) = 0 \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$\bar{F}_{g_e}(x, y) = \begin{cases} max\{F_{f_e}(x), F_{f_e}(y)\}, & F_{g_e}(x, y) = 1 \\ 1, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

3. ARALIK DEĞERLİ NEUTROSOPHIC GRAFLAR

3.1 Aralık Değerli Neutrosophic Kümeler

Tanım 3.1.1 [59] $\emptyset \neq X$ olmak üzere X üzerinde bir $\hat{A}$ aralık değerli neutrosophic kümesi $\hat{A} = \{\langle x, [T^-_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(x)], [I^-_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(x)], [F^-_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(x)]\rangle : x \in X\}$ olarak tanımlanır. Burada her $x \in X$ için $T_{\hat{A}}(x)$, $I_{\hat{A}}(x)$ ve $F_{\hat{A}}(x)$

$$T_{\hat{A}}(x) = [T^-_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(x)] \subseteq [0,1],\ I_{\hat{A}}(x) = [I^-_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(x)] \subseteq [0,1],\ F_{\hat{A}}(x) = [F^-_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(x)] \subseteq [0,1]$$

şeklinde olup bunlara sırasıyla x in $\hat{A}$ ya üye olma fonksiyonu, x in $\hat{A}$ ya belirsiz üye olma fonksiyonu ve x in $\hat{A}$ ya üye olmama fonksiyonları denir. X üzerindeki bütün aralık değerli neutrosophic kümelerin ailesi $ADN(X)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.1 $X = \{x_1, x_2\}$ kümesini göz önüne alalım. Burada x_1 ile kaliteyi, x_2 ile de nesnelerin fiyatını gösterelim. O halde $T_{\hat{A}}$ doğru üyelik fonksiyonu $I_{\hat{A}}$ belirsiz üyelik fonksiyonu ve $F_{\hat{A}}$ üye olmama fonksiyonları yardımıyla bir $\hat{A}$ aralık değerli neutrosophic kümesini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$\hat{A} = \{\langle x_1, [0.4, 1.0], [0.2, 0.7], [0.3, 0.8]\rangle, \langle x_2, [0.4, 0.7], [0.2, 0.8], [0.1, 0.6]\rangle\}$$

Tanım 3.1.2 [59] $\hat{A}$, X üzerinde bir aralık değerli neutrosophic küme olsun.

i. $\hat{A} = \{\langle x, [0,0], [1,1], [1,1]\rangle \mid x \in X\}$ ise $\hat{A}$ ya boş aralık değerli neutrosophic küme denir ve $\hat{\emptyset}$ ile gösterilir.

ii. $\hat{A} = \{\langle x, [1,1], [0,0], [0,0]\rangle \mid x \in X\}$ ise $\hat{A}$ ya tam aralık değerli neutrosophic küme denir ve $\hat{\Omega}$ ile gösterilir.

iii. $\hat{A}$ nın tümleyeni $\bar{A}$ ile gösterilir ve $x \in X$ için

$$\bar{A} = \{\langle x, [F^-_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(x)], [1 - I^+_{\hat{A}}(x), 1 - I^-_{\hat{A}}(x)], [T^-_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(x)]\rangle \mid x \in X\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.3 [59] $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ iki aralık değerli neutrosophic küme olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$T^-_{\hat{A}}(x) \leq T^-_{\hat{B}}(x) \qquad I^-_{\hat{A}}(x) \geq I^-_{\hat{B}}(x) \qquad F^-_{\hat{A}}(x) \geq F^-_{\hat{B}}(x)$$
$$T^+_{\hat{A}}(x) \leq T^+_{\hat{B}}(x) \qquad I^+_{\hat{A}}(x) \geq I^+_{\hat{B}}(x) \qquad F^+_{\hat{A}}(x) \geq F^+_{\hat{B}}(x)$$

eşitsizlikleri sağlanırsa $\hat{A}$ ya $\hat{B}$ nin aralık değerli neutrosophic alt kümesi denir. Bu durum $A\hat{\subseteq}B$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.1.4 [59] $\hat{A}$ ve $\hat{B}$, X üzerinde iki aralık değerli neutrosophic küme olsun. O halde her $x \in X$ için

i. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ kümelerinin arakesiti $A\hat{\cap}B$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{\cap}\hat{B} = \{\langle x, & [min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{B}}(x)\}, min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)\}], \\ & [max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{B}}(x)\}, max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{B}}(x)\}], \\ & [max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{B}}(x)\}, max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)\}]\rangle \mid x \in X\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

ii. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ kümelerinin birleşimi $A\hat{\cup}B$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{\cup}\hat{B} = \{\langle x, & [max\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{B}}(x)\}, max\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)\}], \\ & [min\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{B}}(x)\}, min\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{B}}(x)\}], \\ & [min\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{B}}(x)\}, min\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)\}]\rangle \mid x \in X\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıkça iki aralık değerli neutrosophic kümenin birleşimi ve arakesiti de aralık değerli neutrosophic kümedir.

Teorem 3.1.1 [59] $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ iki aralık değerli neutrosophic küme olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır

i. $\hat{A}\hat{\cap}\hat{\emptyset} = \hat{\emptyset}$, $\hat{A}\hat{\cap}\hat{\Omega} = \hat{A}$

ii. $\hat{A}\hat{\cup}\hat{\emptyset} = \hat{A}$, $\hat{A}\hat{\cup}\hat{\Omega} = \hat{\Omega}$

İspat. X üzerinde bir $\hat{A}$ aralık değerli neutrosophic kümesi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\hat{A} = \{\langle x, [T^-_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(x)], [I^-_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(x)], [F^-_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(x)]\rangle : x \in X\}$$

i. Her $x \in X$ için

$$
\begin{aligned}
\hat{A}\hat{\cap}\hat{\emptyset} = \{\langle x, & [min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{\emptyset}}(x)\}, min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{\emptyset}}(x)]\}, \\
& [max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{\emptyset}}(x)\}, max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{\emptyset}}(x)\}], \\
& [max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{\emptyset}}(x)\}, max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{\emptyset}}(x)\}]\rangle \mid x \in X\} \\
\{\langle x, & [min\{T^-_{\hat{A}}(x), 0\}, min\{T^+_{\hat{A}}(x), 0]\}, \\
& [max\{I^-_{\hat{A}}(x), 1\}, max\{I^+_{\hat{A}}(x), 1\}], \\
& [max\{F^-_{\hat{A}}(x), 1\}, max\{F^+_{\hat{A}}(x), 1\}]\rangle \mid x \in X\} \\
= \{\langle x, & [0,0], [1,1], [1,1]\rangle \mid x \in X\} = \hat{\emptyset} \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

$\hat{A}\hat{\cap}\hat{\Omega} = \hat{A}$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

ii. Her $x \in X$ için

$$
\begin{aligned}
\hat{A}\hat{\cup}\hat{\Omega} = \{\langle x, & [max\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{\Omega}}(x)\}, max\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{\Omega}}(x)]\}, \\
& [min\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{\Omega}}(x)\},\ min\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{\Omega}}(x)\}], \\
& [min\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{\Omega}}(x)\},\ min\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{\Omega}}(x)\}]\rangle \mid x \in X\} \\
\{\langle x, & [max\{T^-_{\hat{A}}(x), 1\}, max\{T^+_{\hat{A}}(x), 1]\}, \\
& [min\{I^-_{\hat{A}}(x), 0\}, min\{I^+_{\hat{A}}(x), 0\}], \\
& [min\{F^-_{\hat{A}}(x), 0\}, min\{F^+_{\hat{A}}(x), 0\}]\rangle \mid x \in X\} \\
= \{\langle x, & [1,1], [0,0], [0,0]\rangle \mid x \in X\} = \hat{\Omega} \text{ dır.}
\end{aligned}
$$

$\hat{A}\hat{\cup}\hat{\emptyset} = \hat{A}$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.1.2 [59] $\hat{A}$, $\hat{B}$ ve $\hat{C}$, X üzerinde aralık değerli neutrosophic kümeler olsun. Bu takdirde

i. $(\hat{A}\hat{\cap}\hat{B})\hat{\cap}\hat{C} = \hat{A}\hat{\cap}(\hat{B}\hat{\cap}\hat{C})$

ii. $(\hat{A}\hat{\cup}\hat{B})\hat{\cup}\hat{C} = \hat{A}\hat{\cup}(\hat{B}\hat{\cup}\hat{C})$

iii. $\hat{A}\hat{\cap}(\hat{B}\hat{\cup}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{\cap}\hat{B})\hat{\cup}(\hat{A}\hat{\cap}\hat{C})$

iv. $\hat{A}\hat{\cup}(\hat{B}\hat{\cap}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{\cup}\hat{B})\hat{\cap}(\hat{A}\hat{\cup}\hat{C})$

İspat. X üzerinde $\hat{A}$, $\hat{B}$ ve $\hat{C}$ aralık değerli neutrosophic kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$\hat{A} = \{\langle x, [T^-_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(x)], [I^-_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(x)], [F^-_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(x)]\rangle : x \in X\}$$
$$\hat{B} = \{\langle x, [T^-_{\hat{B}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)], [I^-_{\hat{B}}(x), I^+_{\hat{B}}(x)], [F^-_{\hat{B}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)]\rangle : x \in X\}$$
$$\hat{C} = \{\langle x, [T^-_{\hat{C}}(x), T^+_{\hat{C}}(x)], [I^-_{\hat{C}}(x), I^+_{\hat{C}}(x)], [F^-_{\hat{C}}(x), F^+_{\hat{C}}(x)]\rangle : x \in X\}$$

i. O halde her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}(\hat{A}\hat{\cap}\hat{B})\hat{\cap}\hat{C} = \Big\{\langle x,&[min\big\{min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{B}}(x)\}, T^-_{\hat{C}}(x)\big\}, min\big\{min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)\}, T^+_{\hat{C}}(x)\}],\\ &[max\big\{max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{B}}(x)\},\ I^-_{\hat{C}}(x)\big\}, max\big\{max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{B}}(x)\}, I^+_{\hat{C}}(x)\}],\\ &[max\big\{max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{B}}(x)\}, F^-_{\hat{C}}(x)\big\}, max\big\{max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)\}, F^+_{\hat{C}}(x)\}]\rangle\Big\}\\ = \Big\{\langle x,&[min\big\{T^-_{\hat{A}}(x), min\{T^-_{\hat{B}}(x), T^-_{\hat{C}}(x)\}\big\}, min\big\{T^+_{\hat{A}}(x), min\{T^+_{\hat{B}}(x), T^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}],\\ &[max\big\{I^-_{\hat{A}}(x), max\{I^-_{\hat{B}}(x),\ I^-_{\hat{C}}(x)\}\big\}, max\big\{I^+_{\hat{A}}(x), max\{I^+_{\hat{B}}(x), I^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}],\\ &[max\big\{F^-_{\hat{A}}(x), max\{F^-_{\hat{B}}(x), F^-_{\hat{C}}(x)\}\big\}, max\big\{F^+_{\hat{A}}(x), max\{F^+_{\hat{B}}(x), F^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}]\rangle\Big\}\\ = \hat{A}\hat{\cap}(\hat{B}\hat{\cap}\hat{C}) &\text{ elde edilir.}\end{aligned}$$

ii. i) ye benzer şekilde yapılır.

iii. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{\cap}(\hat{B}\hat{\cup}\hat{C}) = \Big\{\langle x, &[min\big\{T^-_{\hat{A}}(x), max\{T^-_{\hat{B}}(x), T^-_{\hat{C}}(x)\}\big\},\\ &min\big\{T^+_{\hat{A}}(x), max\{T^+_{\hat{B}}(x), T^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}],\\ &[max\big\{I^-_{\hat{A}}(x), min\{I^-_{\hat{B}}(x),\ I^-_{\hat{C}}(x)\}\big\},\\ &max\big\{I^+_{\hat{A}}(x), min\{I^+_{\hat{B}}(x), I^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}],\\ &[max\big\{F^-_{\hat{A}}(x), min\{F^-_{\hat{B}}(x),\ F^-_{\hat{C}}(x)\}\big\},\\ &max\big\{F^+_{\hat{A}}(x), min\{F^+_{\hat{B}}(x), F^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}]\rangle \mid x \in X\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \Big\{\langle x, &[max\big\{min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{B}}(x)\}, min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{C}}(x)\}\big\},\\ &max\big\{min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)\}, min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}],\\ &[min\big\{max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{B}}(x)\}, max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{C}}(x)\}\big\},\\ &min\big\{max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{B}}(x)\}, max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}],\\ &[min\big\{max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{B}}(x)\}, max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{C}}(x)\}\big\},\\ &min\big\{max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)\}, max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{C}}(x)\}\big\}]\rangle \mid x \in X\Big\}\\ = (\hat{A}\hat{\cap}\hat{B})&\hat{\cup}(\hat{A}\hat{\cap}\hat{C}) \text{ elde edilir.}\end{aligned}$$

iv. iii) ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.1.3 [59] $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ iki aralık değerli neutrosophic küme olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır

i. $\overline{(\hat{A}\hat{\cap}\hat{B})} = \overline{\hat{A}}\hat{\cup}\overline{\hat{B}}$

ii. $\overline{(\hat{A}\hat{\cup}\hat{B})} = \overline{\hat{A}}\hat{\cap}\overline{\hat{B}}$

İspat. X üzerinde $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ aralık değerli neutrosophic kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$\hat{A} = \{\langle x, [T^-_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(x)], [I^-_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(x)], [F^-_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(x)]\rangle : x \in X\}$$
$$\hat{B} = \{\langle x, [T^-_{\hat{B}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)], [I^-_{\hat{B}}(x), I^+_{\hat{B}}(x)], [F^-_{\hat{B}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)]\rangle : x \in X\}$$

i. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
\hat{A}\hat{\cap}\hat{B} = \{\langle x, &[min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{B}}(x)\}, min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)\}], \\
&[max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{B}}(x)\}, max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{B}}(x)\}], \\
&[max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{B}}(x)\}, max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)\}]\rangle \mid x \in X\} \text{ olduğundan} \\
\overline{(\hat{A}\hat{\cap}\hat{B})} = \{\langle x, &[max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{B}}(x)\}, max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)\}], \\
&[min\{1 - I^+_{\hat{A}}(x), 1 - I^+_{\hat{B}}(x)\}, min\{1 - I^+_{\hat{A}}(x), 1 - I^-_{\hat{B}}(x)\}], \\
&[min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{B}}(x)\}, min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)\}]\rangle \mid x \in X\} \\
= \{\langle x, &[F^-_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(x)], [1 - I^+_{\hat{A}}(x), 1 - I^-_{\hat{A}}(x)], [T^-_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(x)]\rangle \mid x \in X\}\hat{\cup} \\
\{\langle x, &[F^-_{\hat{B}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)], [1 - I^+_{\hat{B}}(x), 1 - I^-_{\hat{B}}(x)], [T^-_{\hat{B}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)]\rangle \mid x \in X\} \\
= \overline{\hat{A}} \cup \overline{\hat{B}} &\text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

ii. i) ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.1.5 $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ sırasıyla X ve Y üzerinde iki aralık değerli neutrosophic küme olsun. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ nin kartezyen çarpımı

$$\begin{aligned}
A\hat{\times}B = \{\langle x, &[min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{B}}(y)\}, min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{B}}(y)\}], \\
&[max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{B}}(y)\}, max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{B}}(y)\}], \\
&[max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{B}}(y)\}, max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{B}}(y)\}]\rangle \mid x \in X, y \in Y\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2 Aralık Değerli Neutrosophic Graflar

Tanım 3.2.1 [18] $\hat{G} = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ üçlüsü aşağıdaki koşulları gerçeklerse $\hat{G}$ ye G^* üzerinde bir aralık değerli neutrosophic graf denir.

i. $G^* = (V, E)$ bir basit graf.

ii. $\hat{A} = \{\langle x, [T^-_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(x)], [I^-_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(x)], [F^-_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(x)]\rangle : x \in X\}$, V üzerinde bir aralık değerli neutrosophic kümedir.

iii. $\hat{B} = \{\langle x, [T^-_{\hat{B}}(x), T^+_{\hat{B}}(x)], [I^-_{\hat{B}}(x), I^+_{\hat{B}}(x)], [F^-_{\hat{B}}(x), F^+_{\hat{B}}(x)]\rangle : x \in X\}$, E üzerinde bir aralık değerli neutrosophic kümedir.

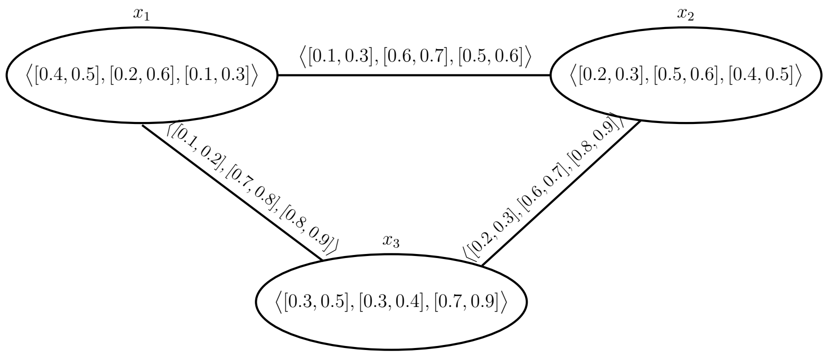
iv. Her $xy \in E$ için $\hat{G}$ nin kenarları ve köşe noktaları arasında aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$T^-_{\hat{B}}(xy) \leq min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{A}}(y)\}$$
$$T^+_{\hat{B}}(xy) \leq min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(y)\}$$
$$I^-_{\hat{B}}(xy) \geq max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{A}}(y)\}$$
$$I^+_{\hat{B}}(xy) \geq max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(y)\}$$
$$F^-_{\hat{B}}(xy) \geq max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{A}}(y)\}$$
$$F^+_{\hat{B}}(xy) \geq max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(y)\}$$

Örnek 3.2.1 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ aralık değerli neutrosophic kümeleri sırasıyla V ve E kümeleri üzerinde aşağıdaki gibi verilsin.

$$\hat{A} = \{\langle x_1, [0.4, 0.5], [0.2, 0.6], [0.1, 0.3]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.4, 0.5]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.3, 0.5], [0.3, 0.4], [0.7, 0.9]\rangle\}$$
$$\hat{B} = \{\langle x_1x_2, [0.1, 0.3], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.8, 0.9]\rangle,$$
$$\langle x_1x_3, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.8, 0.9]\rangle\}$$

Açıkça $\hat{G} = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ nin $G^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic graf olduğu kolaylıkla görülür.



Şekil 3.1: $\hat{G} = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ aralık değerli neutrosophic grafı

Tanım 3.2.2 [19] $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $\hat{G}_2$ ye $\hat{G}_1$ in bir aralık değerli neutrosophic alt grafı denir. $\Leftrightarrow$

i. $\hat{A}_2 \hat{\subseteq} \hat{A}_1 \Leftrightarrow$ Her $x \in V$ için

$$T^-_{\hat{A}_2}(x) \leq T^-_{\hat{A}_1}(x) \qquad I^-_{\hat{A}_2}(x) \geq I^-_{\hat{A}_1}(x) \qquad F^-_{\hat{A}_2}(x) \geq F^-_{\hat{A}_1}(x)$$
$$T^+_{\hat{A}_2}(x) \leq T^+_{\hat{A}_1}(x) \qquad I^+_{\hat{A}_2}(x) \geq I^+_{\hat{A}_1}(x) \qquad F^+_{\hat{A}_2}(x) \geq F^+_{\hat{A}_1}(x)$$

ii. $\hat{B}_2 \hat{\subseteq} \hat{B}_1 \Leftrightarrow$ Her $xy \in E$ için

$$T^-_{\hat{B}_2}(xy) \leq T^-_{\hat{B}_1}(xy) \qquad I^-_{\hat{B}_2}(xy) \geq I^-_{\hat{B}_1}(xy) \qquad F^-_{\hat{B}_2}(xy) \geq F^-_{\hat{B}_1}(xy)$$
$$T^+_{\hat{B}_2}(xy) \leq T^+_{\hat{B}_1}(xy) \qquad I^+_{\hat{B}_2}(xy) \geq I^+_{\hat{B}_1}(xy) \qquad F^+_{\hat{B}_2}(xy) \geq F^+_{\hat{B}_1}(xy)$$

Tanım 3.2.3 [19] $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $\hat{G}_1$ ve $\hat{G}_2$ nin kartezyen çarpımı $\hat{G}_1 \hat{\otimes} \hat{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, \hat{A}, \hat{B})$ ile gösterilir. Burada $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\}$ olmak üzere $\hat{A}$, V üzerinde; $\hat{B}$, E üzerinde aralık değerli neutrosophic kümelerdir. $\hat{G}_1 \hat{\otimes} \hat{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $(x,y) \in V_1 \times V_2$ için

$$T^-_{\hat{A}}(x,y) = min\{T^-_{\hat{A}_1}(x), T^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$T^+_{\hat{A}}(x,y) = min\{T^+_{\hat{A}_1}(x), T^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$I^-_{\hat{A}}(x,y) = max\{I^-_{\hat{A}_1}(x), I^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$I^+_{\hat{A}}(x,y) = max\{I^+_{\hat{A}_1}(x), I^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$F^-_{\hat{A}}(x,y) = max\{F^-_{\hat{A}_1}(x), F^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$F^+_{\hat{A}}(x,y) = max\{F^+_{\hat{A}_1}(x), F^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$

ii. Her $x \in V_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

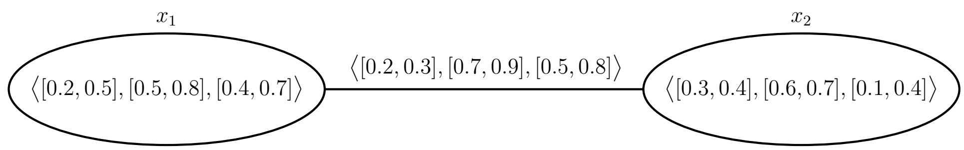
$$T^-_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = min\{T^-_{\hat{A}_1}(x), T^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$T^+_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = min\{T^+_{\hat{A}_1}(x), T^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$I^-_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = max\{I^-_{\hat{A}_1}(x), I^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$I^+_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = max\{I^+_{\hat{A}_1}(x), I^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$F^-_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = max\{F^-_{\hat{A}_1}(x), F^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$F^+_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = max\{F^+_{\hat{A}_1}(x), F^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$

iii. Her $y \in V_2$ ve her $x_1x_2 \in E_1$ için

$$T^-_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = min\{T^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), T^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$T^+_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = min\{T^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), T^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$I^-_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = max\{I^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), I^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$I^+_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = max\{I^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), I^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$F^-_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = max\{F^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), F^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$F^+_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = max\{F^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), F^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$

Örnek 3.2.2 $V_1 = \{x_1, x_2\}$, $V_2 = \{y_1, y_2\}$ ve $E_1 = \{x_1x_2\}$, $E_2 = \{y_1y_2\}$ olmak üzere $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit graflarını göz önüne alalım. $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic grafları sırasıyla G_1^* ve G_2^* üzerinde aşağıdaki gibi verilsin.

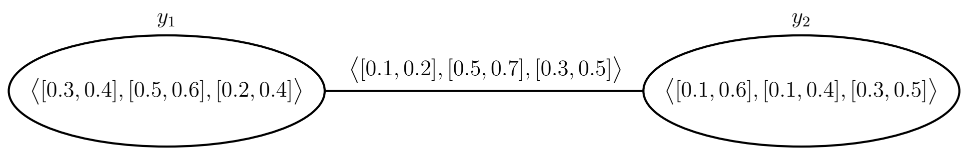
$$\hat{A}_1 = \{\langle x_1, [0.2, 0.5], [0.5, 0.8], [0.4, 0.7]\rangle, \langle x_2, [0.3, 0.4], [0.6, 0.7], [0.1, 0.4]\rangle\}$$
$$\hat{\hat{B}}_1 = \{\langle x_1x_2, [0.2, 0.3], [0.7, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle\}$$



Şekil 3.2: $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{\hat{B}}_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı

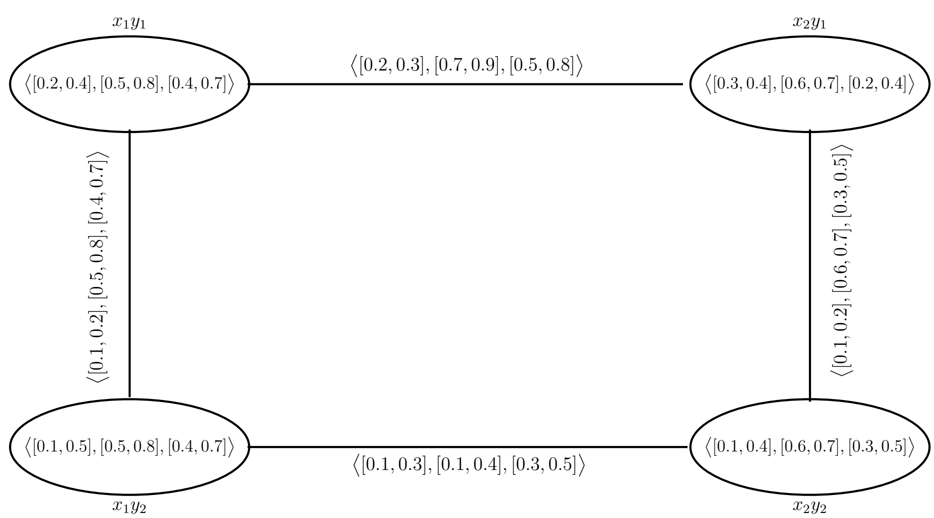
$\hat{A}_2 = \{\langle y_1, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6], [0.2, 0.4] \rangle, \langle y_2, [0.1, 0.6], [0.1, 0.4], [0.3, 0.5] \rangle\}$

$\hat{B}_2 = \{\langle y_1 y_2, [0.1, 0.2], [0.5, 0.7], [0.3, 0.5] \rangle\}$



Şekil 3.3: $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

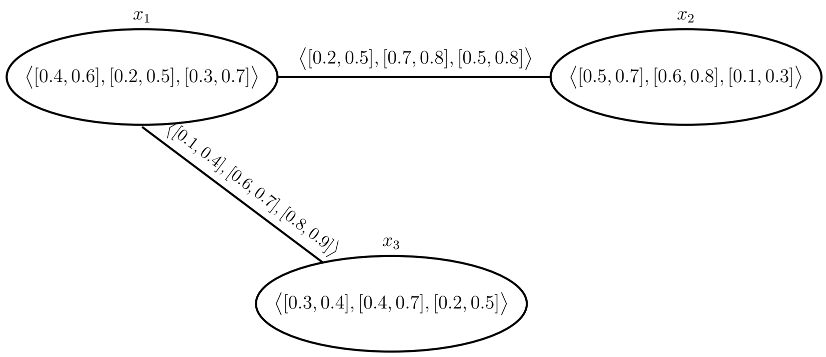
Tanım 3.2.3 yardımıyla gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $\hat{G}_1 \hat{\otimes} \hat{G}_2$ kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.4: $\hat{G}_1 \hat{\otimes} \hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic grafı

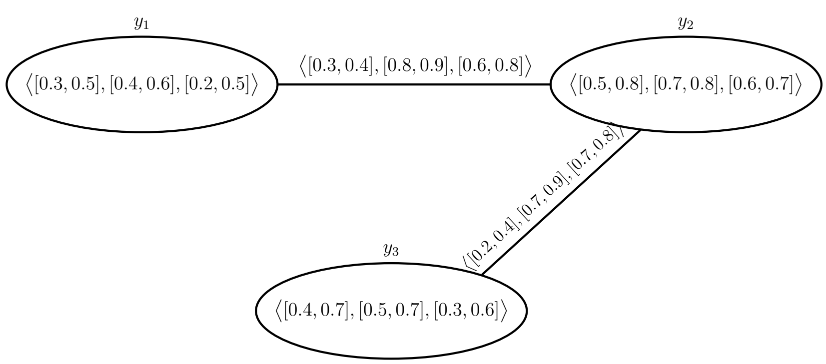
Örnek 3.2.3 $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$ ve $E_1 = \{x_1 x_2, x_1 x_3\}$, $E_2 = \{y_1 y_2, y_2 y_3\}$ olmak üzere $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit graflarını göz önüne alalım. $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic grafları sırasıyla G_1^* ve G_2^* üzerinde aşağıdaki gibi verilsin.

$$\hat{A}_1 = \{\langle x_1, [0.4, 0.6], [0.2, 0.5], [0.3, 0.7], \langle x_2, [0.5, 0.7], [0.6, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.3, 0.4], [0.4, 0.7], [0.2, 0.5]\rangle\}$$
$$\hat{B}_1 = \{\langle x_1x_2, [0.2, 0.5], [0.7, 0.8], [0.5, 0.8], \langle x_1x_3, [0.1, 0.4], [0.6, 0.7], [0.8, 0.9]\rangle\}$$



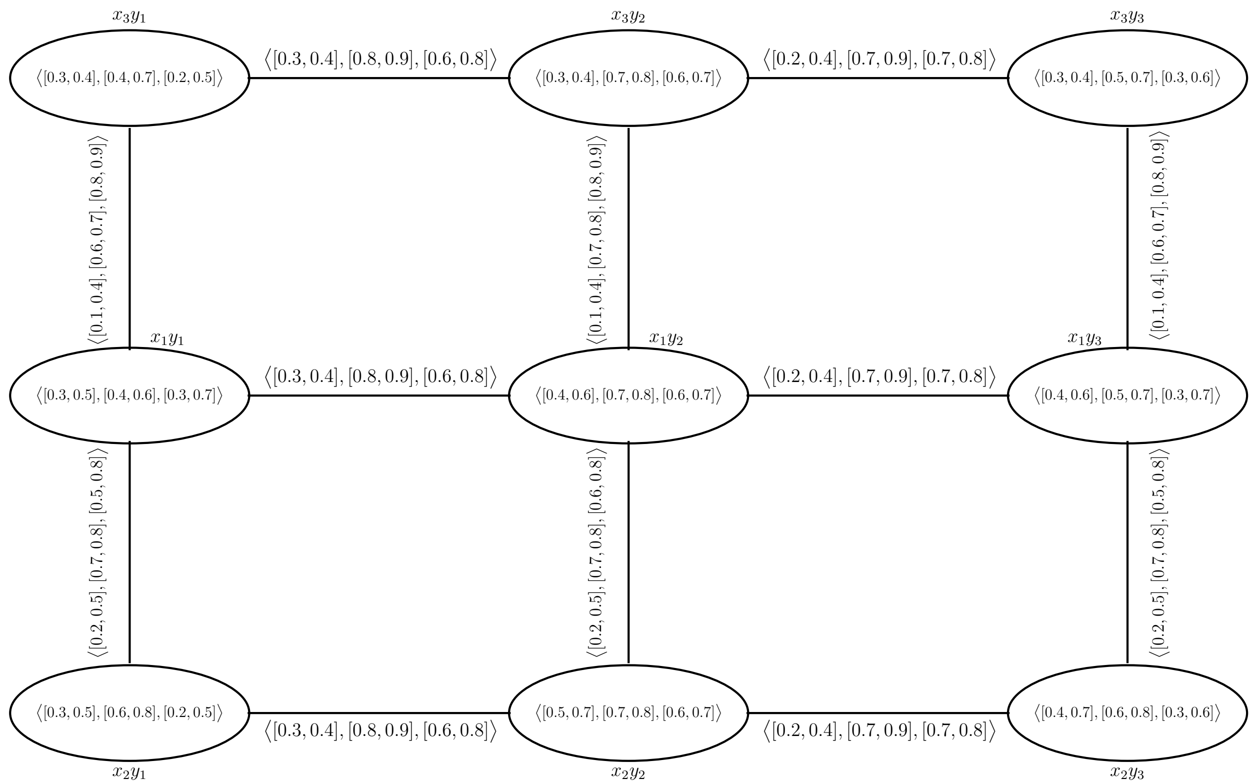
Şekil 3.5: $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı

$$\hat{A}_2 = \{\langle y_1, [0.3, 0.5], [0.4, 0.6], [0.2, 0.5], \langle y_2, [0.5, 0.8], [0.7, 0.8], [0.6, 0.7]\rangle,$$
$$\langle y_3, [0.4, 0.7], [0.5, 0.7], [0.3, 0.6]\rangle\}$$
$$\hat{B}_2 = \{\langle y_1y_2, [0.3, 0.4], [0.8, 0.9], [0.7, 0.8], \langle y_2y_3, [0.2, 0.4], [0.7, 0.9], [0.7, 0.8]\rangle\}$$



Şekil 3.6: $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Tanım 3.2.3 yardımıyla gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $\hat{G}_1 \hat{\otimes} \hat{G}_2$ kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.7: $\hat{G}_1\hat{\otimes}\hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 3.2.1 [19] $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\}$ olmak üzere $\hat{G}_1\hat{\otimes}\hat{G}_2$ kartezyen çarpımı da $G_1^* \times G_2^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic graftır.

İspat. $\hat{G}_1\hat{\otimes}\hat{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, \hat{A}, \hat{B})$ olsun. $\hat{G}_1\hat{\otimes}\hat{G}_2$ kartezyen çarpımının aralık değerli neutrosophic graf olma koşullarını sağladığını gösterelim. Açıkça $G^* = (V = V_1 \times V_2, E)$ bir basit graftır. $\hat{A}$ nın $V = V_1 \times V_2$ üzerinde, $\hat{B}$ nin E üzerinde aralık değerli neutrosophic kümeler olduğu tanım 3.2.3 ile açıktır. Şimdi kenarlar ve köşe noktaları arasındaki eşitsizliklerin sağlandığını gösterelim.

Her $(xy_1, xy_2) \in E$ için

$$\begin{aligned}
T_B^-(xy_1, xy_2) &= min\{T_{A_1}^-(x), T_{B_2}^-(y_1y_2)\}\\
&\leq min\big\{T_{A_1}^-(x), min\{T_{A_2}^-(y_1), T_{A_2}^-(y_2)\}\big\}\\
&= min\big\{min\{T_{A_1}^-(x), T_{A_2}^-(y_1)\}, min\{T_{A_1}^-(x), T_{A_2}^-(y_2)\}\big\}\\
&= min\{T_A^-(x, y_1), T_A^-(x, y_2)\}
\end{aligned}$$

Buradan $T_B^-(xy_1, xy_2) \le min\{T_A^-(x, y_1), T_A^-(x, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$T_B^+(xy_1, xy_2) \le min\{T_A^+(x, y_1), T_A^+(x, y_2)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} I_B^-(xy_1, xy_2) &= max\{I_{A_1}^-(x), I_{B_2}^-(y_1y_2)\} \\ &\ge max\big\{I_{A_1}^-(x), max\{I_{A_2}^-(y_1), I_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\ &= max\big\{max\{I_{A_1}^-(x), I_{A_2}^-(y_1)\}, max\{I_{A_1}^-(x), I_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\ &= max\{I_A^-(x, y_1), I_A^-(x, y_2)\} \end{aligned}$$

Buradan $I_B^-(xy_1, xy_2) \ge max\{I_A^-(x, y_1), I_A^-(x, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$I_B^+(xy_1, xy_2) \ge max\{I_A^+(x, y_1), I_A^+(x, y_2)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} F_B^-(xy_1, xy_2) &= max\{F_{A_1}^-(x), F_{B_2}^-(y_1y_2)\} \\ &\ge max\big\{F_{A_1}^-(x), max\{F_{A_2}^-(y_1), F_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\ &= max\big\{max\{F_{A_1}^-(x), F_{A_2}^-(y_1)\}, max\{F_{A_1}^-(x), F_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\ &= max\{F_A^-(x, y_1), F_A^-(x, y_2)\} \end{aligned}$$

Buradan $F_B^-(xy_1, xy_2) \ge max\{F_A^-(x, y_1), F_A^-(x, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$F_B^+(xy_1, xy_2) \ge max\{F_A^+(x, y_1), F_A^+(x, y_2)\}$ olduğu görülür.

Ayrıca her $(x_1y, x_2y) \in E$ elemanını için

$$T_B^-(x_1y, x_2y) \le min\{T_A^-(x_1, y), T_A^-(x_2, y)\}$$
$$T_B^+(x_1y, x_2y) \le min\{T_A^+(x_1, y), T_A^+(x_2, y)\}$$
$$I_B^-(x_1y, x_2y) \ge max\{I_A^-(x_1, y), I_A^-(x_2, y)\}$$
$$I_B^+(x_1y, x_2y) \ge max\{I_A^+(x_1, y), I_A^+(x_2, y)\}$$
$$F_B^-(x_1y, x_2y) \ge max\{F_A^-(x_1, y), F_A^-(x_2, y)\}$$
$$F_B^+(x_1y, x_2y) \ge max\{F_A^+(x_1, y), F_A^+(x_2, y)\}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı da benzer şekilde gösterilir.

Sonuç olarak $\hat{G}_1 \hat{\otimes} \hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ kartezyen çarpımı $G^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic graftır.

Tanım 3.2.4 $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $\hat{G}_1$ ve $\hat{G}_2$ nin güçlü çarpımı $\hat{G}_1 \hat{\odot} \hat{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, \hat{A}, \hat{B})$ ile gösterilir. Burada $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1,\ y_1y_2 \in E_2,\ x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2\}$ olmak üzere $\hat{A}$, V üzerinde; $\hat{B}$, E üzerinde aralık değerli neutrosophic kümelerdir. $\hat{G}_1 \hat{\odot} \hat{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $(x, y) \in V_1 \times V_2$ için

$$T_{\hat{A}}^-(x,y) = min\{T_{\hat{A}_1}^-(x), T_{\hat{A}_2}^-(y)\}$$
$$T_{\hat{A}}^+(x,y) = min\{T_{\hat{A}_1}^+(x), T_{\hat{A}_2}^+(y)\}$$
$$I_{\hat{A}}^-(x,y) = max\{I_{\hat{A}_1}^-(x), I_{\hat{A}_2}^-(y)\}$$
$$I_{\hat{A}}^+(x,y) = max\{I_{\hat{A}_1}^+(x), I_{\hat{A}_2}^+(y)\}$$
$$F_{\hat{A}}^-(x,y) = max\{F_{\hat{A}_1}^-(x), F_{\hat{A}_2}^-(y)\}$$
$$F_{\hat{A}}^+(x,y) = max\{F_{\hat{A}_1}^+(x), F_{\hat{A}_2}^+(y)\}$$

ii. Her $x \in V_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

$$T_{\hat{B}}^-(xy_1, xy_2) = min\{T_{\hat{A}_1}^-(x), T_{\hat{B}_2}^-(y_1y_2)\}$$
$$T_{\hat{B}}^+(xy_1, xy_2) = min\{T_{\hat{A}_1}^+(x), T_{\hat{B}_2}^+(y_1y_2)\}$$
$$I_{\hat{B}}^-(xy_1, xy_2) = max\{I_{\hat{A}_1}^-(x), I_{\hat{B}_2}^-(y_1y_2)\}$$
$$I_{\hat{B}}^+(xy_1, xy_2) = max\{I_{\hat{A}_1}^+(x), I_{\hat{B}_2}^+(y_1y_2)\}$$
$$F_{\hat{B}}^-(xy_1, xy_2) = max\{F_{\hat{A}_1}^-(x), F_{\hat{B}_2}^-(y_1y_2)\}$$
$$F_{\hat{B}}^+(xy_1, xy_2) = max\{F_{\hat{A}_1}^+(x), F_{\hat{B}_2}^+(y_1y_2)\}$$

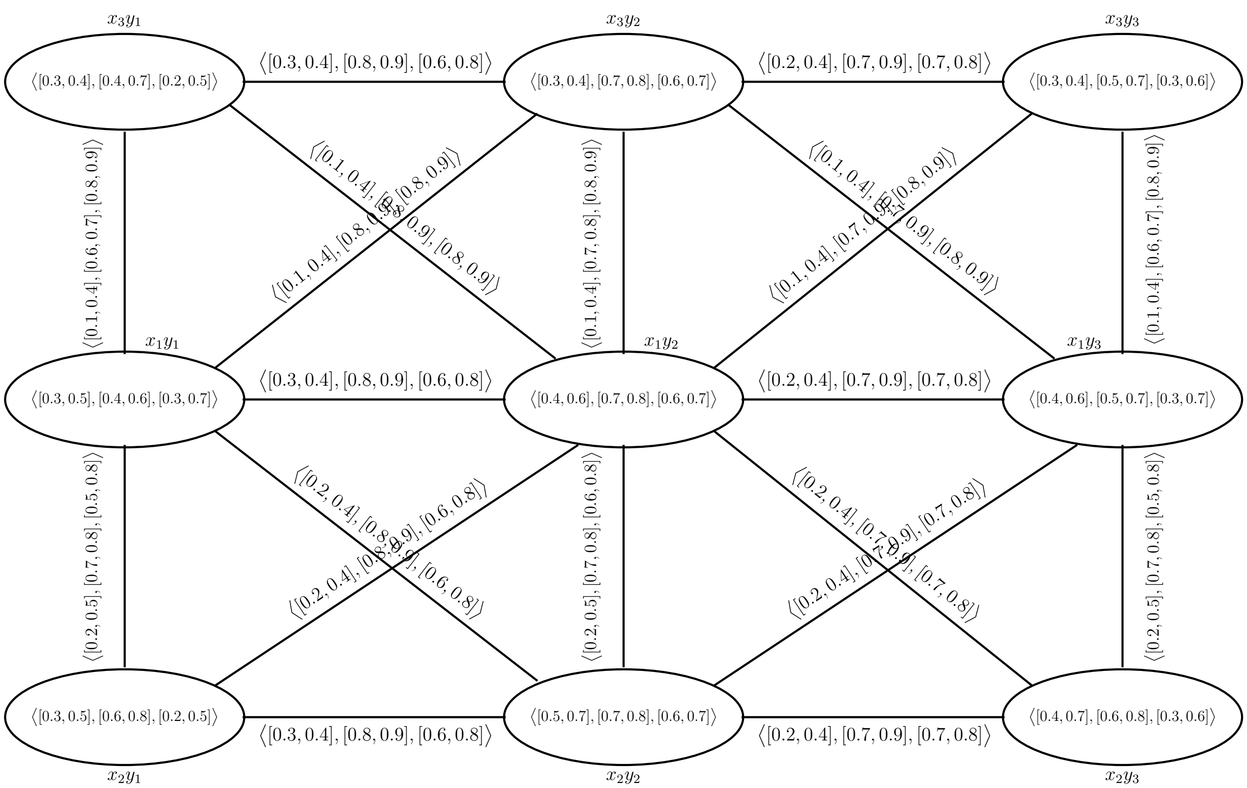
iii. Her $y \in V_2$ ve her $x_1x_2 \in E_1$ için

$$T_{\hat{B}}^-(x_1y, x_2y) = min\{T_{\hat{B}_1}^-(x_1x_2), T_{\hat{A}_2}^-(y)\}$$
$$T_{\hat{B}}^+(x_1y, x_2y) = min\{T_{\hat{B}_1}^+(x_1x_2), T_{\hat{A}_2}^+(y)\}$$
$$I_{\hat{B}}^-(x_1y, x_2y) = max\{I_{\hat{B}_1}^-(x_1x_2), I_{\hat{A}_2}^-(y)\}$$
$$I_{\hat{B}}^+(x_1y, x_2y) = max\{I_{\hat{B}_1}^+(x_1x_2), I_{\hat{A}_2}^+(y)\}$$
$$F_{\hat{B}}^-(x_1y, x_2y) = max\{F_{\hat{B}_1}^-(x_1x_2), F_{\hat{A}_2}^-(y)\}$$
$$F_{\hat{B}}^+(x_1y, x_2y) = max\{F_{\hat{B}_1}^+(x_1x_2), F_{\hat{A}_2}^+(y)\}$$

iv. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ olmak üzere her $x_1x_2 \in E_1$ ve $y_1y_2 \in E_2$ için

$$T^-_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = min\{T^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), T^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$T^+_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = min\{T^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), T^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$I^-_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{I^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), I^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$I^+_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{I^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), I^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$F^-_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{F^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), F^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$F^+_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{F^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), F^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$

Örnek 3.2.4 Örnek 3.2.3 deki $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic graflarını göz önüne alalım. Tanım 3.2.4 yardımıyla gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $\hat{G}_1 \hat{\odot} \hat{G}_2$ güçlü çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.8: $\hat{G}_1 \hat{\odot} \hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 3.2.2 $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid$

$x_1x_2 \in E_1,\ y_1y_2 \in E_2,\ x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2\}$ olmak üzere $\hat{G}_1 \hat{\odot} \hat{G}_2$ güçlü çarpımı da $G_1^* \times G_2^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic graftır.

İspat. $\hat{G}_1 \hat{\odot} \hat{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, K, M, A \times B)$ olsun. $\hat{G}_1 \hat{\odot} \hat{G}_2$ nin aralık değerli neutrosophic esnek graf olma koşullarını sağladığını gösterelim. Güçlü çarpım, kartezyen çarpımın özel bir hali olduğundan; iki aralık değerli neutrosophic esnek grafın kartezyen çarpımı ile ilgili ispat burada da aynen geçerlidir. Buna ek olarak her $x_1x_2 \in E_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

$$\begin{aligned}
T_B^-(x_1y_1, x_2y_2) &= min\big\{T_{B_1}^-(x_1x_2), T_{B_2}^-(y_1y_2)\big\} \\
&\leq min\big\{min\{T_{A_1}^-(x_1), T_{A_1}^-(x_2)\}, min\{T_{A_2}^-(y_1), T_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= min\big\{min\{T_{A_1}^-(x_1), T_{A_2}^-(y_1)\}, min\{T_{A_1}^-(x_2), T_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= min\{T_A^-(x_1, y_1), T_A^-(x_2, y_2)\}
\end{aligned}$$

Buradan $T_B^-(x_1y_1, x_2y_2) \leq min\{T_A^-(x_1, y_1), T_A^-(x_2, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$T_B^+(x_1y_1, x_2y_2) \leq min\{T_A^+(x_1, y_1), T_A^+(x_2, y_2)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
I_B^-(x_1y_1, x_2y_2) &= max\big\{I_{B_1}^-(x_1x_2), I_{B_2}^-(y_1y_2)\big\} \\
&\geq max\big\{max\{I_{A_1}^-(x_1), I_{A_1}^-(x_2)\}, max\{I_{A_2}^-(y_1), I_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= max\big\{max\{I_{A_1}^-(x_1), I_{A_2}^-(y_1)\}, max\{I_{A_1}^-(x_2), I_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= max\{I_A^-(x_1, y_1), I_A^-(x_2, y_2)\}
\end{aligned}$$

Buradan $I_B^-(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{I_A^-(x_1, y_1), I_A^-(x_2, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$I_B^+(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{I_A^+(x_1, y_1), I_A^+(x_2, y_2)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
F_B^-(x_1y_1, x_2y_2) &= max\big\{F_{B_1}^-(x_1x_2), F_{B_2}^-(y_1y_2)\big\} \\
&\geq max\big\{max\{F_{A_1}^-(x_1), F_{A_1}^-(x_2)\}, max\{F_{A_2}^-(y_1), F_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= max\big\{max\{F_{A_1}^-(x_1), F_{A_2}^-(y_1)\}, max\{F_{A_1}^-(x_2), F_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= max\{F_A^-(x_1, y_1), F_A^-(x_2, y_2)\}
\end{aligned}$$

Buradan $F_B^-(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{F_A^-(x_1, y_1), F_A^-(x_2, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$F_B^+(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{F_A^+(x_1, y_1), F_A^+(x_2, y_2)\}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\hat{G}_1 \hat{\odot} \hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ güçlü çarpımı $G^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic graftır.

Tanım 3.2.5 [18] $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $\hat{G}_1$ ve $\hat{G}_2$ nin bileşkesi $\hat{G}_1 \hat{o} \hat{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, \hat{A}, \hat{B})$ ile gösterilir. Burada $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1, y_1 \neq y_2\}$ olmak üzere $\hat{A}$, V üzerinde; $\hat{B}$, E üzerinde aralık değerli neutrosophic kümelerdir. $\hat{G}_1 \hat{o} \hat{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $(x, y) \in V_1 \times V_2$ için

$$T^-_{\hat{A}}(x, y) = min\{T^-_{\hat{A}_1}(x_1), T^-_{\hat{A}_2}(y_1)\}$$
$$T^+_{\hat{A}}(x, y) = min\{T^+_{\hat{A}_1}(x_1), T^+_{\hat{A}_2}(x_2)\}$$
$$I^-_{\hat{A}}(x, y) = max\{I^-_{\hat{A}_1}(x_1), I^-_{\hat{A}_2}(y_1)\}$$
$$I^+_{\hat{A}}(x, y) = max\{I^+_{\hat{A}_1}(x_1), I^+_{\hat{A}_2}(y_1)\}$$
$$F^-_{\hat{A}}(x, y) = max\{F^-_{\hat{A}_1}(x_1), F^-_{\hat{A}_2}(y_1)\}$$
$$F^+_{\hat{A}}(x, y) = max\{F^+_{\hat{A}_1}(x_1), F^+_{\hat{A}_2}(y_1)\}$$

ii. Her $x \in V_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

$$T^-_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = min\{T^-_{\hat{A}_1}(x), T^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$T^+_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = min\{T^+_{\hat{A}_1}(x), T^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$I^-_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = max\{I^-_{\hat{A}_1}(x), I^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$I^+_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = max\{I^+_{\hat{A}_1}(x), I^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$F^-_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = max\{F^-_{\hat{A}_1}(x), F^-_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$
$$F^+_{\hat{B}}(xy_1, xy_2) = max\{F^+_{\hat{A}_1}(x), F^+_{\hat{B}_2}(y_1y_2)\}$$

iii. Her $y \in V_2$ ve her $x_1x_2 \in E_1$ için

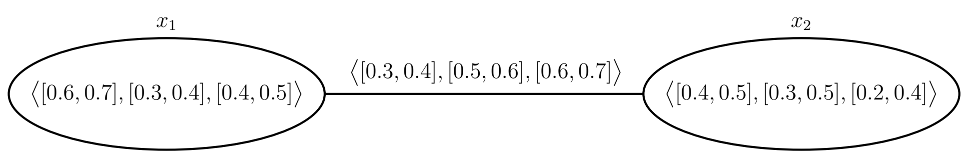
$$T^-_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = min\{T^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), T^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$T^+_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = min\{T^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), T^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$I^-_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = max\{I^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), I^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$I^+_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = max\{I^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), I^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$F^-_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = max\{F^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2), F^-_{\hat{A}_2}(y)\}$$
$$F^+_{\hat{B}}(x_1y, x_2y) = max\{F^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2), F^+_{\hat{A}_2}(y)\}$$

iv. $y_1 \neq y_2$ olmak üzere her $y_1, y_2 \in V_2$ ve $x_1x_2 \in E_1$

$$T^-_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = min\{T^-_{\hat{A}_2}(y_1), T^-_{\hat{A}_2}(y_2), T^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2)\}$$
$$T^+_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = min\{T^+_{\hat{A}_2}(y_1), T^+_{\hat{A}_2}(y_2), T^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2)\}$$
$$I^-_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{I^-_{\hat{A}_2}(y_1), I^-_{\hat{A}_2}(y_2), I^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2)\}$$
$$I^+_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{I^+_{\hat{A}_2}(y_1), I^+_{\hat{A}_2}(y_2), I^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2)\}$$
$$F^-_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{F^-_{\hat{A}_2}(y_1), F^-_{\hat{A}_2}(y_2), F^-_{\hat{B}_1}(x_1x_2)\}$$
$$F^+_{\hat{B}}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{F^+_{\hat{A}_2}(y_1), F^+_{\hat{A}_2}(y_2), F^+_{\hat{B}_1}(x_1x_2)\}$$

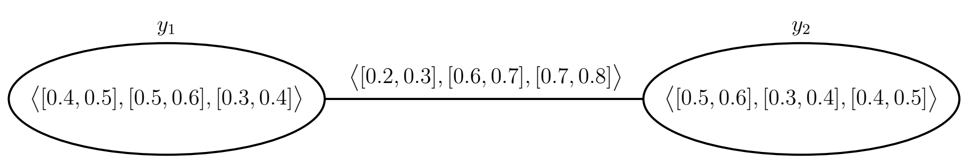
Örnek 3.2.5 $V_1 = \{x_1, x_2\}$, $V_2 = \{y_1, y_2\}$ ve $E_1 = \{x_1x_2\}$, $E_2 = \{y_1y_2\}$ olmak üzere $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit graflarını göz önüne alalım. $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic grafları sırasıyla G_1^* ve G_2^* üzerinde aşağıdaki gibi verilsin.

$\hat{A}_1 = \{\langle x_1, [0.6, 0.7], [0.3, 0.4], [0.4, 0.5]\rangle, \langle x_2, [0.4, 0.5], [0.3, 0.5], [0.2, 0.4]\rangle\}$
$\hat{B}_1 = \{\langle x_1x_2, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6], [0.6, 0.7]\rangle\}$



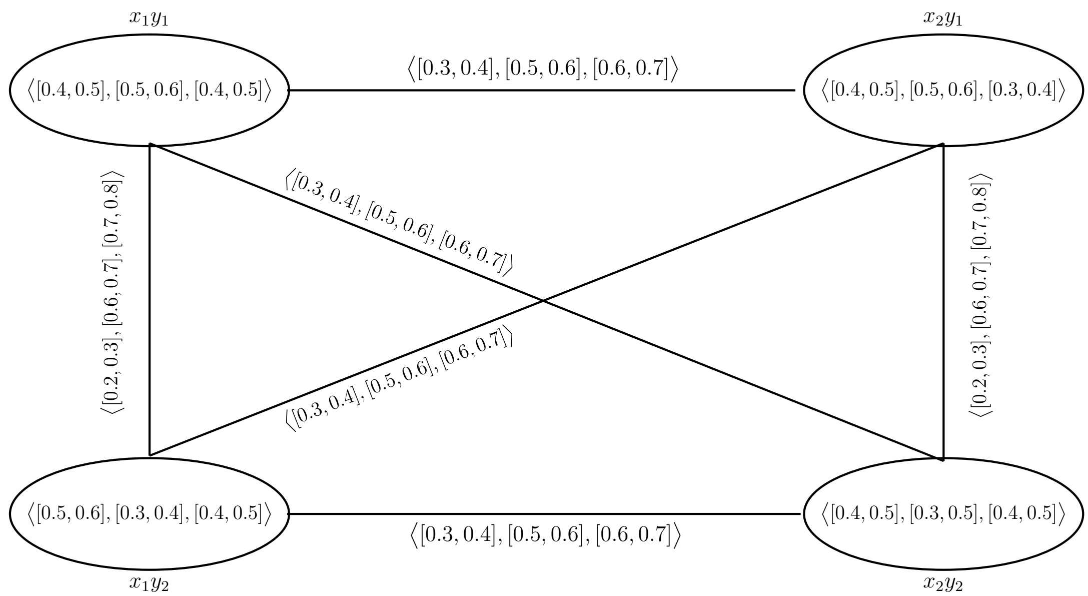
Şekil 3.9: $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı

$\hat{A}_2 = \{\langle y_1, [0.4, 0.5], [0.5, 0.6], [0.3, 0.4]\rangle, \langle y_2, [0.5, 0.6], [0.3, 0.4], [0.4, 0.5]\rangle\}$
$\hat{B}_2 = \{\langle y_1y_2, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.7, 0.8]\rangle\}$



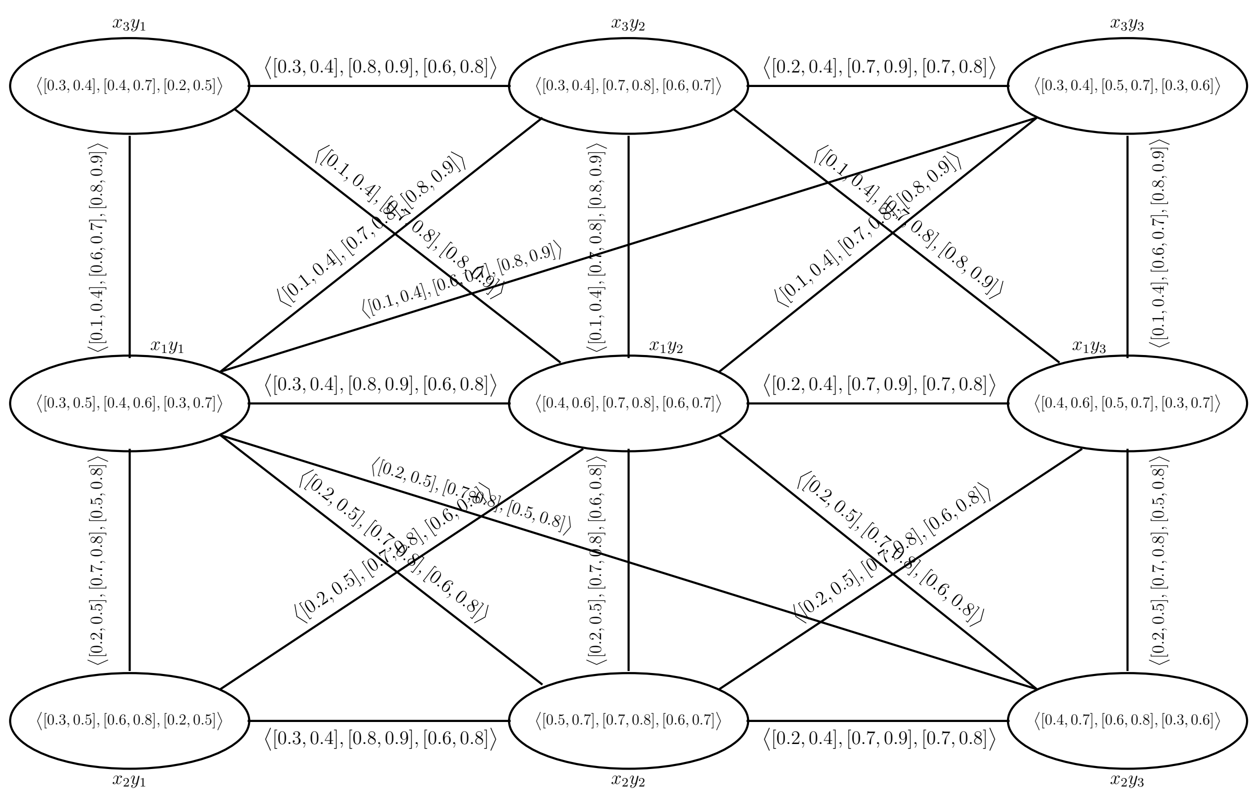
Şekil 3.10: $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Tanım 3.2.5 ile $\hat{G}_1 \hat{\circ} \hat{G}_2$ bileşkesi aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.11: $\hat{G}_1 \hat{\circ} \hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic grafı

Örnek 3.2.6 Örnek 3.2.3 deki $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic graflarını göz önüne alalım. Bu durumda $\hat{G}_1 \hat{\circ} \hat{G}_2$ aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.12: $\hat{G}_1 \hat{\circ} \hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 3.2.3 [18] $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve

$G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1, y_1 \neq y_2\}$ olmak üzere $\hat{G}_1 \hat{\circ} \hat{G}_2$ bileşkesi de $G_1^* \times G_2^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic graftır.

İspat. $\hat{G}_1 = (G_1^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G_2^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. Şimdi $\hat{G}_1 \hat{\circ} \hat{G}_2$ bileşkesinin aralık değerli neutrosophic graf olma koşullarını sağladığını gösterelim.

Açıkça $G^* = \big(V = V_1 \times V_2, E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1, y_1 \neq y_2\}$ bir basit graftır. $\hat{A}$ nın $V = V_1 \times V_2$ üzerinde, $\hat{B}$ nin $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1, y_1 \neq y_2\}$ üzerinde aralık değerli neutrosophic kümeler olduğu Tanım 3.2.5 ile açıktır.

Şimdi kenar ve köşe noktaları arasındaki eşitsizliklerin sağlandığını gösterelim.
$y_1 \neq y_2$ olmak üzere her $(x_1y_1, x_2y_2) \in E$ için

$$\begin{aligned}
T_B^-(x_1y_1, x_2y_2) &= min\big\{T_{B_1}^-(x_1x_2), T_{A_2}^-(y_1), T_{A_2}^-(y_2)\big\} \\
&\leq min\big\{min\{T_{A_1}^-(x_1), T_{A_1}^-(x_2)\}, T_{A_2}^-(y_1), T_{A_2}^-(y_2)\big\} \\
&= min\big\{min\{T_{A_1}^-(x_1), T_{A_2}^-(y_1)\}, min\{T_{A_1}^-(x_2), T_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= min\{T_A^-(x_1, y_1), T_A^-(x_2, y_2)\}
\end{aligned}$$

Buradan $T_B^-(x_1y_1, x_2y_2) \leq min\{T_A^-(x_1, y_1), T_A^-(x_2, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$T_B^+(x_1y_1, x_2y_2) \leq min\{T_A^+(x_1, y_1), T_A^+(x_2, y_2)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
I_B^-(x_1y_1, x_2y_2) &= max\big\{I_{B_1}^-(x_1x_2), I_{A_2}^-(y_1), I_{A_2}^-(y_2)\big\} \\
&\geq max\big\{max\{I_{A_1}^-(x_1), I_{A_1}^-(x_2)\}, I_{A_2}^-(y_1), I_{A_2}^-(y_2)\big\} \\
&= max\big\{max\{I_{A_1}^-(x_1), I_{A_2}^-(y_1)\}, max\{I_{A_1}^-(x_2), I_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= max\{I_A^-(x_1, y_1), I_A^-(x_2, y_2)\}
\end{aligned}$$

Buradan $I_B^-(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{I_A^-(x_1, y_1), I_A^-(x_2, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$I_B^+(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{I_A^+(x_1, y_1), I_A^+(x_2, y_2)\}$ olduğu görülür.

$$
\begin{aligned}
F_B^-(x_1y_1, x_2y_2) &= max\big\{F_{B_1}^-(x_1x_2), F_{A_2}^-(y_1), F_{A_2}^-(y_2)\big\} \\
&\geq max\big\{max\{F_{A_1}^-(x_1), F_{A_1}^-(x_2)\}, F_{A_2}^-(y_1), F_{A_2}^-(y_2)\big\} \\
&= max\big\{max\{F_{A_1}^-(x_1), F_{A_2}^-(y_1)\}, max\{F_{A_1}^-(x_2), F_{A_2}^-(y_2)\}\big\} \\
&= max\{F_A^-(x_1, y_1), F_A^-(x_2, y_2)\}
\end{aligned}
$$

Buradan $F_B^-(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{F_A^-(x_1, y_1), F_A^-(x_2, y_2)\}$ elde edilir. Benzer şekilde,

$F_B^+(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{F_A^+(x_1, y_1), F_A^+(x_2, y_2)\}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\hat{G}_1 \hat{\circ} \hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ bileşkesi $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic graftır.

Tanım 3.2.6 $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $\hat{G}_1$ ve $\hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic graflarının birleşimi $\hat{G}_1 \hat{\bigcup} \hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ ile gösterilir ve $\hat{G}_1 \hat{\bigcup} \hat{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $x \in V$ için

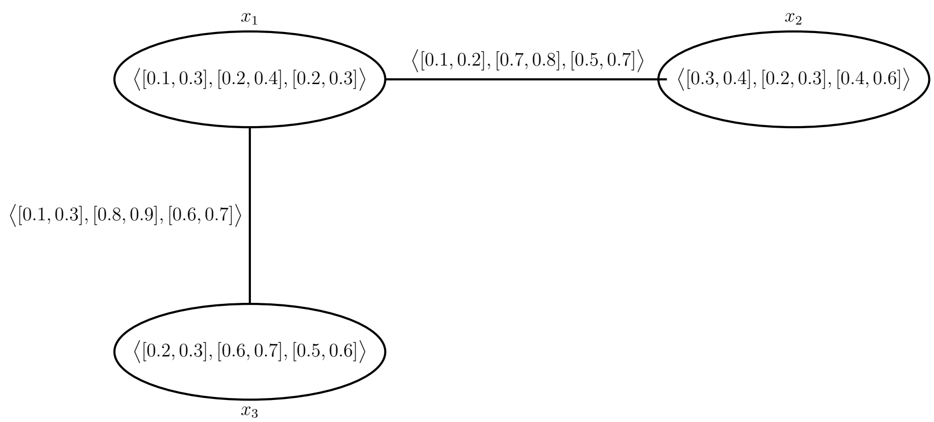
$$
\begin{aligned}
T_{\hat{A}}^-(x) &= max\{T_{\hat{A}_1}^-(x), T_{\hat{A}_2}^-(x)\} \\
T_{\hat{A}}^+(x) &= max\{T_{\hat{A}_1}^+(x), T_{\hat{A}_2}^+(x)\} \\
I_{\hat{A}}^-(x) &= min\{I_{\hat{A}_1}^-(x), I_{\hat{A}_2}^-(x)\} \\
I_{\hat{A}}^+(x) &= min\{I_{\hat{A}_1}^+(x), I_{\hat{A}_2}^+(x)\} \\
F_{\hat{A}}^-(x) &= min\{F_{\hat{A}_1}^-(x), F_{\hat{A}_2}^-(x)\} \\
F_{\hat{A}}^+(x) &= min\{F_{\hat{A}_1}^+(x), F_{\hat{A}_2}^+(x)\}
\end{aligned}
$$

ii. Her $xy \in E$ için

$$
\begin{aligned}
T_{\hat{B}}^-(xy) &= max\{T_{\hat{B}_1}^-(xy), T_{\hat{B}_2}^-(xy)\} \\
T_{\hat{B}}^+(xy) &= max\{T_{\hat{B}_1}^+(xy), T_{\hat{B}_2}^+(xy)\} \\
I_{\hat{B}}^-(xy) &= min\{I_{\hat{B}_1}^-(xy), I_{\hat{B}_2}^-(xy)\} \\
I_{\hat{B}}^+(xy) &= min\{I_{\hat{B}_1}^+(xy), I_{\hat{B}_2}^+(xy)\} \\
F_{\hat{B}}^-(xy) &= min\{F_{\hat{B}_1}^-(xy), F_{\hat{B}_2}^-(xy)\} \\
F_{\hat{B}}^+(xy) &= min\{F_{\hat{B}_1}^+(xy), F_{\hat{B}_2}^+(xy)\}
\end{aligned}
$$

Örnek 3.2.7 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_3, x_2x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. G^* üzerinde $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı aşağıdaki gibi verilsin.

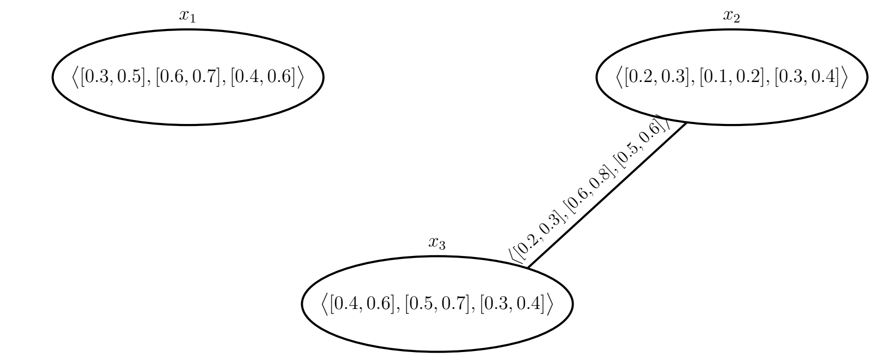
$$\hat{A}_1 = \{\langle x_1, [0.1, 0.3], [0.2, 0.4], [0.2, 0.3]\rangle, \langle x_2, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.4, 0.6]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\rangle\}$$
$$\hat{B}_1 = \{\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.5, 0.7], \langle x_1x_3, [0.1, 0.3], [0.8, 0.9], [0.6, 0.7]\rangle\}$$
$$\langle x_2x_3, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle\}$$



Şekil 3.13: $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Diğer taraftan $G^* = (V, E)$ üzerinde $\hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı aşağıdaki gibi verilsin.

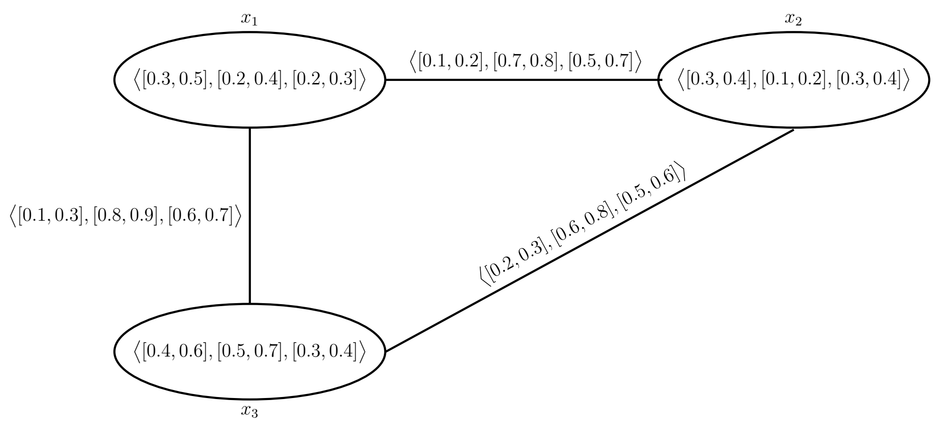
$$\hat{A}_2 = \{\langle x_1, [0.3, 0.5], [0.6, 0.7], [0.4, 0.6]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.3], [0.1, 0.2], [0.3, 0.4]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.4, 0.6], [0.5, 0.7], [0.3, 0.4]\rangle\}$$
$$\hat{B}_2 = \{\langle x_1x_2, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_1x_3, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle,$$
$$\langle x_2x_3, [0.2, 0.3], [0.6, 0.8], [0.5, 0.6]\rangle\}$$



Şekil 3.14: $\hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

$\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{\cup} \hat{A}_2$ ve $\hat{B} = \hat{B}_1 \hat{\cup} \hat{B}_2$ olmak üzere Tanım 3.2.6 ile $\hat{G}_1 \hat{\bigcup} \hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{A} = \{\langle x_1, [0.3, 0.5], [0.2, 0.4], [0.2, 0.3] \rangle, \langle x_2, [0.3, 0.4], [0.1, 0.2], [0.3, 0.4] \rangle,$$
$$\langle x_3, [0.4, 0.6], [0.5, 0.7], [0.3, 0.4] \rangle\}$$
$$\hat{B} = \{\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.5, 0.7] \rangle, \langle x_1x_3, [0.1, 0.3], [0.8, 0.9], [0.6, 0.7] \rangle,$$
$$\langle x_2x_3, [0.2, 0.3], [0.6, 0.8], [0.5, 0.6] \rangle\}$$



Şekil 3.15: $\hat{G}_1 \hat{\bigcup} \hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 3.2.4 $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. Bu takdirde $\hat{G}_1 \hat{\bigcup} \hat{G}_2$ birleşimi de $G^* = (V, E)$ üzerinde aralık değerli neutrosophic graftır.

İspat. $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $\hat{G}_1 \hat{\bigcup} \hat{G}_2$ nin aralık değerli neutrosophic graf olma koşullarını sağladığını gösterelim.

Açıkça $\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{\cup} \hat{A}_2$ V üzerinde, $\hat{B} = \hat{B}_1 \hat{\cup} \hat{B}_2$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic kümelerdir. Şimdi $\hat{G}_1 \hat{\bigcup} \hat{G}_2$ nin her $x, y \in V$ için Tanım 3.2.1 de verilen eşitsizlikleri sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned}T^-_{\hat{B}}(xy) &= max\{T^-_{\hat{B}_1}(xy), T^-_{\hat{B}_2}(xy)\}\\ &\leq max\big\{min\{T^-_{\hat{A}_1}(x), T^-_{\hat{A}_1}(y)\}, min\{T^-_{\hat{A}_2}(x), T^-_{\hat{A}_2}(y)\}\big\}\\ &\leq min\big\{max\{T^-_{\hat{A}_1}(x), T^-_{\hat{A}_2}(x)\}, max\{T^-_{\hat{A}_1}(y), T^-_{\hat{A}_2}(y)\}\big\}\end{aligned}$$

Buradan $T^-_{\hat{B}}(xy) \leq min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{A}}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$T^+_{\hat{B}}(xy) \leq min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}I^-_{\hat{B}}(xy) &= min\{I^-_{\hat{B}_1}(xy), I^-_{\hat{B}_2}(xy)\}\\ &\geq min\big\{max\{I^-_{\hat{A}_1}(x), I^-_{\hat{A}_1}(y)\}, max\{I^-_{\hat{A}_2}(x), I^-_{\hat{A}_2}(y)\}\big\}\\ &\geq max\big\{min\{I^-_{\hat{A}_1}(x), I^-_{\hat{A}_2}(x)\}, min\{I^-_{\hat{A}_1}(y), I^-_{\hat{A}_2}(y)\}\big\}\end{aligned}$$

Buradan $I^-_{\hat{B}}(xy) \geq max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{A}}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$I^+_{\hat{B}}(xy) \geq max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}F^-_{\hat{B}}(xy) &= min\{F^-_{\hat{B}_1}(xy), F^-_{\hat{B}_2}(xy)\}\\ &\geq min\big\{max\{F^-_{\hat{A}_1}(x), F^-_{\hat{A}_1}(y)\}, max\{F^-_{\hat{A}_2}(x), F^-_{\hat{A}_2}(y)\}\big\}\\ &\geq max\big\{min\{F^-_{\hat{A}_1}(x), F^-_{\hat{A}_2}(x)\}, min\{F^-_{\hat{A}_1}(y), F^-_{\hat{A}_2}(y)\}\big\}\end{aligned}$$

Buradan $F^-_{\hat{B}}(xy) \geq max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{A}}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$F^+_{\hat{B}}(xy) \geq max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(y)\}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\hat{G}_1 \hat{\bigcup} \hat{G}_2$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde aralık değerli neutrosophic graftır.

Tanım 3.2.7 $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $\hat{G}_1$ ve $\hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic graflarının arakesiti $\hat{G}_1 \hat{\bigcap} \hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ ile gösterilir ve $\hat{G}_1 \hat{\bigcap} \hat{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $x \in V$ için

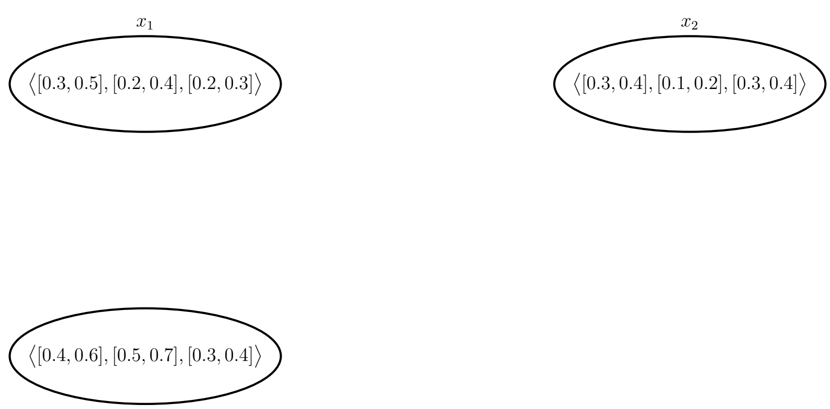
$$\begin{aligned}T^-_{\hat{A}}(x) &= min\{T^-_{\hat{A}_1}(x), T^-_{\hat{A}_2}(x)\}\\ T^+_{\hat{A}}(x) &= min\{T^+_{\hat{A}_1}(x), T^+_{\hat{A}_2}(x)\}\\ I^-_{\hat{A}}(x) &= max\{I^-_{\hat{A}_1}(x), I^-_{\hat{A}_2}(x)\}\\ I^+_{\hat{A}}(x) &= max\{I^+_{\hat{A}_1}(x), I^+_{\hat{A}_2}(x)\}\\ F^-_{\hat{A}}(x) &= max\{F^-_{\hat{A}_1}(x), F^-_{\hat{A}_2}(x)\}\\ F^+_{\hat{A}}(x) &= max\{F^+_{\hat{A}_1}(x), F^+_{\hat{A}_2}(x)\}\end{aligned}$$

ii. Her $xy \in E$ için

$$T^{-}_{\hat{B}}(xy) = min\{T^{-}_{\hat{B}_1}(xy), T^{-}_{\hat{B}_2}(xy)\}$$
$$T^{+}_{\hat{B}}(xy) = min\{T^{+}_{\hat{B}_1}(xy), T^{+}_{\hat{B}_2}(xy)\}$$
$$I^{-}_{\hat{B}}(xy) = max\{I^{-}_{\hat{B}_1}(xy), I^{-}_{\hat{B}_2}(xy)\}$$
$$I^{+}_{\hat{B}}(xy) = max\{I^{+}_{\hat{B}_1}(xy), I^{+}_{\hat{B}_2}(xy)\}$$
$$F^{-}_{\hat{B}}(xy) = max\{F^{-}_{\hat{B}_1}(xy), F^{-}_{\hat{B}_2}(xy)\}$$
$$F^{+}_{\hat{B}}(xy) = max\{F^{+}_{\hat{B}_1}(xy), F^{+}_{\hat{B}_2}(xy)\}$$

Örnek 3.2.8 Örnek 3.2.7 deki $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ aralık değerli neutrosophic graflarını göz önüne alalım.
$\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{\cap} \hat{A}_2$ ve $\hat{B} = \hat{B}_1 \hat{\cap} \hat{B}_2$ olmak üzere, Tanım 3.2.7 ile $\hat{G}_1 \hat{\bigcap} \hat{G}_2 = (G^*, \hat{A}, \hat{B})$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{A} = \{\langle x_1, [0.1, 0.3], [0.6, 0.7], [0.4, 0.6]\rangle, \langle x_2, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.4, 0.6]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\rangle\}$$
$$\hat{B} = \{\langle x_1x_2, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_1x_3, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle,$$
$$\langle x_2x_3, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle\}$$



Şekil 3.16: $\hat{G}_1 \hat{\bigcap} \hat{G}_2$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 3.2.5 $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. Bu takdirde $\hat{G}_1 \hat{\bigcap} \hat{G}_2$ arakesiti de $G^* = (V, E)$ üzerinde aralık değerli neutrosophic graftır.

İspat. $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ ve $\hat{G}_1 = (G^*, \hat{A}_2, \hat{B}_2)$ iki aralık değerli neutrosophic graf olsun. $\hat{G}_1 \bigcap \hat{G}_2$ nin aralık değerli neutrosophic graf olma koşullarını sağladığını gösterelim.

Açıkça $\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{\cap} \hat{A}_2$ V üzerinde, $\hat{B} = \hat{B}_1 \hat{\cap} \hat{B}_2$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic kümelerdir. Şimdi $\hat{G}_1 \hat{\bigcap} \hat{G}_2$ nin her $x, y \in V$ için Tanım 3.2.1 de verilen eşitsizlikleri sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
T^-_{\hat{B}}(xy) &= min\{T^-_{\hat{B}_1}(xy), T^-_{\hat{B}_2}(xy)\} \\
&\leq min\Big\{min\{T^-_{\hat{A}_1}(x), T^-_{\hat{A}_1}(y)\}, min\{T^-_{\hat{A}_2}(x), T^-_{\hat{A}_2}(y)\}\Big\} \\
&= min\Big\{min\{T^-_{\hat{A}_1}(x), T^-_{\hat{A}_2}(x)\}, min\{T^-_{\hat{A}_1}(y), T^-_{\hat{A}_2}(y)\}\Big\}
\end{aligned}$$

Buradan $T^-_{\hat{B}}(xy) \leq min\{T^-_{\hat{A}}(x), T^-_{\hat{A}}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$T^+_{\hat{B}}(xy) \leq min\{T^+_{\hat{A}}(x), T^+_{\hat{A}}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
I^-_{\hat{B}}(xy) &= max\{I^-_{\hat{B}_1}(xy), I^-_{\hat{B}_2}(xy)\} \\
&\geq max\Big\{max\{I^-_{\hat{A}_1}(x), I^-_{\hat{A}_1}(y)\}, max\{I^-_{\hat{A}_2}(x), I^-_{\hat{A}_2}(y)\}\Big\} \\
&= max\Big\{max\{I^-_{\hat{A}_1}(x), I^-_{\hat{A}_2}(x)\}, max\{I^-_{\hat{A}_1}(y), I^-_{\hat{A}_2}(y)\}\Big\}
\end{aligned}$$

Buradan $I^-_{\hat{B}}(xy) \geq max\{I^-_{\hat{A}}(x), I^-_{\hat{A}}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$I^+_{\hat{B}}(xy) \geq max\{I^+_{\hat{A}}(x), I^+_{\hat{A}}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
F^-_{\hat{B}}(xy) &= max\{F^-_{\hat{B}_1}(xy), F^-_{\hat{B}_2}(xy)\} \\
&\geq max\Big\{max\{F^-_{\hat{A}_1}(x), F^-_{\hat{A}_1}(y)\}, max\{F^-_{\hat{A}_2}(x), F^-_{\hat{A}_2}(y)\}\Big\} \\
&\geq max\Big\{max\{F^-_{\hat{A}_1}(x), F^-_{\hat{A}_2}(x)\}, max\{F^-_{\hat{A}_1}(y), F^-_{\hat{A}_2}(y)\}\Big\}
\end{aligned}$$

Buradan $F^-_{\hat{B}}(xy) \geq max\{F^-_{\hat{A}}(x), F^-_{\hat{A}}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$F^+_{\hat{B}}(xy) \geq max\{F^+_{\hat{A}}(x), F^+_{\hat{A}}(y)\}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\hat{G}_1 \hat{\bigcap} \hat{G}_2$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde aralık değerli neutrosophic graftır.

4. ARALIK DEĞERLİ NEUTROSOPHIC ESNEK GRAFLAR

4.1 Aralık Değerli Neutrosophic Esnek Kümeler

Bu bölümde aralık değerli neutrosophic esnek küme yapısını inceleyeceğiz ve bu yapının temel cebirsel özelliklerini ve elde edilen sonuçları arasındaki ilişkiyi araştıracağız.

Tanım 4.1.1 [24] $\emptyset \neq X$ bir küme olsun. $ADN(X)$ ile X üzerindeki tüm aralık değerli neutrosophic kümelerin ailesini gösterelim. E kümesi de X kümesindeki elemanları niteleyen parametre kümesi olsun. X üzerinde bir (Υ, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi $\Upsilon : E \to ADN(X)$ küme değerli fonksiyonu yardımıyla verilir ve $(\Upsilon, E) = \{(e, \Upsilon(e)) \mid e \in E\}$ şeklinde ifade edilir. Burada Υ'a (Υ, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu, $\Upsilon(e)$ kümesine de $e \in E$ parametresi için e-yaklaşımlı değerler kümesi denir. X üzerindeki tüm aralık değerli neutrosophic esnek kümelerin ailesi $ADNE(X)$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.1 $X = \{x_1, x_2\}$ evlerden oluşan bir küme, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ kümeside X kümesindeki evlerin niteliklerini belirten parametre kümesi olsun. Burada e_1 =ucuz, e_2 =güzel, e_3 =yeşil bahçeli, e_4 =pahalı ve e_5 =geniş olarak parametre kümesinin elemanları olarak verilsin. Bu durumda, X üzerinde bir (Υ, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıda olduğu gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
(\Upsilon, E) = \Big\{&(e_1, \{\big\langle x_1, [0.4, 0.7], [0.2, 0.6], [0.1, 0.8]\big\rangle, \big\langle x_2, [0.2, 0.3], [0.1, 0.6], [0.4, 0.7]\big\rangle\}),\\
&(e_2, \{\big\langle x_1, [0.1, 0.5], [0.4, 0.9], [0.2, 0.8]\big\rangle, \big\langle x_2, [0.1, 0.5], [0.6, 0.9], [0.2, 0.3]\big\rangle\}),\\
&(e_3, \{\big\langle x_1, [0.2, 0.8], [0.4, 0.5], [0.3, 0.7]\big\rangle, \big\langle x_2, [0.1, 0.3], [0.2, 0.5], [0.7, 0.9]\big\rangle\}),\\
&(e_4, \{\big\langle x_1, [0.0, 0.7], [0.2, 0.6], [0.3, 0.4]\big\rangle, \big\langle x_2, [0.5, 0.8], [0.2, 0.4], [0.1, 0.6]\big\rangle\}),\\
&(e_5, \{\big\langle x_1, [0.2, 1.0], [0.2, 0.3], [0.5, 0.9]\big\rangle, \big\langle x_2, [0.1, 0.3], [0.1, 0.4], [0.4, 0.9]\big\rangle\})\Big\}
\end{aligned}$$

Tablo 4.1: (Υ, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.4, 0.7], [0.2, 0.6], [0.1, 0.8]\rangle$	$\langle[0.2, 0.3], [0.1, 0.6], [0.4, 0.7]\rangle$
e_2	$\langle[0.1, 0.5], [0.4, 0.9], [0.2, 0.8]\rangle$	$\langle[0.1, 0.5], [0.6, 0.9], [0.2, 0.3]\rangle$
e_3	$\langle[0.2, 0.8], [0.4, 0.5], [0.3, 0.7]\rangle$	$\langle[0.1, 0.3], [0.2, 0.5], [0.7, 0.9]\rangle$
e_4	$\langle[0.0, 0.7], [0.2, 0.6], [0.3, 0.4]\rangle$	$\langle[0.5, 0.8], [0.2, 0.4], [0.1, 0.6]\rangle$
e_5	$\langle[0.2, 1.0], [0.2, 0.3], [0.5, 0.9]\rangle$	$< [0.1, 0.3], [0.1, 0.4], [0.4, 0.9]\rangle$

Tanım 4.1.2 [24] $(\Upsilon, E) \in ADNE(X)$ olsun. Eğer her $e \in E$ için $\Upsilon(e) = \hat{\emptyset}$ ise (Υ, E) kümesine boş aralık değerli neutrosophic esnek küme denir ve $(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E)$ ile gösterilir.
Örnek 4.1.1 de verilen aralık değerli neutrosophic esnek küme göz önüne alındığında bir boş aralık değerli neutrosophic esnek küme aşağıda olduğu gibi verilebilir.

Tablo 4.2: $(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E)$ boş aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$
e_2	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$
e_3	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$
e_4	$\langle[0, 0.0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$
e_5	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$	$\langle[0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle$

Tanım 4.1.3 [24] $(\Upsilon, E) \in ADNE(X)$ olsun. Eğer her $e \in E$ için $\Upsilon(e) = \hat{\Omega}$ ise (Υ, E) kümesine tam aralık değerli neutrosophic esnek küme denir ve $(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E)$ ile gösterilir.
Örnek 4.1.1 de verilen aralık değerli neutrosophic esnek küme göz önüne alındığında bir tam aralık değerli neutrosophic esnek küme aşağıda olduğu gibi verilebilir.

Tablo 4.3: $(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E)$ tam aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$
e_2	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$
e_3	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$
e_4	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$
e_5	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$	$\langle[1.0, 1.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$

Tanım 4.1.4 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. (Υ_K, E_1) 'e, (Υ_L, E_2) 'nin aralık değerli neutrosophic esnek alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$

i. $E_1 \subseteq E_2$

ii. Her $e \in E_1$ için $\Upsilon_K(e) \hat{\subseteq} \Upsilon_L(e)$

Bu durum $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.2 $X = \{x_1, x_2\}$ bir evrensel küme, $E_1 = \{e_2, e_3, e_4\}$ ve $E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümeleri olsun. (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

Tablo 4.4: (Υ_K, E_1) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_2	$\langle[0.3, 0.6], [0.8, 0.9], [0.5, 0.9]\rangle$	$\langle[0.7, 0.9], [0.7, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle$
e_3	$\langle[0.0, 0.4], [0.4, 0.8], [0.5, 0.8]\rangle$	$\langle[0.2, 0.5], [0.2, 0.5], [0.3, 0.9]\rangle$
e_4	$\langle[0.2, 0.7], [1.0, 1.0], [0.6, 0.9]\rangle$	$\langle[0.3, 0.7], [0.3, 0.7], [0.5, 0.7]\rangle$

Tablo 4.5: (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.7, 0.9], [0.5, 0.9], [0.1, 0.5]\rangle$	$\langle[0.6, 0.9], [0.4, 0.6], [0.3, 0.8]\rangle$
e_2	$\langle[0.4, 0.8], [0.4, 0.7], [0.2, 0.7]\rangle$	$\langle[0.8, 0.9], [0.5, 0.8], [0.5, 0.7]\rangle$
e_3	$\langle[0.2, 0.5], [0.1, 0.3], [0.4, 0.8]\rangle$	$\langle[0.3, 0.7], [0.2, 0.4], [0.2, 0.5]\rangle$
e_4	$\langle[0.5, 0.8], [0.4, 0.8], [0.2, 0.6]\rangle$	$\langle[0.5, 0.8], [0.1, 0.4], [0.4, 0.5]\rangle$
e_5	$\langle[0.3, 0.6], [0.6, 0.8], [0.3, 0.5]\rangle$	$\langle[0.2, 0.7], [0.1, 0.2], [0.3, 0.5]\rangle$

Açıkça görülür ki $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ dir.

Uyarı 4.1.1 $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ olması klasik kümelerde alt küme tanımında olduğu gibi (Υ_K, E_1) aralık değerli neutrosophic esnek kümesinin her elemanının (Υ_L, E_1) tarafından içerilmesi anlamına gelmez.

Yukarıdaki örnekte Υ_K ve Υ_L aralık değerli neutrosophic esnek kümelerinin e_2 parametresine göre x_1 elemanının T fonksiyonu değerleri incelendiğinde $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ olmasına rağmen $[0.3, 0.6] \nsubseteq [0.4, 0.8]$ olduğu görülür.

Önerme 4.1.1 E_1,E_2 ve E_3 birer parametre kümesi, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3$ ve $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2)$, $(\Upsilon_M, E_3) \in ADNE(X)$ olsun. Bu takdirde,

i. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1)$

ii. $(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)$

iii. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)$

iv. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ ve $(\Upsilon_L, E_2)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_M, E_3)$ ise $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_M, E_3)$

İspat.

i. Her $x \in X$ ve $e \in E_1$ için tanım 4.1.4 yardımıyla

$$\begin{array}{ll} T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^-_{\hat{\Omega}(e)}(x) = 1 & T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^+_{\hat{\Omega}(e)}(x) = 1 \\ I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^-_{\hat{\Omega}(e)}(x) = 0 & I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^+_{\hat{\Omega}(e)}(x) = 0 \\ F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^-_{\hat{\Omega}(e)}(x) = 0 & F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^+_{\hat{\Omega}(e)}(x) = 0 \end{array}$$

elde edilir. Buradan $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E)$ olduğu görülür.

ii. Her $x \in X$ ve $e \in E_1$ için tanım 4.1.4 yardımıyla

$$\begin{array}{ll} T^-_{\hat{\emptyset}(e)}(x) = 0 \leq T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & T^+_{\hat{\emptyset}(e)}(x) = 0 \leq T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \\ I^-_{\hat{\emptyset}(e)}(x) = 1 \geq I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & I^+_{\hat{\emptyset}(e)}(x) = 1 \geq I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \\ F^-_{\hat{\emptyset}(e)}(x) = 1 \geq F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & F^+_{\hat{\emptyset}(e)}(x) = 1 \geq F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \end{array}$$

elde edilir. Buradan $\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}\tilde{\subseteq}\Upsilon_K$ olduğu görülür.

iii. Açıktır.

iv. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ ise her $e \in E_1$ ve her $x \in X$ için $\Upsilon_{K(e)}(x)\hat{\subseteq}\Upsilon_{L(e)}(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ll} T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \\ I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \\ F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \end{array}$$

$(\Upsilon_L, E_2)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_M, E_3)$ ise her $e \in E_2$ ve her $x \in X$ için $\Upsilon_{L(e)}(x)\hat{\subseteq}\Upsilon_{M(e)}(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ll} T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \leq T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \leq T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \\ I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \\ F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \end{array}$$

Yukarıdaki eşitsizliklerden her $e \in E_1$ ve her $x \in X$ için

$$\begin{array}{ll} T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \\ I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \\ F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \end{array}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_M, E_3)$ tür.

Tanım 4.1.5 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. Eğer $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ ve $(\Upsilon_L, E_2)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)$ ise (Υ_K, E_1), (Υ_L, E_2) ye eşittir denir ve bu durum $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{=}(\Upsilon_L, E_2)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.6 [24] $(\Upsilon_K, E) \in ADNE(X)$ olsun. (Υ_K, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesinin tümleyeni her $e \in E$ ve $x \in X$ için $(\Upsilon_K, E)^t = \Upsilon_{\overline{K}}(e)$ şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}(\Upsilon_K, E)^t = \{\langle x, [F^-_{\Upsilon_K(e)}(x), F^+_{\Upsilon_K(e)}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_K(e)}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_K(e)}(x)],\\ [T^-_{\Upsilon_K(e)}(x), T^+_{\Upsilon_K(e)}(x)]\rangle :\ x \in X,\ e \in E\}\end{aligned}$$

Örnek 4.1.3 Tablo 4.6 da verilen (Υ_K, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesini göz önüne alalım.

Tablo 4.6: (Υ_K, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.4, 0.5], [1.0, 1.0], [0.3, 0.5]\rangle$	$\langle[0.5, 0.6], [0.5, 0.6], [0.4, 1.0]\rangle$
e_2	$\langle[0.3, 0.6], [0.8, 0.9], [0.5, 0.9]\rangle$	$\langle[0.7, 0.9], [0.7, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle$
e_3	$\langle[0.0, 0.4], [0.4, 0.8], [0.5, 0.8]\rangle$	$\langle[0.2, 0.5], [0.2, 0.5], [0.3, 0.9]\rangle$
e_4	$\langle[0.2, 0.7], [1.0, 1.0], [0.6, 0.9]\rangle$	$\langle[0.3, 0.7], [0.3, 0.7], [0.5, 0.7]\rangle$
e_5	$\langle[0.1, 0.5], [0.7, 0.9], [1.0, 1.0]\rangle$	$\langle[0.2, 0.6], [0.2, 0.6], [0.6, 0.8]\rangle$

Tanım 4.1.6 kullanılarak (Υ_K, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesinin tümleyeni aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 4.7: $(\Upsilon_K, E)^t$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.3, 0.5], [0.0, 0.0], [0.4, 0.5]\rangle$	$\langle[0.4, 1.0], [0.4, 0.5], [0.5, 0.6]\rangle$
e_2	$\langle[0.5, 0.9], [0.1, 0.2], [0.3, 0.6]\rangle$	$\langle[0.5, 0.8], [0.1, 0.3], [0.7, 0.9]\rangle$
e_3	$\langle[0.5, 0.8], [0.2, 0.6], [0.0, 0.4]\rangle$	$\langle[0.3, 0.9], [0.5, 0.8], [0.2, 0.5]\rangle$
e_4	$\langle[0.6, 0.9], [0.0, 0.0], [0.2, 0.7]\rangle$	$\langle[0.5, 0.7], [0.3, 0.7], [0.3, 0.7]\rangle$
e_5	$\langle[1.0, 1.0], [0.1, 0.3], [0.1, 0.5]\rangle$	$\langle[0.6, 0.8], [0.4, 0.8], [0.2, 0.6]\rangle$

Önerme 4.1.2 [24] $(\Upsilon_K, E) \in ADNE(X)$ olsun. O halde

i. $\left((\Upsilon_K, E)^t\right)^t = (\Upsilon_K, E)$

ii. $(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E)^t = (\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E)$

iii. $(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E)^t = (\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E)$

İspat.

i. $e \in E$ olmak üzere (Υ_K, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesini aşağıdaki gibi göz önüne alalım.

$$(\Upsilon_K, E) = \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X\}$$

Açıkça tanım 4.1.6 dan (Υ_K, E) nin tümleyeni aşağıdaki gibidir.

$$(\Upsilon_K, E)^t = \{\langle x, [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X\}$$

Yine tanım 4.1.6 yardımıyla $(\Upsilon_K, E)^t$ kümesinin tümleyenini aldığımızda aşağıdaki gibi (Υ_K, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi elde edilir.

$$((\Upsilon_K, E)^t)^t = \{\langle x, [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X\}$$

ii. $(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E)$ boş aralık değerli neutrosophic esnek kümesini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E) &= \{(e, \Upsilon_{\tilde{\emptyset}}(e)) : \ e \in E \text{ için } \Upsilon_{\tilde{\emptyset}}(e) = \hat{\emptyset} \ \} \\ &= \{\langle x, [0,0], [1,1], [1,1]\rangle : \ x \in X \ \}\end{aligned}$$

Her $e \in E$ ve $x \in X$ için tanım 4.1.6 dan $(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E)$ kümesinin tümleyeni

$$\begin{aligned}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E)^t &= \{\langle x, [1,1], [1-1, 1-1], [0,0]\rangle : \ x \in X \ \} \\ &= \{\langle x, [1,1], [0,0], [0,0]\rangle : \ x \in X \ \} \\ &= (\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

iii. ii) ye benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.1.1 [24] $(\Upsilon_K, E), (\Upsilon_L, E) \in ADNE(X)$ olsun. O halde $(\Upsilon_K, E) \tilde{\subseteq} (\Upsilon_L, E) \Leftrightarrow (\Upsilon_L, E)^t \tilde{\subseteq} (\Upsilon_K, E)^t$

İspat. (Υ_K, E) ve (Υ_L, E) aralık değerli neutrosophic esnek kümeleri $x \in X$ ve $e \in E$ olmak üzere aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{aligned}(\Upsilon_K, E) = \{\langle x, &[T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], \\ &[F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X\} \\ (\Upsilon_L, E) = \{\langle x, &[T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], \\ &[F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X\}\end{aligned}$$

Tanım 4.1.4 ile $(\Upsilon_K, E)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E) \Leftrightarrow$ Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \qquad T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$
$$I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \qquad I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$
$$F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \qquad F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$

dir. Ayrıca Tanım 4.1.6 ile

$$F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \leq F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \qquad F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \leq F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)$$
$$1 - I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \leq 1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \qquad 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \leq 1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)$$
$$T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \qquad T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$

elde edilir. Buradan $(\Upsilon_L, E)^t\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E)^t$ dir.

Tanım 4.1.7 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. (Υ_K, E_1) ile (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerinin genişletilmiş arakesiti $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2)$ ile gösterilir. $E = E_1 \cup E_2$ olmak üzere her $e \in E$ için (Υ_M, E) nin T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$F^+_{\Upsilon_M(e)}(x) = \begin{cases} F^+_{\Upsilon_K(e)}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^+_{\Upsilon_L(e)}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{F^+_{\Upsilon_K(e)}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

Açıkça iki aralık değerli neutrosophic esnek kümenin genişletilmiş arakesiti de aralık değerli neutrosophic esnek kümedir.

Örnek 4.1.4 $X = \{x_1, x_2\}$ bir evrensel küme, $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $E_2 = \{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ parametre kümeleri olsun. Tablo 4.8 ve Tablo 4.9 da verilen (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerini göz önüne alalım.

Tablo 4.8: (Υ_K, E_1) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle [0.3, 0.5], [0.1, 0.2], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.3, 0.4], [0.2, 0.3] \rangle$
e_2	$\langle [0.1, 0.2], [0.8, 0.9], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3] \rangle$
e_3	$\langle [0.3, 0.4], [0.7, 0.8], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.2, 0.4], [0.3, 0.4] \rangle$
e_4	$\langle [0.5, 0.7], [0.4, 0.5], [0.8, 0.9] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.3, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$

Tablo 4.9: (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.7, 0.8], [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$
e_2	$\langle [0.6, 0.7], [0.5, 0.7], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.6, 0.8], [0.4, 0.6] \rangle$
e_5	$\langle [0.3, 0.4], [0.3, 0.4], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.1, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$
e_6	$\langle [0.1, 0.2], [0.2, 0.3], [0.6, 0.7] \rangle$	$\langle [0.1, 0.3], [0.1, 0.3], [0.6, 0.7] \rangle$

Tanım 4.1.7 ile $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 4.10: $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.4, 0.5] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$
e_2	$\langle [0.1, 0.2], [0.8, 0.9], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.4, 0.6] \rangle$
e_3	$\langle [0.3, 0.4], [0.7, 0.8], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.2, 0.4], [0.3, 0.4] \rangle$
e_4	$\langle [0.5, 0.7], [0.4, 0.5], [0.8, 0.9] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.3, 0.5], [0.5, 0.6] \rangle$
e_5	$\langle [0.3, 0.4], [0.3, 0.4], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.1, 0.4], [0.4, 0.5] \rangle$
e_6	$\langle [0.1, 0.2], [0.2, 0.3], [0.6, 0.7] \rangle$	$\langle [0.1, 0.3], [0.1, 0.3], [0.6, 0.7] \rangle$

Tanım 4.1.8 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. (Υ_K, E_1) ile (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerinin daraltılmış arakesiti $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_K, E_1)\bar{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)$ ile

gösterilir. $E = E_1 \cap E_2$ olmak üzere her $e \in E$ için (Υ_M, E) nin T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = min\{T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = max\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = max\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = max\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = max\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$

Açıkça iki aralık değerli neutrosophic esnek kümenin daraltılmış arakesiti de aralık değerli neutrosophic esnek kümedir.

Örnek 4.1.5 Örnek 4.1.4 deki (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümeleri göz önüne alalım. $E_1 \cap E_2 = \{e_1, e_2\}$ olduğundan $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 4.11: $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.4, 0.5]\rangle$	$\langle[0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.3, 0.4]\rangle$
e_2	$\langle[0.1, 0.2], [0.8, 0.9], [0.5, 0.6]\rangle$	$\langle[0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.4, 0.6]\rangle$

Teorem 4.1.2 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)$ kümesi (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) tarafından içerilen en geniş aralık değerli neutrosophic esnek kümedir.

İspat. (Υ_M, E) kümesi (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) tarafından içerilen keyfi bir aralık değerli neutrosophic esnek küme olsun. Yani $(\Upsilon_M, E)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)$ ve $(\Upsilon_M, E)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ olsun. $(\Upsilon_M, E)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)$ olduğunu gösterelim. Açıkça
$(\Upsilon_M, E)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)$ ise $E \subseteq E_1$ ve her $e \in E$, $x \in X$ için $\Upsilon_{M(e)}\tilde{\subseteq}\Upsilon_{K(e)} \Leftrightarrow$

$$T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \qquad I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \qquad F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)$$
$$T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \qquad I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \qquad F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)$$

ve $(\Upsilon_M, E)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_L, E_2)$ ise $E \subseteq E_2$ ve her $e \in E$, $x \in X$ için $\Upsilon_{M(e)}\tilde{\subseteq}\Upsilon_{L(e)} \Leftrightarrow$

$$T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \qquad I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \qquad F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$
$$T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \qquad I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \qquad F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$

şeklindedir. Tanım 4.1.8 ile $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)$ daraltılmış arakesiti aralık değerli neutrosophic kümedir.
Açık olarak $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2) \subseteq (\Upsilon_K, E_1)$ ve $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2) \subseteq (\Upsilon_L, E_2)$ dir.
$E \subseteq E_1$ ve $E \subseteq E_2$ ise $E \subseteq E_1 \cap E_2$ ve her $e \in E$, $x \in X$ için

$$T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq min\{T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq max\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq max\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq max\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$
$$F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq max\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}$$

olduğundan $\Upsilon_{M(e)}\tilde{\subseteq}\Upsilon_{K(e)}\hat{\cap}\Upsilon_{L(e)}$ dir. Buradan $(\Upsilon_M, E)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)$ elde edilir. Dolayısıyla $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)$ kümesinin (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) kümeleri tarafından içerilen en geniş aralık değerli neutrosophic esnek küme olduğu görülür.

Önerme 4.1.3 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2), (\Upsilon_M, E_3) \in ADNE(X)$ olsun. O halde

i. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$, $\quad (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$

ii. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1) = (\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1)$, $\quad (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1) = (\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1)$

iii. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$, $\quad (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$

iv. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cap}(\Upsilon_K, E_1)$, $\quad (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_L, E_2)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_K, E_1)$

v. $((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2))\tilde{\cap}(\Upsilon_M, E_3) = (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}((\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cap}(\Upsilon_M, E_3))$,
$((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2))\tilde{\sqcap}(\Upsilon_M, E_3) = (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}((\Upsilon_L, E_2)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_M, E_3))$

İspat.

i. $(\Upsilon_K, E_1) \in ADNE(X)$ olsun. Açıkça her $e \in E_1$ için

$$(\Upsilon_K, E_1) = \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : x \in X\}$$

şeklindedir. Üstelik

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_K, E_1)$

$$= \{\langle x, [min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [min\{[T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}],$$
$$[max\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [max\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}],$$
$$[max\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [max\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}]\rangle : \ x \in X\}$$
$$= \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], \rangle : \ x \in X\}$$
$= (\Upsilon_K, E_1)$ dir.

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$ eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir.

ii. Açıkça her $e \in E_1$ ve her $x \in X$ için $(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1) = \{\langle x, [0,0], [1,1], [1,1]\rangle : \ x \in X\}$ şeklindedir. Üstelik

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1)$

$$= \{\langle x, [min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}], [min\{[T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}],$$
$$[max\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}], [max\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}],$$
$$[max\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}], [max\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}]\rangle : \ x \in X\}$$
$$= \{\langle x, [0,0], [1,1], [1,1]\rangle : \ x \in X\}$$
$= (\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1)$ dir.

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1) = (\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1)$ eşitliği de benzer şekilde gösterilir.

iii. Açıkça her $e \in E_1$ ve her $x \in X$ için $(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) = \{\langle x, [1,1], [0,0], [0,0]\rangle : \ x \in X\}$ şeklindedir. Üstelik

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1)$

$$= \{\langle x, [min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}], [min\{[T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}],$$
$$[max\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}], [max\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}],$$
$$[max\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}], [max\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}]\rangle : \ x \in X\}$$
$$= \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)],$$
$$[F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X, \, e \in E_1\}$$
$= (\Upsilon_K, E_1)$ dir.

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$ eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir.

iv. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_M, E)$ ve $(\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cap}(\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_N, E)$ olsun.

Burada $E = E_1 \cup E_2$ dir. Şimdi $e \in E$ olsun.

Eğer $e \in E_1 \backslash E_2$ ise $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_N, E)$ dir.

Eğer $e \in E_2 \backslash E_1$ ise $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_N, E)$ dir.

Eğer $e \in E_1 \cap E_2$ ise

$$\begin{aligned}
(\Upsilon_M, E) = \{\langle x, & [min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], [min\{[T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], \\
& [max\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], [max\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], \\
& [max\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], [max\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}]\rangle :\ x \in X\} \\
= \{\langle x, & [min\{T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [min\{[T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], \\
& [max\{I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [max\{I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], \\
& [max\{F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [max\{F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}]\rangle :\ x \in X\} \\
= (\Upsilon_N, E) &
\end{aligned}$$

$(\Upsilon_K, E_1)\bar{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_L, E_2)\bar{\sqcap}(\Upsilon_K, E_1)$ eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir.

v. $((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2))\tilde{\cap}(\Upsilon_M, E_3) = (\Upsilon_A, E)$ ve

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}((\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cap}(\Upsilon_M, E_3)) = (\Upsilon_B, E^{'})$ olsun.

Açıkça $E = (E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = E^{'}$ olduğundan $E = E^{'}$ dür.

$e \in E = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$ ise $e \in (E_1 \cup E_2)\backslash E_3$, $e \in E_3 \backslash (E_1 \cup E_2)$ veya $e \in E = (E_1 \cup E_2) \cap E_3$ olmak üzere üç durum mevcuttur.

1. Durum: $e \in (E_1 \cup E_2)\backslash E_3$ olsun. O halde $e \in (E_1 \backslash E_2)\backslash E_3$, $e \in (E_2 \backslash E_1)\backslash E_3$ veya $e \in (E_1 \cap E_2)\backslash E_3$ dür.

1.1. Durum: $e \in (E_1 \backslash E_2)\backslash E_3$ ise

$\Upsilon_A(e) = \Upsilon_K(e) = \Upsilon_B(e)$ olup $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür.

1.2. Durum: $e \in (E_2 \backslash E_1)\backslash E_3$ ise

$\Upsilon_A(e) = \Upsilon_L(e) = \Upsilon_B(e)$ olup $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür.

1.3. Durum: $e \in (E_1 \cap E_2)\backslash E_3$ ise

$\Upsilon_A(e) = \Upsilon_K(e)\hat{\cap}\Upsilon_L(e) = \Upsilon_B(e)$ olup $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür.

2. Durum: $e \in E_3 \backslash (E_1 \cup E_2)$ olsun. O halde $e \in E_3 \backslash (E_1 \backslash E_2)$, $e \in E_3 \backslash (E_2 \backslash E_1)$ veya $e \in E_3 \backslash (E_1 \cap E_2)$ dir.

2.1. Durum: $e \in E_3 \backslash (E_1 \backslash E_2)$ ise

$\Upsilon_A(e) = \Upsilon_M(e) = \Upsilon_B(e)$ olup $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür.

2.2. Durum: $e \in E_3 \backslash (E_2 \backslash E_1)$ ise

$\Upsilon_A(e) = \Upsilon_M(e) = \Upsilon_B(e)$ olup $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür.

2.3. Durum: $e \in E_3 \backslash (E_1 \cap E_2)$ ise

$\Upsilon_A(e) = \Upsilon_M(e) = \Upsilon_B(e)$ olup $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür.

3. Durum: $e \in E = (E_1 \cup E_2) \cap E_3$ olsun. O halde $e \in (E_1 \backslash E_2) \cap E_3$, $e \in (E_2 \backslash E_1) \cap E_3$ veya $e \in (E_1 \cap E_2) \cap E_3$ dür.

3.1. Durum: $e \in (E_1 \backslash E_2) \cap E_3$ ise

$\Upsilon_A(e) = \Upsilon_K(e) \hat{\cap} \Upsilon_M(e) = \Upsilon_B(e)$ olup $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür.

3.2. Durum: $e \in (E_2 \backslash E_1) \cap E_3$ ise

$\Upsilon_A(e) = \Upsilon_L(e) \hat{\cap} \Upsilon_M(e) = \Upsilon_B(e)$ olup $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür.

3.3. Durum: $e \in (E_1 \cap E_2) \cap E_3$ ise

$$\begin{aligned}
\Upsilon_A(e) &= (\Upsilon_K(e) \hat{\cap} \Upsilon_L(e)) \hat{\cap} \Upsilon_M(e) \\
&= \Upsilon_K(e) \hat{\cap} (\Upsilon_L(e) \hat{\cap} \Upsilon_M(e)) \\
&= \Upsilon_B(e) \text{ olup}
\end{aligned}$$

yaklaşım fonksiyonlarının eşitliğinden $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E^{'})$ dür. O halde $((\Upsilon_K, E_1) \tilde{\cap} (\Upsilon_L, E_2)) \tilde{\cap} (\Upsilon_M, E_3) = (\Upsilon_K, E_1) \tilde{\cap} ((\Upsilon_L, E_2) \tilde{\cap} (\Upsilon_M, E_3))$ elde edilir.

$((\Upsilon_K, E_1) \tilde{\sqcap} (\Upsilon_L, E_2)) \tilde{\sqcap} (\Upsilon_M, E_3) = (\Upsilon_K, E_1) \tilde{\sqcap} ((\Upsilon_L, E_2) \tilde{\sqcap} (\Upsilon_M, E_3))$ eşitliğinin sağlandığı önerme 4.1.3 ün ispatının v. maddesinin 3.3. durumu ile açıktır.

Tanım 4.1.9 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. (Υ_K, E_1) ile (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerinin genişletilmiş birleşimi $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_K, E_1) \tilde{\cup} (\Upsilon_L, E_2)$ ile gösterilir. $E = E_1 \cup E_2$ olmak üzere her $e \in E$ için (Υ_M, E) nin T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = \begin{cases} F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

Açıkça iki aralık değerli neutrosophic esnek kümenin genişletilmiş birleşimi de aralık değerli neutrosophic esnek kümedir.

Örnek 4.1.6 $X = \{x_1, x_2\}$ bir evrensel küme, $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $E_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametre kümeleri olsun. Tablo 4.12 ve Tablo 4.13 de verilen (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerini göz önüne alalım.

Tablo 4.12: (Υ_K, E_1) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.4, 0.5], [0.0, 0.2], [0.3, 0.5]\rangle$	$\langle[0.5, 0.6], [0.5, 0.6], [0.4, 1.0]\rangle$
e_2	$\langle[0.3, 0.6], [0.8, 0.9], [0.5, 0.9]\rangle$	$\langle[0.7, 0.9], [0.7, 0.9], [0.2, 0.3]\rangle$
e_3	$\langle[0.1, 0.4], [0.4, 0.8], [0.5, 0.8]\rangle$	$\langle[0.2, 0.5], [0.2, 0.5], [0.3, 0.9]\rangle$
e_4	$\langle[0.2, 0.7], [0.3, 0.4], [0.6, 0.9]\rangle$	$\langle[0.3, 0.7], [0.3, 0.7], [0.5, 0.7]\rangle$

Tablo 4.13: (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_3	$\langle[0.3, 0.4], [0.5, 0.6], [0.1, 0.3]\rangle$	$\langle[0.7, 0.9], [0.5, 0.6], [0.3, 0.4]\rangle$
e_4	$\langle[0.6, 0.8], [0.4, 0.7], [0.2, 0.5]\rangle$	$\langle[0.2, 0.5], [0.6, 0.8], [0.5, 0.8]\rangle$
e_5	$\langle[0.2, 0.3], [0.1, 0.2], [0.4, 0.5]\rangle$	$\langle[0.3, 0.4], [0.1, 0.4], [0.4, 0.5]\rangle$
e_6	$\langle[0.7, 0.8], [0.4, 0.5], [0.2, 0.3]\rangle$	$\langle[0.7, 0.8], [0.1, 0.3], [0.6, 0.7]\rangle$

Tanım 4.1.9 ile $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi Tablo 4.14 deki gibi elde edilir.

Tablo 4.14: $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.4, 0.5], [0.0, 0.2], [0.3, 0.5]\rangle$	$\langle[0.5, 0.6], [0.5, 0.6], [0.4, 1.0]\rangle$
e_2	$\langle[0.3, 0.6], [0.8, 0.9], [0.5, 0.9]\rangle$	$\langle[0.7, 0.9], [0.7, 0.9], [0.2, 0.3]\rangle$
e_3	$\langle[0.3, 0.4], [0.4, 0.6], [0.1, 0.3]\rangle$	$\langle[0.7, 0.9], [0.2, 0.5], [0.2, 0.3]\rangle$
e_4	$\langle[0.6, 0.8], [0.3, 0.4], [0.2, 0.5]\rangle$	$\langle[0.3, 0.7], [0.6, 0.8], [0.5, 0.8]\rangle$
e_5	$\langle[0.2, 0.3], [0.1, 0.2], [0.4, 0.5]\rangle$	$\langle[0.3, 0.4], [0.1, 0.4], [0.4, 0.5]\rangle$
e_6	$\langle[0.7, 0.8], [0.4, 0.5], [0.2, 0.3]\rangle$	$\langle[0.7, 0.8], [0.1, 0.3], [0.6, 0.7]\rangle$

Teorem 4.1.3 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2)$ kümesi (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) kümelerini içeren en küçük aralık değerli neutrosophic esnek kümedir.

İspat. (Υ_M, E) kümesi (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) kümelerini içeren keyfi bir aralık değerli neutrosophic esnek küme olsun. Yani $(\Upsilon_K, E_1) \subseteq (\Upsilon_M, E)$ ve $(\Upsilon_L, E_2) \subseteq (\Upsilon_M, E)$ olsun. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2) \subseteq (\Upsilon_M, E)$ olduğunu gösterelim. Açıkça
$(\Upsilon_K, E_1) \subseteq (\Upsilon_M, E)$ ise $E_1 \subseteq E$ ve her $e \in E_1$, $x \in X$ için $\Upsilon_{K(e)}(x)\hat{\subseteq}\Upsilon_{M(e)}(x) \Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{ll}
T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \leq T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \\
I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \\
F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) \geq F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x)
\end{array}
$$

dir. Benzer şekilde $(\Upsilon_L, E_2) \subseteq (\Upsilon_M, E)$ ise $E_2 \subseteq E$ ve her $e \in E_2$, $x \in X$ için $\Upsilon_{L(e)}(x)\hat{\subseteq}\Upsilon_{M(e)}(x) \Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{ll}
T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \leq T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \leq T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \\
I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \\
F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) & F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) \geq F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x)
\end{array}
$$

şeklindedir. Tanım 4.1.9 ile $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic kümedir. Açık olarak $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2)$ ve $(\Upsilon_L, E_2)\tilde{\subseteq}(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2)$ dir $E_1 \subseteq E$ ve $E_2 \subseteq E$ ise $E_1 \cup E_2 \subseteq E$ ve her $e \in E_1 \cup E_2$, $x \in X$ için

$$T^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq \begin{cases} T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$T^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \geq \begin{cases} T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq \begin{cases} I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq \begin{cases} I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$F^-_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq \begin{cases} F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$F^+_{\Upsilon_{M(e)}}(x) \leq \begin{cases} F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

olduğundan $\Upsilon_{K(e)}\hat{\cup}\Upsilon_{L(e)} \subseteq \Upsilon_{M(e)}$ dir. Buradan $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2) \subseteq (\Upsilon_M, E)$ elde edilir. Dolayısıyla $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2)$ kümesinin (Υ_K, E_1) ve (Υ_K, E_1) kümelerini içeren en küçük aralık değerli neutrosophic esnek küme olduğu görülür.

Sonuç 4.1.1 $\big(ADNE(X), \tilde{\subseteq}, \tilde{\cup}, \tilde{\sqcap}\big)$ tam kafestir.

Tanım 4.1.10 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. (Υ_K, E_1) ile (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerinin daraltılmış birleşimi $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_L, E_2)$ ile gösterilir. $E = E_1 \cap E_2$ olmak üzere her $e \in E$ için (Υ_M, E) nin T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T^{-}_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = max\{T^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$
$$T^{+}_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = max\{T^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$
$$I^{-}_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = min\{I^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$
$$I^{+}_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = min\{I^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$
$$F^{-}_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = min\{F^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$
$$F^{+}_{\Upsilon_{M(e)}}(x) = min\{F^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)$$

Açıkça iki aralık değerli neutrosophic esnek kümenin daraltılmış birleşimi de aralık değerli neutrosophic esnek kümedir.

Örnek 4.1.7 Örnek 4.1.6 daki (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerini göz önüne alalım. $E_1 \cap E_2 = \{e_3, e_4\}$ olduğundan $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_L, E_2)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 4.15: $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_3	$\langle[0.3, 0.4], [0.4, 0.6], [0.1, 0.3]\rangle$	$\langle[0.7, 0.9], [0.2, 0.5], [0.2, 0.3]\rangle$
e_4	$\langle[0.6, 0.8], [0.3, 0.4], [0.2, 0.5]\rangle$	$\langle[0.3, 0.7], [0.6, 0.8], [0.5, 0.8]\rangle$

Önerme 4.1.4 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2), (\Upsilon_M, E_3) \in ADNE(X)$ olsun. O halde

i. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$, $\quad (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$

ii. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$, $\quad (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$

iii. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) = (\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1)$, $\quad (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) = (\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1)$

iv. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cup}(\Upsilon_K, E_1)$, $\quad (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_L, E_2)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_K, E_1)$

v. $((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2))\tilde{\cup}(\Upsilon_M, E_3) = (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}((\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cup}(\Upsilon_M, E_3))$,

$((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_L, E_2))\tilde{\sqcup}(\Upsilon_M, E_3) = (\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}((\Upsilon_L, E_2)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_M, E_3))$

İspat.

i. $(\Upsilon_K, E_1) \in ADNE(X)$ olsun. Açıkça her $e \in E_1$ için

$$(\Upsilon_K, E_1) = \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X\}$$

şeklindedir. Üstelik

$$\begin{aligned}
&(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_K, E_1)\\
&= \{\langle x, [max\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [max\{[T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}],\\
&\qquad [min\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [min\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}],\\
&\qquad [min\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [min\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}]\rangle : \ x \in X\}\\
&= \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)],\\
&\qquad [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X\}\\
&= (\Upsilon_K, E_1) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$ eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir.

ii. Açıkça her $e \in E_1$ ve her $x \in X$ için $(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1) = \{\langle x, [0,0], [1,1], [1,1]\rangle : \ x \in X\}$ şeklindedir. Üstelik

$$\begin{aligned}
&(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1)\\
&= \{\langle x, [max\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}], [max\{[T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}],\\
&\qquad [min\{I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}], [min\{I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}],\\
&\qquad [min\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}], [min\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}]\rangle : \ x \in X\}\\
&= \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)],\\
&\qquad [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X, \, e \in E_1\}\\
&= (\Upsilon_K, E_1) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_{\tilde{\emptyset}}, E_1) = (\Upsilon_K, E_1)$ eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir.

iii. Her $e \in E_1$ ve her $x \in X$için $(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) = \{\langle x, [1,1], [0,0], [0,0]\rangle : \ x \in X\}$ şeklindedir. Üstelik

$$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\langle x, [max\{T^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}], [max\{[T^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1\}], \\
&\qquad [min\{I^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}], [min\{I^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}], \\
&\qquad [min\{F^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}], [min\{F^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 0\}]\rangle :\ x \in X\} \\
&= \{\langle x, [1,1], [0,0], [0,0]\rangle :\ x \in X\} \\
&= (\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1) = (\Upsilon_{\tilde{\Omega}}, E_1)$ eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir.

iv. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_M, E)$ ve $(\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cup}(\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_N, E)$ olsun. Burada $E = E_1 \cup E_2$ dir. Şimdi $e \in E$ olsun.

Eğer $e \in E_1 \backslash E_2$ ise $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_K, E_1) = (\Upsilon_N, E)$ dir.

Eğer $e \in E_2 \backslash E_1$ ise $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_N, E)$ dir.

Eğer $e \in E_1 \cap E_2$ ise

$$
\begin{aligned}
(\Upsilon_M, E) &= \{\langle x, [max\{T^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], [max\{[T^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], \\
&\qquad [min\{I^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], [min\{I^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], \\
&\qquad [min\{F^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}], [min\{F^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\}]\rangle :\ x \in X\} \\
&= \{\langle x, [max\{T^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [max\{[T^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], \\
&\qquad [min\{I^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x), I^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [min\{I^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x), I^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], \\
&\qquad [min\{F^{-}_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^{-}_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}], [min\{F^{+}_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^{+}_{\Upsilon_{K(e)}}(x)\}]\rangle :\ x \in X\} \\
&= (\Upsilon_N, E)
\end{aligned}
$$

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_L, E_2)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_K, E_1)$ eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir.

v. Önerme 4.1.3 ün v. maddesinin ispatına benzer şekilde yapılır.

Önerme 4.1.5 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. O halde

i. $((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2))^t = (\Upsilon_K, E_1)^t \tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2)^t$

ii. $((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcup}(\Upsilon_L, E_2))^t = (\Upsilon_K, E_1)^t \tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2)^t$

iii. $((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2))^t = (\Upsilon_K, E_1)^t \tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2)^t$

iv. $((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\sqcap}(\Upsilon_L, E_2))^t = (\Upsilon_K, E_1)^t \tilde{\sqcup}(\Upsilon_L, E_2)^t$

İspat.

i. $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümelerini aşağıdaki gibi göz önüne alalım.

$$(\Upsilon_K, E_1) = \{\langle x,[T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X, \ e \in E_1\}$$

$$(\Upsilon_L, E_2) = \{\langle x,[T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X, \ e \in E_2\}$$

O halde (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) nin tümleyenleri sırasıyla

$$(\Upsilon_K, E_1)^t = \{\langle x, [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X \ e \in E_1\}$$

$$(\Upsilon_L, E_2)^t = \{\langle x, [F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)]\rangle : \ x \in X \, e \in E_2\}$$

şeklindedir. $E = E_1 \cup E_2$ ve $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_M, E)$ olmak üzere $(\Upsilon_M, E)^t$ kümesi

$$F^-_{\Upsilon^t_{M}(e)}(x) = \begin{cases} F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$F^+_{\Upsilon^t_{M}(e)}(x) = \begin{cases} F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^-_{\Upsilon^t_{M}(e)}(x) = \begin{cases} 1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ 1 - I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1 - I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^+_{\Upsilon^t_{M}(e)}(x) = \begin{cases} 1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$T^-_{\Upsilon^t_M(e)}(x) = \begin{cases} T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$T^+_{\Upsilon^t_M(e)}(x) = \begin{cases} T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$= (\Upsilon_K, E_1)^t \tilde{\cap} (\Upsilon_L, E_2)^t$ dir.

ii. Tanım 4.1.8 ve Tanım 4.1.10 kullanılarak i) ye benzer şekilde yapılır.

iii. $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümelerini aşağıdaki gibi göz önüne alalım.

$$(\Upsilon_K, E_1) = \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle :\ x \in X,\ e \in E_1\}$$

$$(\Upsilon_L, E_2) = \{\langle x, [T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)]\rangle :\ x \in X,\ e \in E_2\}$$

O halde (Υ_K, E_1) ve (Υ_L, E_2) nin tümleyenleri sırasıyla

$$(\Upsilon_K, E_1)^t = \{\langle x, [F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x)], [T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x)]\rangle :\ x \in X\ e \in E_1\}$$

$$(\Upsilon_L, E_2)^t = \{\langle x, [F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)], [T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)]\rangle :\ x \in X\ e \in E_2\}$$

şeklindedir. $E = E_1 \cup E_2$ ve $(\Upsilon_K, E_1) \tilde{\cap} (\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_M, E)$ olmak üzere $(\Upsilon_M, E)^t$ kümesi

$$F^-_{\Upsilon^t_M(e)}(x) = \begin{cases} F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{F^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$F^+_{\Upsilon^t_M(e)}(x) = \begin{cases} F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{F^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^-_{\Upsilon^t_{M(e)}}(x) = \begin{cases} 1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ 1 - I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{1 - I^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1 - I^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$I^+_{\Upsilon^t_{M(e)}}(x) = \begin{cases} 1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ max\{1 - I^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$T^-_{\Upsilon^t_{M(e)}}(x) = \begin{cases} T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{T^-_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$$T^+_{\Upsilon^t_{M(e)}}(x) = \begin{cases} T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x) & e \in E_1 \backslash E_2 \\ T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x) & e \in E_2 \backslash E_1 \\ min\{T^+_{\Upsilon_{K(e)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e)}}(x)\} & e \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

$= (\Upsilon_K, E_1)^t \tilde{\cap} (\Upsilon_L, E_2)^t$ dir.

iv. Tanım 4.1.8 ve Tanım 4.1.10 kullanılarak iii) ye benzer şekilde yapılır.

Önerme 4.1.6 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2), (\Upsilon_M, E_3) \in ADNE(X)$ olsun. O halde

i. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}((\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cup}(\Upsilon_M, E_3)) = ((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2))\tilde{\cup}((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_M, E_3))$

ii. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}((\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cap}(\Upsilon_M, E_3)) = ((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_L, E_2))\tilde{\cap}((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cup}(\Upsilon_M, E_3))$

İspat.

i. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}((\Upsilon_L, E_2)\tilde{\cup}(\Upsilon_M, E_3)) = (\Upsilon_A, E)$ ve
$((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_L, E_2))\tilde{\cup}((\Upsilon_K, E_1)\tilde{\cap}(\Upsilon_M, E_3)) = (\Upsilon_B, E')$ olsun.

(Υ_A, E) nin parametre kümesi $E = E_1 \cap (E_2 \cup E_3)$ ve (Υ_B, E') nin parametre kümesi $E' = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$ olduğundan parametre kümelerinin eşitliğinden $E = E'$ yazılır. Şimdi $e \in E$ olsun.

Buradan $e \in E_1$ ve $e \in (E_2 \cup E_3)$ dür.

1. Durum: $e \in E_1$ ve $e \in E_2 \backslash E_3$ ise

$\Upsilon_{A(e)}(x) = \Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \Upsilon_{L(e)}(x)$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{B(e)}(x) &= (\Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \Upsilon_{L(e)}(x)) \hat{\cup} (\Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \hat{\emptyset}) \\ &= \Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \Upsilon_{L(e)}(x) \end{aligned}$$

olup buradan $\Upsilon_{A(e)}(x) = \Upsilon_{B(e)}(x)$ dir. Yani $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E')$ elde edilir.

2. Durum: $e \in E_1$ ve $e \in E_3 \backslash E_2$ ise

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{A(e)}(x) &= \Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \Upsilon_{M(e)}(x) \\
\Upsilon_{B(e)}(x) &= (\Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \hat{\emptyset}) \hat{\cup} (\Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \Upsilon_{M(e)}(x)) \\
&= \Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \Upsilon_{M(e)}(x)
\end{aligned}$$

olup buradan $\Upsilon_{A(e)}(x) = \Upsilon_{B(e)}(x)$ dir. Yani $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E')$ elde edilir.

3. Durum: $e \in E_1$ ve $e \in E_2 \cap E_3$ ise

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{A(e)}(x) &= \Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} (\Upsilon_{L(e)}(x) \hat{\cup} \Upsilon_{M(e)}) \\
&= [(\Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \Upsilon_{L(e)}(x)) \hat{\cup} (\Upsilon_{K(e)}(x) \hat{\cap} \Upsilon_{M(e)}(x))] \\
&= \Upsilon_{B(e)}(x)
\end{aligned}$$

dir. Yani $(\Upsilon_A, E) = (\Upsilon_B, E')$ elde edilir.

ii. i) ye benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 4.1.2 $\left(ADNE(X), \tilde{\subseteq}\right)$ dağılımlı kafestir.

Tanım 4.1.11 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. (Υ_K, E_1) ile (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerinin $\vee-$ birleşimi $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_K, E_1) \tilde{\bigvee} (\Upsilon_L, E_2)$ ile gösterilir ve burada $E = E_1 \times E_2$ olmak üzere her $e \in E$ için $\Upsilon_M(e_1, e_2) = \Upsilon_K(e_1) \hat{\cup} \Upsilon_L(e_2)$ yaklaşım fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\Upsilon_M(e_1, e_2) = \{\big\langle x, &[max\{T^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, max\{T^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}], \\
&[min\{I^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\},\ min\{I^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}], \\
&[min\{F^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, min\{F^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}]\big\rangle\}
\end{aligned}$$

Tanım 4.1.12 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ olsun. (Υ_K, E_1) ile (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerinin $\wedge-$ arakesiti $(\Upsilon_M, E) = (\Upsilon_K, E_1) \tilde{\bigwedge} (\Upsilon_L, E_2)$ ile gösterilir ve burada $E = E_1 \times E_2$ olmak üzere her $e \in E$ için $\Upsilon_M(e_1, e_2) = \Upsilon_K(e_1) \hat{\cap} \Upsilon_L(e_2)$ yaklaşım fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\Upsilon_M(e_1, e_2) = \{\big\langle x, &[min\{T^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, min\{T^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}], \\
&[max\{I^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\},\ max\{I^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}], \\
&[max\{F^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, max\{F^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}]\big\rangle\}
\end{aligned}$$

Önerme 4.1.7 $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2), (\Upsilon_M, E_3) \in ADNE(X)$ olsun. O halde

i. $\left[(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\bigvee}(\Upsilon_L, E_2)\right]^t = (\Upsilon_K, E_1)^t\tilde{\bigwedge}(\Upsilon_L, E_2)^t$

ii. $\left[(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\bigwedge}(\Upsilon_L, E_2)\right]^t = (\Upsilon_K, E_1)^t\tilde{\bigvee}(\Upsilon_L, E_2)^t$

İspat.

i. $(\Upsilon_K, E_1), (\Upsilon_L, E_2) \in ADNE(X)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümelerini göz önüne alalım.

$(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\bigvee}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_M, E)$ olsun. Burada $E = E_1 \times E_2$ olup her $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}\Upsilon_M(e_1, e_2) = \{\langle x, &[max\{T^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, max\{T^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}],\\ &[min\{I^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), I^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\},\ min\{I^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), I^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}],\\ &[min\{F^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, min\{F^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}]\rangle\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Upsilon_M}(e_1, e_2) &= \{\langle x, [min\{F^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, min\{F^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}],\\ &\quad [max\{1 - I^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), 1 - I^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, max\{1 - I^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}],\\ &\quad [max\{T^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}, max\{T^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)\}]\rangle\}\\ &= \{\langle x, [F^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x)],\\ &\qquad [T^-_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^+_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x)]\rangle :\ x \in X\ e_1 \in E_1\}\\ &\tilde{\bigwedge}\{\langle x, [F^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x), F^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)], [1 - I^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x), 1 - I^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)],\\ &\qquad [T^-_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x), T^+_{\Upsilon_{L(e_2)}}(x)]\rangle :\ x \in X\ e_2 \in E_2\}\\ &= \overline{\Upsilon_K}(e_1)\tilde{\cap}\overline{\Upsilon_L}(e_2) \text{ dir. Buradan açıkça}\end{aligned}$$

$\left[(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\bigvee}(\Upsilon_L, E_2)\right]^t = (\Upsilon_K, E_1)^t\tilde{\bigwedge}(\Upsilon_L, E_2)^t$ dir.

ii. i) ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.1.13 X ve Y birer evrensel küme olmak üzere (Υ_K, E_1), X üzerinde; (Υ_L, E_2), Y üzerinde tanımlı iki aralık değerli neutrosophic esnek küme olsun. (Υ_K, E_1) ile (Υ_L, E_2) nin kartezyen çarpımı $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\times}(\Upsilon_L, E_2) = (\Upsilon_M, E_1 \times E_2)$ ile gösterilir ve $(\Upsilon_M, E_1 \times E_2)$

nin T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları her $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$ ve $(x, y) \in X \times Y$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T^{-}_{\Upsilon_{K\times L(e_1,e_2)}}(x,y) = min\{T^{-}_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^{-}_{\Upsilon_{L(e_2)}}(y)\}$$
$$T^{+}_{\Upsilon_{K\times L(e_1,e_2)}}(x,y) = min\{T^{+}_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), T^{+}_{\Upsilon_{L(e_2)}}(y)\}$$
$$I^{-}_{\Upsilon_{K\times L(e_1,e_2)}}(x,y) = max\{I^{-}_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), I^{-}_{\Upsilon_{L(e_2)}}(y)\}$$
$$I^{+}_{\Upsilon_{K\times L(e_1,e_2)}}(x,y) = max\{I^{+}_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), I^{+}_{\Upsilon_{L(e_2)}}(y)\}$$
$$F^{-}_{\Upsilon_{K\times L(e_1,e_2)}}(x,y) = max\{F^{-}_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^{-}_{\Upsilon_{L(e_2)}}(y)\}$$
$$F^{+}_{\Upsilon_{K\times L(e_1,e_2)}}(x,y) = max\{F^{+}_{\Upsilon_{K(e_1)}}(x), F^{+}_{\Upsilon_{L(e_2)}}(y)\}$$

Örnek 4.1.8 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $E_1 = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere (Υ_K, E_1), X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı olsun.

Tablo 4.16: (Υ_K, E_1) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

X	x_1	x_2
e_1	$\langle[0.2,0.4],[0.1,0.3],[0.5,0.6]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.4,0.5]\rangle$
e_2	$\langle[0.3,0.5],[0.4,0.5],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8]\rangle$

$Y = \{y_1, y_2\}$ ve $E_1 = \{e_3, e_4\}$ olmak üzere (Υ_L, E_2), Y üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı olsun.

Tablo 4.17: (Υ_L, E_2) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

Y	y_1	y_2
e_3	$\langle[0.2,0.3],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.6,0.7],[0.2,0.3],[0.3,0.4]\rangle$
e_4	$\langle[0.4,0.5],[0.3,0.4],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.1,0.2],[0.2,0.3]\rangle$

Bu takdirde $X \times Y = \{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2)\}$ ve
$E_1 \times E_2 = \{(e_1,e_3),(e_1,e_4),(e_2,e_3),(e_2,e_4)\}$ şeklinde olup $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\times}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 4.18: $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\times}(\Upsilon_L, E_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi

$X \times Y$	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)	(x_2,y_1)	(x_2,y_2)
(e_1,e_3)	$\langle[0.2,0.3],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.2,0.4],[0.2,0.3],[0.5,0.6]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.4,0.5]\rangle$
(e_1,e_4)	$\langle[0.2,0.4],[0.3,0.4],[0.5,0.6]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.1,0.3],[0.5,0.6]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.4,0.5]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.4,0.5]\rangle$
(e_2,e_3)	$\langle[0.2,0.3],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.3,0.5],[0.4,0.5],[0.3,0.4]\rangle$	$\langle[0.2,0.3],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8]\rangle$
(e_2,e_4)	$\langle[0.3,0.5],[0.4,0.5],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.4,0.5],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.4,0.5],[0.7,0.8]\rangle$

Teorem 4.1.4 (Υ_K, E_1), X üzerinde; (Υ_L, E_2), Y üzerinde tanımlı iki aralık değerli neutrosophic esnek küme olsun. $(\Upsilon_K, E_1)\tilde{\times}(\Upsilon_L, E_2)$ kartezyen çarpımı $X \times Y$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek kümedir.

İspat. Tanım 4.1.13 ile açıktır.

4.2 Aralık Değerli Neutrosophic Esnek Graflar

Bu bölümde aralık değerli neutrosophic esnek kümeleri graf yapısı üzerinde ele alacağız ve yeni bir kavram olarak aralık değerli neutrosophic esnek graf yapısını inceleyeceğiz ve bu yapıya ait bazı cebirsel özellikleri ve elde edilen sonuçları değerlendireceğiz.

Tanım 4.2.1 $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$ dörtlüsü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\tilde{G}$ ye aralık değerli neutrosophic esnek graf denir.

i. $G^* = (V, E)$ bir basit graf

ii. $\emptyset \neq A$ bir parametre kümesi

iii. (K, A), V üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek küme

iv. (M, A), E üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek küme

v. Her $e \in A$ için $H(e) = (K(e), M(e))$ aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $G^* = (V, E)$ basit grafının bir aralık değerli neutrosophic alt grafıdır.

$$
\begin{aligned}
&T^-_{M(e)}(xy) \leq min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\}\\
&T^+_{M(e)}(xy) \leq min\{T^+_{K(e)}(x), T^+_{K(e)}(y)\}\\
&I^-_{M(e)}(xy) \geq max\{I^-_{K(e)}(x), I^-_{K(e)}(y)\}\\
&I^+_{M(e)}(xy) \geq max\{I^+_{K(e)}(x), I^+_{K(e)}(y)\}\\
&F^-_{M(e)}(xy) \geq max\{F^-_{K(e)}(x), F^-_{K(e)}(y)\}\\
&F^+_{M(e)}(xy) \geq max\{F^+_{K(e)}(x), F^+_{K(e)}(y)\}
\end{aligned}
$$

Ayrıca her $e \in A$ ve $x, y \in V$ için $0 \leq T_{M(e)}(x, y) + I_{M(e)}(x, y) + F_{M(e)}(x, y) \leq 3$ eşitsizliği sağlanır. Açıkça bir aralık değerli neutrosophic esnek graf, aralık değerli neutrosophic grafların parametreleştirilmiş bir ailesidir.

Örnek 4.2.1 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi ve $A \subseteq E$ olsun.

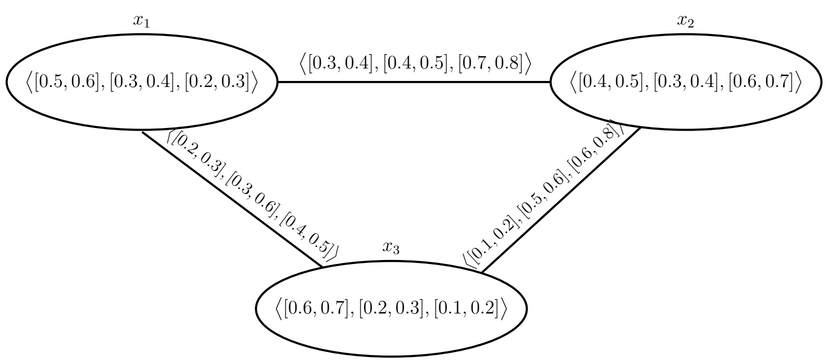
$K : A \to ADN(V)$ olmak üzere (K, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin.

$$K(e_1) = \{\langle x_1, [0.5, 0.6], [0.3, 0.4], [0.2, 0.3]\rangle, \langle x_2, [0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.6, 0.7]\rangle$$
$$\langle x_3, [0.6, 0.7], [0.2, 0.3], [0.1, 0.2]\rangle\} \quad ,$$
$$K(e_2) = \{\langle x_1, [0.3, 0.5], [0.7, 0.8], [0.4, 0.5]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.4, 0.5]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.2, 0.4], [0.3, 0.5], [0.1, 0.2]\rangle\}$$

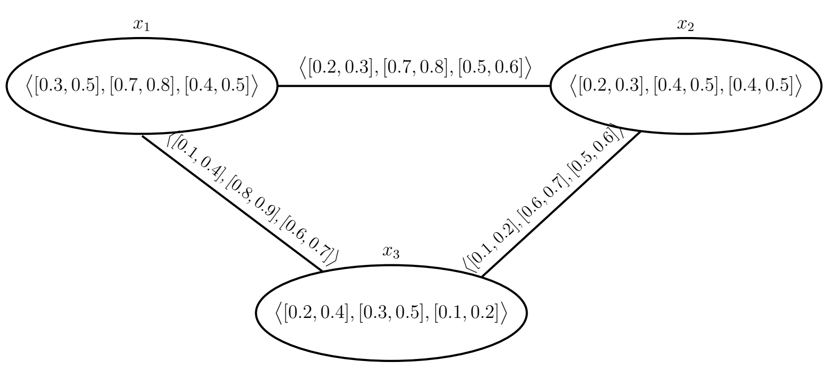
$M : A \to ADN(E)$ olmak üzere (M, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin.

$$M(e_1) = \{\langle x_1x_2, [0.3, 0.4], [0.4, 0.5], [0.7, 0.8]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.6, 0.8]\rangle,$$
$$\langle x_1x_3, [0.2, 0.3], [0.3, 0.6], [0.4, 0.5]\rangle\}$$
$$M(e_2) = \{\langle x_1x_2, [0.2, 0.3], [0.7, 0.8], [0.5, 0.6]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.2], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\rangle,$$
$$\langle x_1x_3, [0.1, 0.4], [0.8, 0.9], [0.6, 0.7]\rangle\}$$

Açıkça $H(e_1) = (K(e_1), M(e_1))$ ve $H(e_2) = (K(e_2), M(e_2))$ sırasıyla e_1 ve e_2 parametrelerine karşılık gelen aralık değerli neutrosophic graflardır.



Şekil 4.1: $H(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.2: $H(e_2)$ aralık değerli neutrosophic esnek grafı

Dolayısıyla $\tilde{G} = \{H(e_1), H(e_2)\}$, G^* üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

Tablo 4.19: $\tilde{G}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafı

K	x_1	x_2	x_3
e_1	$\langle[0.5,0.6],[0.3,0.4],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[0.4,0.5],[0.3,0.4],[0.6,0.7]\rangle$	$\langle[0.6,0.7],[0.2,0.3],[0.1,0.2]\rangle$
e_2	$\langle[0.3,0.5],[0.7,0.8],[0.4,0.5]\rangle$	$\langle[0.2,0.3],[0.4,0.5],[0.4,0.5]\rangle$	$\langle[0.2,0.4],[0.3,0.5],[0.1,0.2]\rangle$
M	x_1x_2	x_2x_3	x_1x_3
e_1	$\langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.6,0.8]\rangle$	$\langle[0.2,0.3],[0.3,0.6],[0.4,0.5]\rangle$
e_2	$\langle[0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.5,0.6]\rangle$	$\langle[0.1,0.2],[0.6,0.7],[0.5,0.6]\rangle$	$\langle[0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.6,0.7]\rangle$

Tanım 4.2.2 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ e, $\tilde{G}_2$ nin aralık değerli neutrosophic esnek alt grafı denir. $\Leftrightarrow$

i. $A \subseteq B$

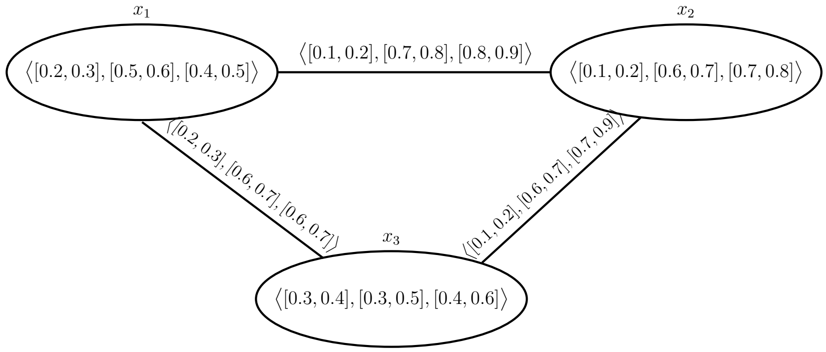
ii. Her $e \in A$ için $H_1(e) = (K_1(e), M_1(e))$ aralık değerli neutrosophic grafı $H_2(e) = (K_2(e), M_2(e))$ aralık değerli neutrosophic grafının alt grafıdır.

Bu durum $\tilde{G}_1 \tilde{\sqsubseteq} \tilde{G}_2$ ile gösterilir.

Örnek 4.2.2 Örnek 4.2.1 deki $\tilde{G}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafını göz önüne alalım. Ayrıca $A^{'} = \{e_1\}$ olmak üzere $\tilde{G}^{'} = (G^*, K^{'}, M^{'}, A^{'})$ grafı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$K^{'}(e_1) = \{\langle x_1, [0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.4, 0.5]\rangle, \langle x_2, [0.1, 0.2], [0.6, 0.7], [0.7, 0.8]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.3, 0.4], [0.3, 0.5], [0.4, 0.6]\rangle\}$$
$$M^{'}(e_1) = \{\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.8, 0.9]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.2], [0.6, 0.7], [0.7, 0.9]\rangle,$$
$$\langle x_1x_3, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.6, 0.7]\rangle\}$$

Açıkça $A' \subseteq A$ ve
$H'(e_1) = (K'(e_1), M'(e_1)) \hat{\sqsubseteq} (K(e_1), M(e_1)) = H(e_1)$ dir. Buradan $\tilde{G}^{'}$, $\tilde{G}$ nin aralık değerli neutrosophic esnek alt grafıdır.



Şekil 4.3: $H^{'}(e_1)$ aralık değerli neutrosophic alt grafı

Tanım 4.2.3 $\tilde{G}_1 = (G_1^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G_2^*, K_2, M_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin kartezyen çarpımı $\tilde{G}_1 \tilde{\otimes} \tilde{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, K, M, A \times B)$ ile gösterilir. Burada $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\}$ olmak üzere $(K, A \times B)$ V üzerinde, $(M, A \times B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \tilde{\otimes} \tilde{G}_2$ nin köşe noktaları ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $(x_1, y_1) \in V_1 \times V_2$ ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için

$$T^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = min\{T^-_{K_1(e_1)}(x_1), T^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$T^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = min\{T^+_{K_1(e_1)}(x_1), T^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$I^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x_1), I^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$I^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x_1), I^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$F^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x_1), F^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$F^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x_1), F^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$

ii. Her $x \in V_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

$$T^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = min\{T^-_{K_1(e_1)}(x), T^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = min\{T^+_{K_1(e_1)}(x), T^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x), I^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{I^+_{K_1(e_1)}(x), I^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x), F^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{F^+_{K_1(e_1)}(x), F^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$

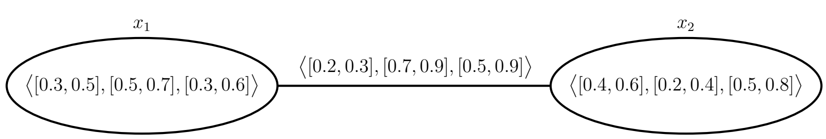
iii. Her $y \in V_2$ ve her $x_1x_2 \in E_1$ için

$$T^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = min\{T^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = min\{T^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{I^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{I^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{F^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{F^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$

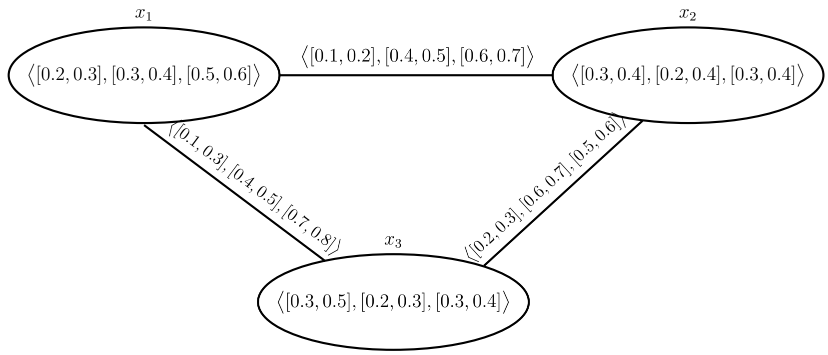
Örnek 4.2.3 $A = \{e_1, e_2\}$ ve $B = \{e_3, e_4\}$ birer parametre kümesi ve $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$, $E_1 = \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3\}$, $E_2 = \{y_1y_2, y_2y_3, y_1y_3\}$ olsun. $\tilde{G}_1 = \{H_1(e_1), H_1(e_2)\}$ ve $\tilde{G}_2 = \{H_2(e_3), H_2(e_4)\}$ sırasıyla $G^*_1 = (V_1, E_1)$ ve $G^*_2 = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı aralık değerli neutrosophic esnek graflar olsun.

$$\begin{aligned} H_1(e_1) =&(K_1(e_1), M_1(e_1)) = \Big((\langle x_1, [0.3, 0.5], [0.5, 0.7], [0.3, 0.6]\rangle, \langle x_2, [0.4, 0.6], [0.2, 0.4], [0.5, 0.8]\rangle),\\ &(\langle x_1x_2, [0.2, 0.3], [0.7, 0.9], [0.5, 0.9]\rangle)\Big)\\ H_1(e_2) =&(K_1(e_2), M_1(e_2)) = \Big((\langle x_1, [0.2, 0.3], [0.3, 0.4], [0.5, 0.6]\rangle, \langle x_2, [0.3, 0.4], [0.2, 0.4], [0.3, 0.4]\rangle,\\ &\langle x_3, [0.3, 0.5], [0.2, 0.3], [0.3, 0.4]\rangle), (\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.4, 0.5], [0.6, 0.7]\rangle,\\ &\langle x_2x_3, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\rangle, \langle x_1x_3, [0.1, 0.3], [0.4, 0.5], [0.7, 0.8]\rangle)\Big) \end{aligned}$$

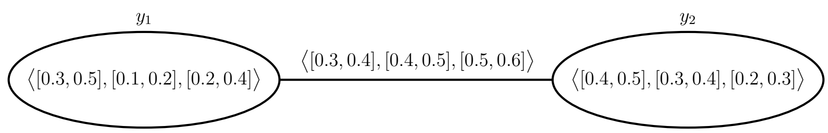
$$\begin{aligned} H_2(e_3) =&(K_2(e_3), M_2(e_3)) = \Big((\langle y_1, [0.3, 0.5], [0.1, 0.2], [0.2, 0.4]\rangle, \langle y_2, [0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.2, 0.3]\rangle),\\ &(\langle y_1y_2, [0.3, 0.4], [0.4, 0.5], [0.5, 0.6]\rangle)\Big)\\ H_2(e_4) =&(K_2(e_4), M_2(e_4)) = \Big((\langle y_1, [0.4, 0.7], [0.3, 0.6], [0.2, 0.4]\rangle, \langle y_2, [0.2, 0.4], [0.5, 0.6], [0.6, 0.7]\rangle,\\ &\langle y_3, [0.3, 0.5], [0.4, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle), (\langle y_1y_2, [0.1, 0.2], [0.5, 0.7], [0.7, 0.8]\rangle,\\ &\langle y_1y_3, [0.2, 0.3], [0.6, 0.9], [0.4, 0.6]\rangle)\Big) \end{aligned}$$



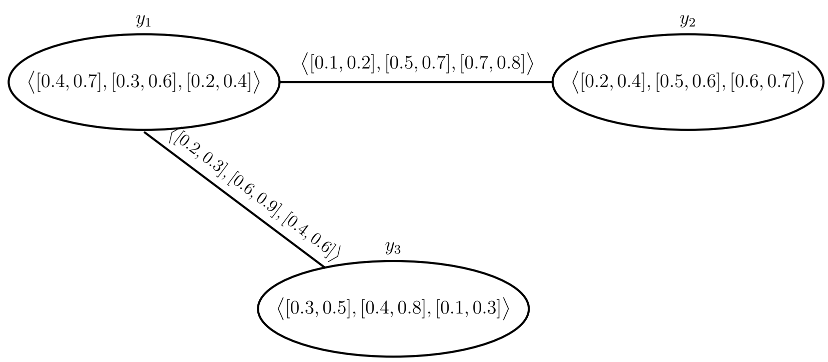
Şekil 4.4: $H_1(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.5: $H_1(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı



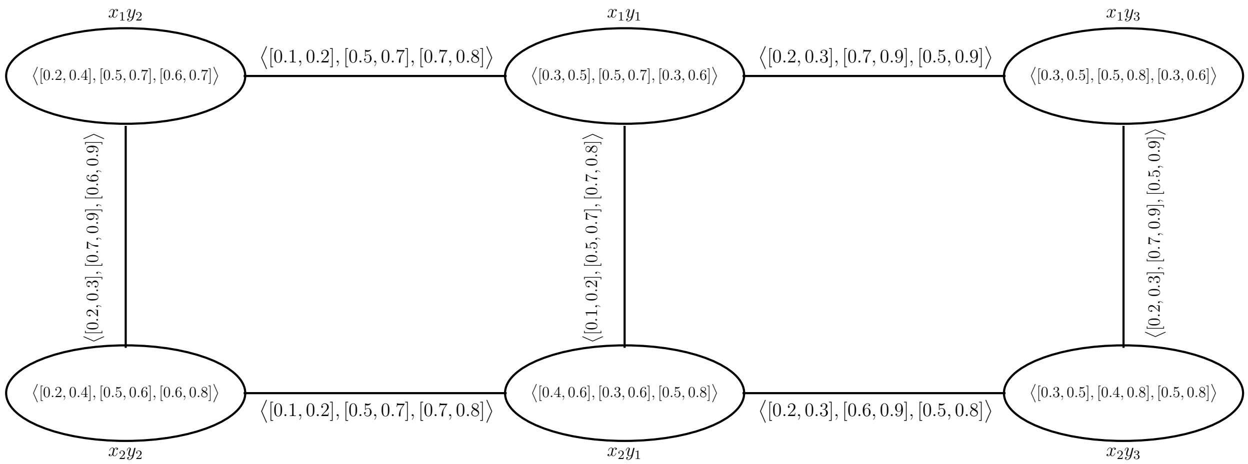
Şekil 4.6: $H_2(e_3)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.7: $H_2(e_4)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Açıkça $A \times B = \{(e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4)\}$ dir.
$H(e_1, e_3) = H_1(e_1)\hat{\otimes}H_2(e_3)$, $H(e_1, e_4) = H_1(e_1)\hat{\otimes}H_2(e_4)$, $H(e_2, e_3) = H_1(e_2)\hat{\otimes}H_2(e_3)$ ve $H(e_2, e_4) = H_1(e_2)\hat{\otimes}H_2(e_4)$ olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin kartezyen çarpımı $\tilde{G}_1\tilde{\otimes}\tilde{G}_2 = \{H(e_1, e_3), H(e_1, e_4), H(e_2, e_3), H(e_2, e_4)\}$ şeklinde elde edilir.

$H(e_1, e_4) = H_1(e_1)\hat{\otimes}H_2(e_4)$ Şekil 4.8 de gösterilmiştir.



Şekil 4.8: $H(e_1,e_4)=H_1(e_1)\hat{\otimes}H_2(e_4)$ aralık değerli neutrosophic grafı

$H(e_1,e_3)$, $H(e_2,e_3)$ ve $H(e_2,e_4)$ aralık değerli neutrosophic grafları da benzer şekilde çizilebilir.

Teorem 4.2.1 $\tilde{G}_1=(G_1^*,K_1,M_1,A)$ ve $\tilde{G}_2=(G_2^*,K_2,M_2,B)$ sırasıyla $G_1^*=(V_1,E_1)$ ve $G_2^*=(V_2,E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $V=V_1\times V_2$ ve $E=\{(xy_1,xy_2)\mid x\in V_1,\ y_1y_2\in E_2\}\cup\{(x_1y,x_2y)\mid y\in V_2, x_1x_2\in E_1\}$ olmak üzere $\tilde{G}_1\tilde{\otimes}\tilde{G}_2$ kartezyen çarpımı da $G_1^*\times G_2^*=(V,E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. $\tilde{G}_1\tilde{\otimes}\tilde{G}_2=(G_1^*\times G_2^*,K,M,A\times B)$ olsun. $\tilde{G}_1\tilde{\otimes}\tilde{G}_2$ kartezyen çarpımının aralık değerli neutrosophic esnek graf olma koşullarını sağladığını gösterelim.

Açıkça $G_1^*\times G_2^*=(V_1\times V_2,E)$ basit graftır. $(K,A\times B)$ nin $V=V_1\times V_2$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek küme olduğu ve $(M,A\times B)$ nin $E=\{(xy_1,xy_2)|x\in V_1,\ y_1y_2\in E_2\}\cup\{(x_1y,x_2y)|y\in V_2,x_1x_2\in E_1\}$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek küme olduğu Tanım 4.2.3 ile açıktır. Şimdi kenarlar ve köşe noktaları arasındaki eşitsizliklerin sağlandığını gösterelim.

i) Her $(e_1,e_2)\in A\times B$ ve $(xy_1,xy_2)\in E$ için

$$T^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2)=min\{T^-_{K_1(e_1)}(x),T^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$\leq min\big\{T^-_{K_1(e_1)}(x),min\{T^-_{K_2(e_2)}(y_1),T^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$$
$$=min\big\{min\{T^-_{K_1(e_1)}(x),T^-_{K_2(e_2)}(y_1)\},min\{T^-_{K_1(e_1)}(x),T^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$$
$$=min\{T^-_{K(e_1,e_2)}(x,y_1),T^-_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}\text{ dir.}$$

Buradan $T^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2)\leq min\{T^-_{K(e_1,e_2)}(x,y_1),T^-_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}$

elde edilir. Benzer şekilde,

$T^{+}_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2) \leq min\{T^{+}_{K(e_1,e_2)}(x,y_1), T^{+}_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}$ olduğu görülür.

$I^{-}_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2) = max\{I^{-}_{K_1(e_1)}(x), I^{-}_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$

$\geq max\big\{I^{-}_{K_1(e_1)}(x), max\{I^{-}_{K_2(e_2)}(y_1), I^{-}_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$

$= max\big\{max\{I^{-}_{K_1(e_1)}(x), I^{-}_{K_2(e_2)}(y_1)\}, max\{I^{-}_{K_1(e_1)}(x), I^{-}_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$

$= max\{I^{-}_{K(e_1,e_2)}(x,y_1), I^{-}_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}$ dir.

Buradan $I^{-}_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2) \geq max\{I^{-}_{K(e_1,e_2)}(x,y_1), I^{-}_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}$

elde edilir. Benzer şekilde,

$I^{+}_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2) \geq max\{I^{+}_{K(e_1,e_2)}(x,y_1), I^{+}_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}$ olduğu görülür.

$F^{-}_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2) = max\{F^{-}_{K_1(e_1)}(x), F^{-}_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$

$\geq max\big\{F^{-}_{K_1(e_1)}(x), max\{F^{-}_{K_2(e_2)}(y_1), F^{-}_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$

$= max\big\{max\{F^{-}_{K_1(e_1)}(x), F^{-}_{K_2(e_2)}(y_1)\}, max\{F^{-}_{K_1(e_1)}(x), F^{-}_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$

$= max\{F^{-}_{K(e_1,e_2)}(x,y_1), F^{-}_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}$ dir.

Buradan $F^{-}_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2) \geq max\{F^{-}_{K(e_1,e_2)}(x,y_1), F^{-}_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}$

elde edilir. Benzer şekilde,

$F^{+}_{M(e_1,e_2)}(xy_1,xy_2) \geq max\{F^{+}_{K(e_1,e_2)}(x,y_1), F^{+}_{K(e_1,e_2)}(x,y_2)\}$ olduğu görülür.

ii) Her $(e_1,e_2) \in A \times B$ ve $(x_1y, x_2y) \in E$ için benzer şekilde

$T^{-}_{M(e_1,e_2)}(x_1y,x_2y) \leq min\{T^{-}_{K(e_1,e_2)}(x_1,y), T^{-}_{K(e_1,e_2)}(x_2,y)\}$

$T^{+}_{M(e_1,e_2)}(x_1y,x_2y) \leq min\{T^{+}_{K(e_1,e_2)}(x_1,y), T^{+}_{K(e_1,e_2)}(x_2,y)\}$

$I^{-}_{M(e_1,e_2)}(x_1y,x_2y) \geq max\{I^{-}_{K(e_1,e_2)}(x_1,y), I^{-}_{K(e_1,e_2)}(x_2,y)\}$

$I^{+}_{M(e_1,e_2)}(x_1y,x_2y) \geq max\{I^{+}_{K(e_1,e_2)}(x_1,y), I^{+}_{K(e_1,e_2)}(x_2,y)\}$

$F^{-}_{M(e_1,e_2)}(x_1y,x_2y) \geq max\{F^{-}_{K(e_1,e_2)}(x_1,y), F^{-}_{K(e_1,e_2)}(x_2,y)\}$

$F^{+}_{M(e_1,e_2)}(x_1y,x_2y) \geq max\{F^{+}_{K(e_1,e_2)}(x_1,y), F^{+}_{K(e_1,e_2)}(x_2,y)\}$

eşitsizliklerinin sağlandığı açıktır.

Dolayısıyla her $(e_1,e_2) \in A \times B$ için $H(e_1,e_2) = \{(K(e_1,e_2), M(e_1,e_2)\}$ alt grafları, $G_1^* \times G_2^* = (V,E)$ basit grafının aralık değerli neutrosophic alt graflarıdır. Sonuç olarak $\tilde{G}_1 \tilde{\otimes} \tilde{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, K, M, A \times B)$ kartezyen çarpımı $G_1^* \times G_2^* = (V,E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

Tanım 4.2.4 $\tilde{G}_1 = (G_1^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G_2^*, K_2, M_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin güçlü çarpımı $\tilde{G}_1 \tilde{\odot} \tilde{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, K, M, A \times B)$ ile gösterilir. Burada $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1,\ y_1y_2 \in E_2,\ x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2\}$ olmak üzere $(K, A \times B)$ V üzerinde, $(M, A \times B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \tilde{\odot} \tilde{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $(x_1, y_1) \in V_1 \times V_2$ ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için

$$T^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = min\{T^-_{K_1(e_1)}(x_1), T^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$T^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = min\{T^+_{K_1(e_1)}(x_1), T^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$I^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x_1), I^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$I^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x_1), I^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$F^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x_1), F^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$F^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x_1), F^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$

ii. Her $x \in V_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

$$T^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = min\{T^-_{K_1(e_1)}(x), T^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = min\{T^+_{K_1(e_1)}(x), T^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x), I^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{I^+_{K_1(e_1)}(x), I^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x), F^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{F^+_{K_1(e_1)}(x), F^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$

iii. Her $y \in V_2$ ve her $x_1y_1 \in E_1$ için

$$T^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = min\{T^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = min\{T^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{I^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{I^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{F^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{F^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$

iv. $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ olmak üzere her $x_1x_2 \in E_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

$$T^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = min\{T^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = min\{T^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{I^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{I^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{F^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{F^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$

Örnek 4.2.4 Örnek 4.2.3 de verilen $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ aralık değerli neutrosophic esnek graflarını göz önüne alalım. Açıkça

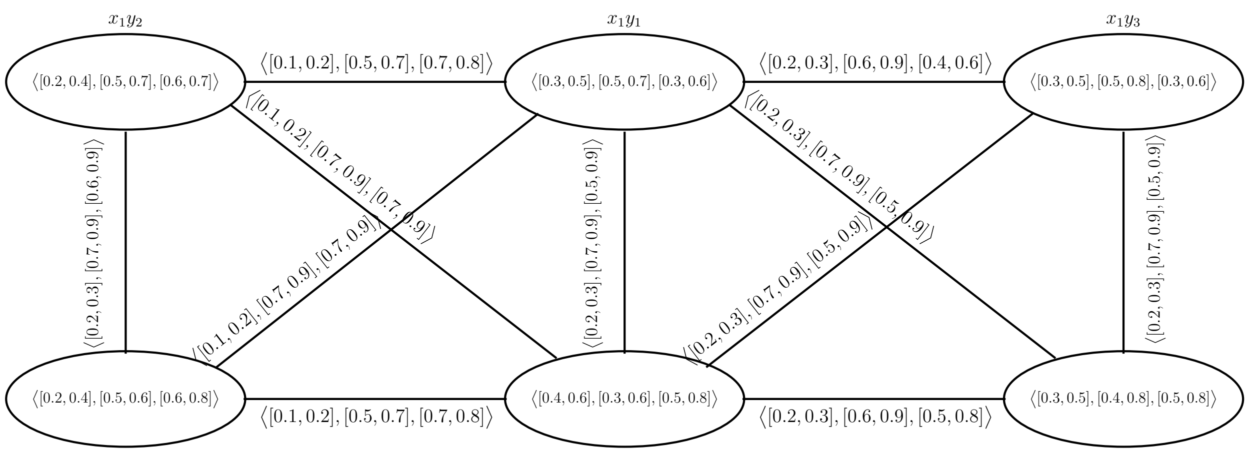
$A \times B = \{(e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4)\}$ dir.

$H(e_1, e_3) = H_1(e_1)\hat{\odot}H_2(e_3) \qquad H(e_1, e_4) = H_1(e_1)\hat{\odot}H_2(e_4)$

$H(e_2, e_3) = H_1(e_2)\hat{\odot}H_2(e_3) \qquad H(e_2, e_4) = H_1(e_2)\hat{\odot}H_2(e_4)$

olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin güçlü çarpımı $\tilde{G}_1\tilde{\odot}\tilde{G}_2 = \{H(e_1, e_3), H(e_1, e_4), H(e_2, e_3), H(e_2, e_4)\}$ şeklinde elde edilir.

$H(e_1, e_4) = H_1(e_1)\hat{\odot}H_2(e_4)$ alt grafı şekil 4.9 da gösterilmiştir.



Şekil 4.9: $H(e_1, e_4) = H_1(e_1)\hat{\odot}H_2(e_4)$ aralık değerli neutrosophic grafı

$H(e_1, e_3)$, $H(e_2, e_3)$ ve $H(e_2, e_4)$ aralık değerli neutrosophic grafları da benzer şekilde çizilebilir.

Teorem 4.2.2 $\tilde{G}_1 = (G_1^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G_2^*, K_2, M_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde birer aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun.

$V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1,\ y_1y_2 \in E_2,\ x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2\}$ olmak üzere $\tilde{G}_1 \tilde{\odot} \tilde{G}_2$ güçlü çarpımı da $G_1^* \times G_2^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. $\tilde{G}_1 \tilde{\odot} \tilde{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, K, M, A \times B)$ olsun. $\tilde{G}_1 \tilde{\odot} \tilde{G}_2$ nin aralık değerli neutrosophic esnek graf olma koşullarını sağladığını gösterelim. Güçlü çarpım, kartezyen çarpımın özel bir hali olduğundan; iki aralık değerli neutrosophic esnek grafın kartezyen çarpımı ile ilgili ispat burada da aynen geçerlidir. ii 'ye ek olarak her $x_1x_2 \in E_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

$T^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = min\{T^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$
$\leq min\big\{min\{T^-_{K_1(e_1)}(x_1), T^-_{K_1(e_1)}(x_2)\}, min\{T^-_{K_2(e_2)}(y_1), T^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$
$= min\big\{min\{T^-_{K_1(e_1)}(x_1), T^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}, min\{T^-_{K_1(e_1)}(x_2), T^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$
$= min\{T^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), T^-_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$ dir.
Burada $T^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) \leq min\{T^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), T^-_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$

elde edilir. Benzer şekilde,
$T^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) \leq min\{T^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), T^-_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$ olduğu gösterilir.

$I^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{I^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$
$\geq max\big\{min\{I^-_{K_1(e_1)}(x_1), I^-_{K_1(e_1)}(x_2)\}, max\{I^-_{K_2(e_2)}(y_1), I^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$
$= max\big\{max\{I^-_{K_1(e_1)}(x_1), I^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}, max\{I^-_{K_1(e_1)}(x_2), I^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$
$= max\{I^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), I^-_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$ dir.
Burada $I^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{I^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), I^-_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$

elde edilir. Benzer şekilde,
$I^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{I^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), I^+_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$ olduğu gösterilir.

$F^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) = max\{F^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$
$\geq max\big\{min\{F^-_{K_1(e_1)}(x_1), F^-_{K_1(e_1)}(x_2)\}, max\{F^-_{K_2(e_2)}(y_1), F^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$
$= max\big\{max\{F^-_{K_1(e_1)}(x_1), F^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}, max\{F^-_{K_1(e_1)}(x_2), F^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}\big\}$
$= max\{F^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), F^-_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$ dir.
Burada $F^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{F^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), F^-_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$

elde edilir. Benzer şekilde,
$F^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y_1, x_2y_2) \geq max\{F^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1), F^+_{K_2(e_1,e_2)}(x_2y_2)\}$ olduğu gösterilir.

Dolayısıyla $\tilde{G}_1 \tilde{\odot} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \times B)$ güçlü çarpımı $G_1^* \times G_2^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

Tanım 4.2.5 $\tilde{G}_1 = (G_1^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G_2^*, K_2, M_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin bileşkesi $\tilde{G}_1 \tilde{\circ} \tilde{G}_2 = (G_1^* \times G_2^*, K, M, A \times B)$ ile gösterilir. Burada $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1, y_1 \neq y_2\}$ olmak üzere $(K, A \times B)$ V üzerinde, $(M, A \times B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \tilde{\circ} \tilde{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $(x_1, y_1) \in V_1 \times V_2$ ve her $(e_1, e_2) \in A \times B$ için

$$T^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = min\{T^-_{K_1(e_1)}(x_1), T^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$T^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = min\{T^+_{K_1(e_1)}(x_1), T^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$I^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x_1), I^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$I^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x_1), I^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$F^-_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x_1), F^-_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$
$$F^+_{K(e_1,e_2)}(x_1, y_1) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x_1), F^+_{K_2(e_2)}(y_1)\}$$

ii. Her $x \in V_1$ ve her $y_1y_2 \in E_2$ için

$$T^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = min\{T^-_{K_1(e_1)}(x), T^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = min\{T^+_{K_1(e_1)}(x), T^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x), I^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{I^+_{K_1(e_1)}(x), I^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x), F^-_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(xy_1, xy_2) = max\{F^+_{K_1(e_1)}(x), F^+_{M_2(e_2)}(y_1y_2)\}$$

iii. Her $y \in V_2$ ve her $x_1x_2 \in E_1$ için

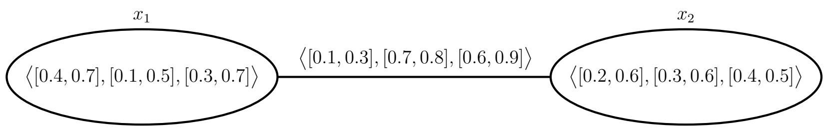
$$T^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = min\{T^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = min\{T^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{I^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{I^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{F^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^-_{K_2(e_2)}(y)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(x_1y, x_2y) = max\{F^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^+_{K_2(e_2)}(y)\}$$

iv. $y_1 \neq y_2$ olmak üzere her $x_1x_2 \in E_1$ için

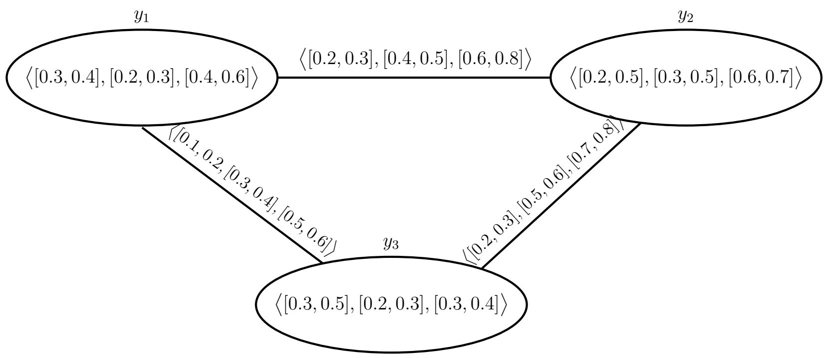
$$T^-_{M(e_1,e_2)}(x_1x_2, y_1y_2) = min\{T^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^-_{K_2(e_2)}(y_1), T^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(x_1x_2, y_1y_2) = min\{T^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), T^+_{K_2(e_2)}(y_1), T^+_{K_2(e_2)}(y_2)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(x_1x_2, y_1y_2) = max\{I^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^-_{K_2(e_2)}(y_1), I^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(x_1x_2, y_1y_2) = max\{I^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), I^+_{K_2(e_2)}(y_1), I^+_{K_2(e_2)}(y_2)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(x_1x_2, y_1y_2) = max\{F^-_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^-_{K_2(e_2)}(y_1), F^-_{K_2(e_2)}(y_2)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(x_1x_2, y_1y_2) = max\{F^+_{M_1(e_1)}(x_1x_2), F^+_{K_2(e_2)}(y_1), F^+_{K_2(e_2)}(y_2)\}$$

Örnek 4.2.5 $A = \{e_1\}$ ve $B = \{e_2, e_3\}$ birer parametre kümesi ve $V_1 = \{x_1, x_2\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$, $E_1 = \{x_1x_2\}$, $E_2 = \{y_1y_2, y_2y_3, y_1y_3\}$ olsun. $\tilde{G}_1 = \{H_1(e_1)\}$ ve $\tilde{G}_2 = \{H_2(e_2), H_2(e_3)\}$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı aralık değerli neutrosophic esnek graflar olsun.

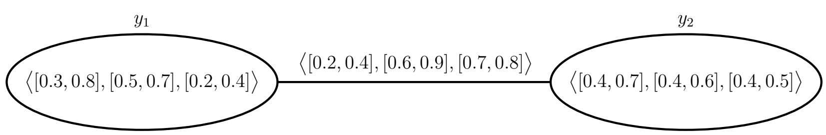
$$\begin{aligned} H_1(e_1) =&(K_1(e_1), M_1(e_1)) = \big((\langle x_1, [0.4, 0.7], [0.1, 0.5], [0.3, 0.7]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.6], [0.3, 0.6], [0.4, 0.5]\rangle),\\ &(\langle x_1x_2, [0.1, 0.3], [0.7, 0.8], [0.6, 0.9]\rangle)\big)\\ H_2(e_2) =&(K_2(e_2), M_2(e_2)) = \big((\langle y_1, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.4, 0.6]\rangle, \langle y_2, [0.2, 0.5], [0.3, 0.5], [0.6, 0.7]\rangle,\\ &\langle y_3, [0.4, 0.5], [0.1, 0.2], [0.2, 0.5]\rangle), (\langle y_1y_2, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.6, 0.8]\rangle,\\ &\langle y_2y_3, [0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.7, 0.8]\rangle, \langle y_3y_1, [0.1, 0.2], [0.3, 0.4], [0.5, 0.6]\rangle)\big)\\ H_2(e_3) =&(K_2(e_3), M_2(e_3)) = \big((\langle y_1, [0.3, 0.8], [0.5, 0.7], [0.2, 0.4]\rangle, \langle y_2, [0.4, 0.7], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5]\rangle),\\ &(\langle y_1y_2, [0.2, 0.4], [0.6, 0.9], [0.7, 0.8]\rangle)\big) \end{aligned}$$



Şekil 4.10: $H_1(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı

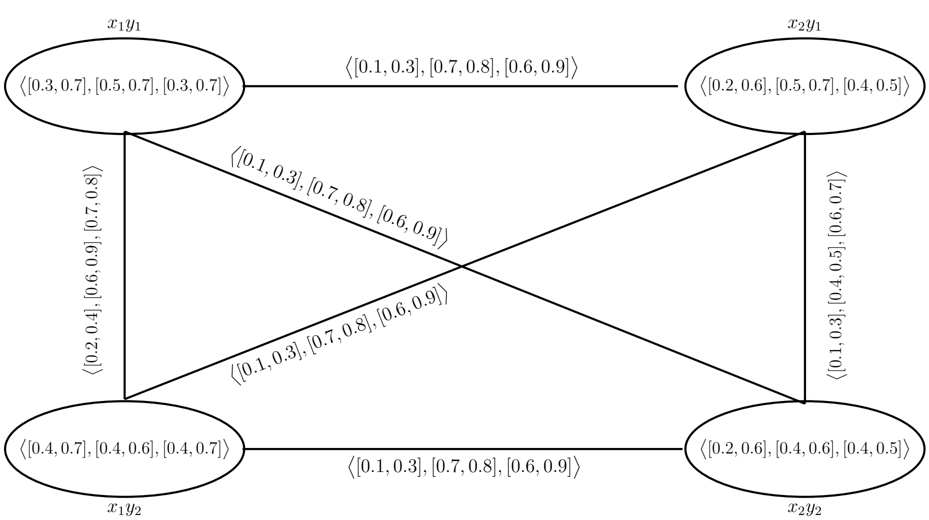


Şekil 4.11: $H_2(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.12: $H_2(e_3)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Açıkça $A \times B = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3)\}$ dir ve $H(e_1, e_2) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_2)$, $H(e_1, e_3) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_3)$ olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin bileşkesi $\tilde{G}_1\tilde{\circ}\tilde{G}_2 = \{H(e_1, e_2), H(e_1, e_3)\}$ şeklinde elde edilir. $H(e_1, e_3) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_3)$ şekil 4.13 de gösterilmiştir.



Şekil 4.13: $H(e_1, e_3) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_3)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Benzer şekilde $H(e_1, e_2) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı da çizilebilir.

Örnek 4.2.6 Örnek 4.2.3 de verilen $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ aralık değerli neutrosophic esnek graflarını göz önüne alalım.

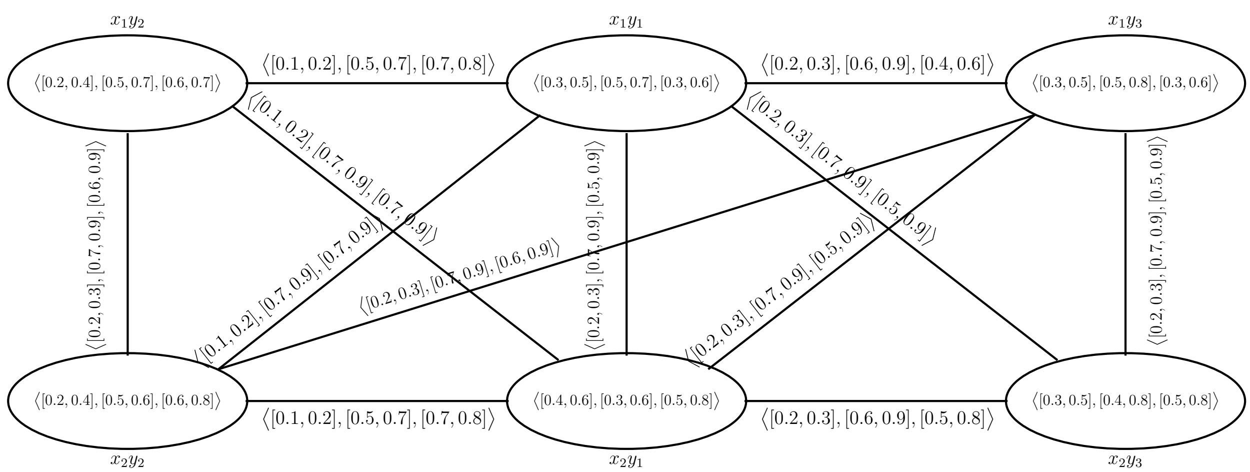
Açıkça $A \times B = \{(e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4)\}$ dir.

$H(e_1, e_3) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_3) \qquad H(e_1, e_4) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_4)$

$H(e_2, e_3) = H_1(e_2)\hat{\circ}H_2(e_3) \qquad H(e_2, e_4) = H_1(e_2)\hat{\circ}H_2(e_4)$

olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin bileşkesi $\tilde{G}_1\tilde{\circ}\tilde{G}_2 = \{H(e_1, e_3), H(e_1, e_4), H(e_2, e_3), H(e_2, e_4)\}$ şeklinde elde edilir.

$H(e_1, e_4) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_4)$ alt grafı şekil 4.14 de gösterilmiştir. Diğerleri de benzer şekilde çizilebilir.



Şekil 4.14: $H(e_1, e_4) = H_1(e_1)\hat{\circ}H_2(e_4)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 4.2.3 $\tilde{G}_1 = (G_1^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G_2^*, K_2, M_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit grafları üzerinde birer aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $V = V_1 \times V_2$ ve $E = \{(xy_1, xy_2) \mid x \in V_1,\ y_1y_2 \in E_2\} \cup \{(x_1y, x_2y) \mid y \in V_2, x_1x_2 \in E_1\} \cup \{(x_1y_1, x_2y_2) \mid x_1x_2 \in E_1, y_1 \neq y_2\}$ olmak üzere $\tilde{G}_1\tilde{\circ}\tilde{G}_2$ bileşkesi de $G_1^* \times G_2^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. Teorem 4.2.2 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 4.2.6 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin genişletilmiş birleşimi $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcup} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \cup B)$ şeklinde gösterilir. Burada $(K, A \cup B)$ V üzerinde,

$(M, A \cup B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcup} \tilde{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $e \in A \cup B$ ve her $x \in V$ için

$$T^-_{K(e)}(x) = \begin{cases} T^-_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ T^-_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ max\{T^-_{K_1(e)}(x), T^-_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$T^+_{K(e)}(x) = \begin{cases} T^+_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ T^+_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ max\{T^+_{K_1(e)}(x), T^+_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$I^-_{K(e)}(x) = \begin{cases} I^-_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ I^-_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ min\{I^-_{K_1(e)}(x), I^-_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$I^+_{K(e)}(x) = \begin{cases} I^+_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ I^+_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ min\{I^+_{K_1(e)}(x), I^+_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$F^-_{K(e)}(x) = \begin{cases} F^-_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ F^-_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ min\{F^-_{K_1(e)}(x), F^-_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$F^+_{K(e)}(x) = \begin{cases} F^+_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ F^+_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ min\{F^+_{K_1(e)}(x), F^+_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

ii. Her $e \in A \cup B$ ve her $xy \in E$ için

$$T^-_{M(e)}(xy) = \begin{cases} T^-_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ T^-_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ max\{T^-_{M_1(e)}(xy), T^-_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$T^+_{M(e)}(xy) = \begin{cases} T^+_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ T^+_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ max\{T^+_{M_1(e)}(xy), T^+_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$I^-_{M(e)}(xy) = \begin{cases} I^-_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ I^-_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ min\{I^-_{M_1(e)}(xy), I^-_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$I^{+}_{M(e)}(xy) = \begin{cases} I^{+}_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ I^{+}_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ min\{I^{+}_{M_1(e)}(xy), I^{+}_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$F^{-}_{M(e)}(xy) = \begin{cases} F^{-}_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ F^{-}_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ min\{F^{-}_{M_1(e)}(xy), F^{-}_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

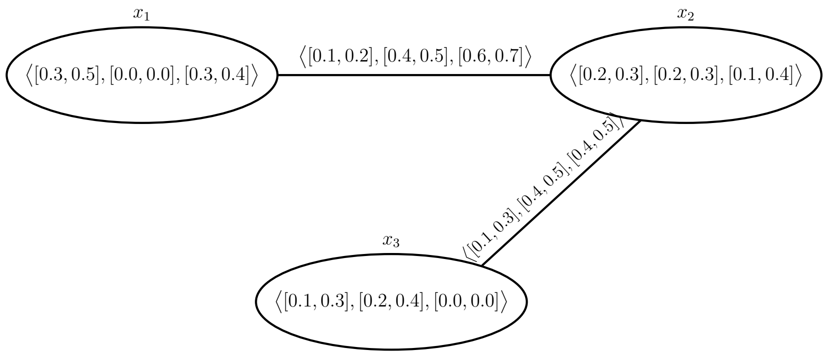
$$F^{+}_{M(e)}(xy) = \begin{cases} F^{+}_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ F^{+}_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ min\{F^{+}_{M_1(e)}(xy), F^{+}_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

Örnek 4.2.7 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ ve $B = \{e_2, e_3\}$ birer parametre kümeleri olsun. $\tilde{G_1} = \{H_1(e_1), H_1(e_2)\}$ ve $\tilde{G_2} = \{H_2(e_2), H_2(e_3)\}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafları aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{aligned} H_1(e_1) = \Big((&\langle x_1, [0.3, 0.5], [0.0, 0.0], [0.3, 0.4]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.3], [0.2, 0.3], [0.1, 0.4]\rangle, \\ &\langle x_3, [0.1, 0.3], [0.2, 0.4], [0.0, 0.0]\rangle), (\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.4, 0.5], [0.6, 0.7]\rangle \\ &\langle x_1x_3, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.3], [0.4, 0.5], [0.4, 0.5]\rangle)\Big) \\ H_1(e_2) = \Big((&\langle x_1, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.5, 0.6]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.3], [0.1, 0.2], [0.4, 0.5]\rangle, \\ &\langle x_3, [0.4, 0.6], [0.3, 0.5], [0.1, 0.3]\rangle, \langle x_4, [0.5, 0.7], [0.4, 0.6], [0.2, 0.4]\rangle), \\ &(\langle x_1x_2, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.3], [0.4, 0.6], [0.5, 0.7]\rangle \\ &\langle x_3x_4, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_1x_4, [0.2, 0.3], [0.5, 0.7], [0.7, 0.8]\rangle \\ &\langle x_1x_3, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_2x_4, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle)\Big) \end{aligned}$$

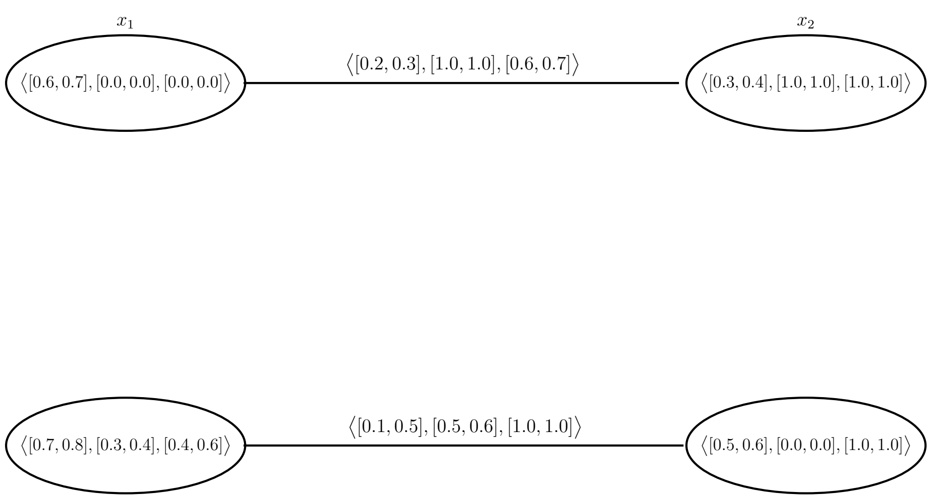
$$\begin{aligned} H_2(e_2) = \Big((&\langle x_1, [0.6, 0.7], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle, \langle x_2, [0.3, 0.4], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle, \\ &\langle x_3, [0.5, 0.6], [0.0, 0.0], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_4, [0.7, 0.8], [0.3, 0.4], [0.4, 0.6]\rangle), \\ &(\langle x_1x_2, [0.2, 0.3], [1.0, 1.0], [0.6, 0.7]\rangle, \langle x_2x_3, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle \\ &\langle x_3x_4, [0.1, 0.5], [0.5, 0.6], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_1x_4, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle \\ &\langle x_1x_3, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle, \langle x_2x_4, [0.0, 0.0], [1.0, 1.0], [1.0, 1.0]\rangle)\Big) \\ H_2(e_3) = \Big((&\langle x_1, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\rangle, \langle x_2, [0.1, 0.3], [0.2, 0.5], [0.3, 0.4]\rangle, \\ &\langle x_3, [0.1, 0.2], [0.2, 0.5], [0.3, 0.4]\rangle), (\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.4, 0.5], [0.4, 0.5]\rangle \\ &\langle x_2x_3, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.5, 0.6]\rangle)\Big) \end{aligned}$$

Bu durumda H_1 ve H_2 alt grafları her bir parametre için aşağıdaki gibi karşımıza çıkar.

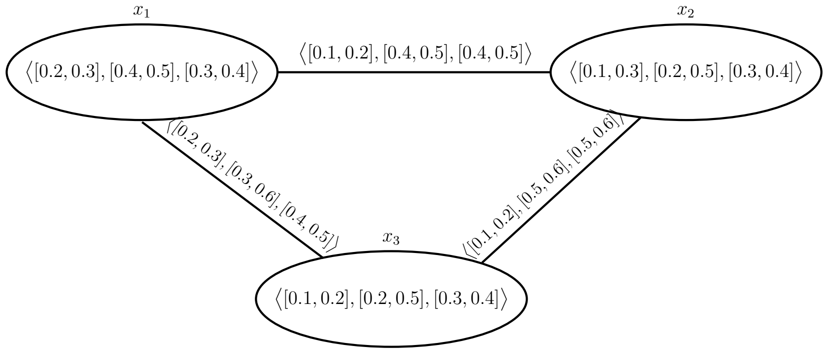


Şekil 4.15: $H_1(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Şekil 4.16: $H_1(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

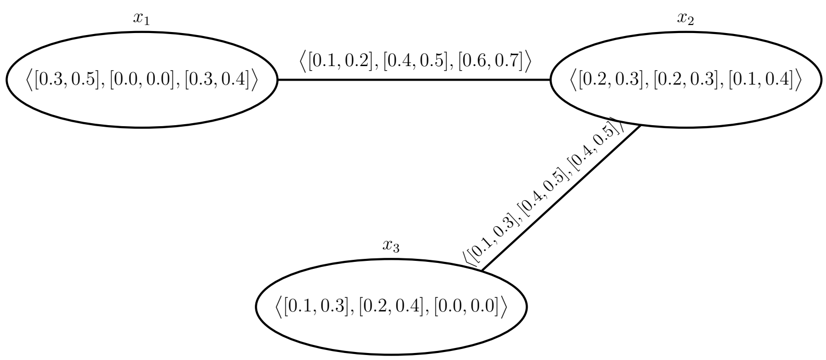


Şekil 4.17: $H_2(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

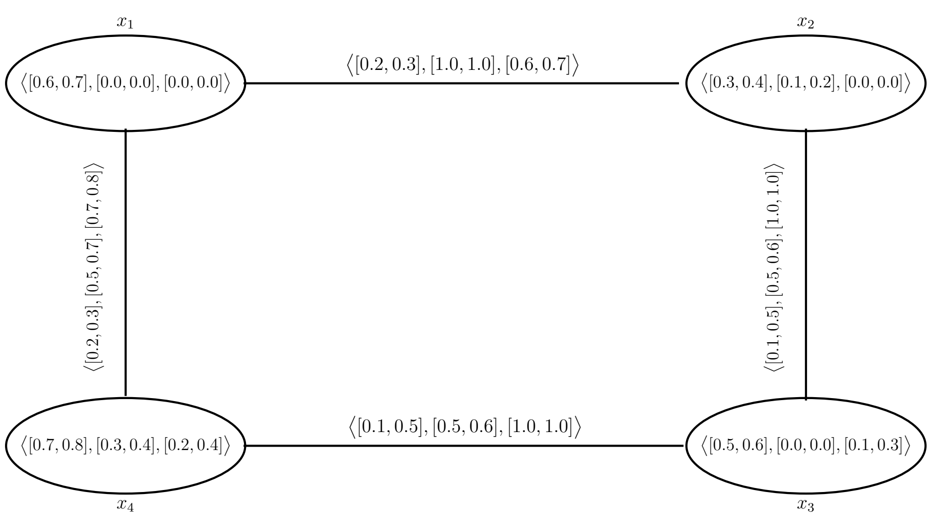


Şekil 4.18: $H_2(e_3)$ aralık değerli neutrosophic grafı

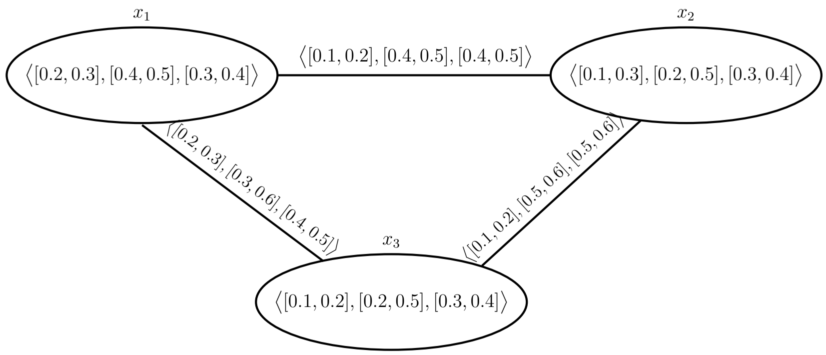
Açıkça $A \cup B = \{e_1, e_2, e_3\}$ dir ve $H(e_1) = H_1(e_1)$, $H(e_2) = H_1(e_2)\hat{\bigcup}H_2(e_2)$, $H(e_3) = H_2(e_3)$ olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ genişletilmiş birleşimi $\tilde{G}_1\tilde{\bigcup}\tilde{G}_2 = \{H(e_1), H(e_2), H(e_3)\}$ şeklinde elde edilir. $H(e_1)$, $H(e_2)$ ve $H(e_3)$ alt grafları sırasıyla şekil 4.19, 4.20 ve 4.21 de gösterilmiştir.



Şekil 4.19: $H(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.20: $H(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.21: $H(e_3)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 4.2.4 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcup} \tilde{G}_2$ de $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcup} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \cup B)$ olsun. $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcup} \tilde{G}_2$ nin aralık değerli neutrosophic olma koşullarını sağladığını gösterelim. Açıkça $(K, A \cup B)$ nin V üzerinde, $(M, A \cup B)$ nin E üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek küme olduğu Tanım 4.2.6 ile açıktır. Şimdi kenar ve köşe noktaları arasındaki eşitsizliklerin sağlandığını gösterelim. $e \in A \cup B$ ve $xy \in E$ olmak üzere,

1. Durum: $e \in A \backslash B$ ve $xy \in E$ olsun.

$$\begin{aligned} T^-_{M(e)}(xy) = T^-_{M_1(e)}(xy) &\leq min\{T^-_{K_1(e)}(x), T^-_{K_1(e)}(y)\} \\ &= min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $T^-_{M(e)}(xy) \leq min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$T^+_{M(e)}(xy) \leq min\{T^+_{K(e)}(x), T^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} I^-_{M(e)}(xy) = I^-_{M_1(e)}(xy) &\geq max\{I^-_{K_1(e)}(x), I^-_{K_1(e)}(y)\} \\ &= max\{I^-_{K(e)}(x), I^-_{K(e)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $I^-_{M(e)}(xy) \geq max\{I^-_{K(e)}(x), I^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$I^+_{M(e)}(xy) \geq max\{I^+_{K(e)}(x), I^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} F^-_{M(e)}(xy) = F^-_{M_1(e)}(xy) &\geq max\{F^-_{K_1(e)}(x), F^-_{K_1(e)}(y)\} \\ &= max\{F^-_{K(e)}(x), F^-_{K(e)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $F^-_{M(e)}(xy) \geq max\{F^-_{K(e)}(x), F^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$F^+_{M(e)}(xy) \geq max\{F^+_{K(e)}(x), F^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

2. Durum: $e \in B \backslash A$ ve $xy \in E$ olsun.

$$\begin{aligned} T^-_{M(e)}(xy) = T^-_{M_2(e)}(xy) &\leq min\{T^-_{K_2(e)}(x), T^-_{K_2(e)}(y)\} \\ &= min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $T^-_{M(e)}(xy) \leq min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$T^+_{M(e)}(xy) \leq min\{T^+_{K(e)}(x), T^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} I^-_{M(e)}(xy) = I^-_{M_2(e)}(xy) &\geq max\{I^-_{K_2(e)}(x), I^-_{K_2(e)}(y)\} \\ &= max\{I^-_{K(e)}(x), I^-_{K(e)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $I^-_{M(e)}(xy) \geq max\{I^-_{K(e)}(x), I^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$I^+_{M(e)}(xy) \geq max\{I^+_{K(e)}(x), I^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} F^-_{M(e)}(xy) = F^-_{M_2(e)}(xy) &\geq max\{F^-_{K_2(e)}(x), F^-_{K_2(e)}(y)\} \\ &= max\{F^-_{K(e)}(x), F^-_{K(e)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $F^-_{M(e)}(xy) \geq max\{F^-_{K(e)}(x), F^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$F^+_{M(e)}(xy) \geq max\{F^+_{K(e)}(x), F^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

3. Durum: $e \in A \cap B$ ve $xy \in E$ olsun.

$$\begin{aligned} T^-_{M(e)}(xy) &= max\{T^-_{M_1(e)}(xy), T^-_{M_2(e)}(xy)\} \\ &\leq max\big\{min\{T^-_{K_1(e)}(x), T^-_{K_1(e)}(y)\}, min\{T^-_{K_2(e)}(x), T^-_{K_2(e)}(y)\}\big\} \\ &\leq min\big\{max\{T^-_{K_1(e)}(x), T^-_{K_2(e)}(x)\}, max\{T^-_{K_1(e)}(y), T^-_{K_2(e)}(y)\}\big\} \end{aligned}$$

Buradan $T^-_{M(e)}(xy) \leq min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$T^+_{M(e)}(xy) \leq min\{T^+_{K(e)}(x), T^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} I^-_{M(e)}(xy) &= min\{I^-_{M_1(e)}(xy), I^-_{M_2(e)}(xy)\} \\ &\geq min\big\{max\{I^-_{K_1(e)}(x), I^-_{K_1(e)}(y)\}, max\{I^-_{K_2(e)}(x), I^-_{K_2(e)}(y)\}\big\} \\ &\geq max\big\{min\{I^-_{K_1(e)}(x), I^-_{K_2(e)}(x)\}, min\{I^-_{K_1(e)}(y), I^-_{K_2(e)}(y)\}\big\} \end{aligned}$$

Buradan $I^-_{M(e)}(xy) \geq max\{I^-_{K(e)}(x), I^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$I^+_{M(e)}(xy) \geq max\{I^+_{K(e)}(x), I^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$
\begin{aligned}
F^-_{M(e)}(xy) &= min\{F^-_{M_1(e)}(xy), F^-_{M_2(e)}(xy)\} \\
&\geq min\big\{max\{F^-_{K_1(e)}(x), F^-_{K_1(e)}(y)\}, max\{F^-_{K_2(e)}(x), F^-_{K_2(e)}(y)\}\big\} \\
&\geq max\big\{min\{F^-_{K_1(e)}(x), F^-_{K_2(e)}(x)\}, min\{F^-_{K_1(e)}(y), F^-_{K_2(e)}(y)\}\big\}
\end{aligned}
$$

Buradan $F^-_{M(e)}(xy) \geq max\{F^-_{K(e)}(x), F^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$F^+_{M(e)}(xy) \geq max\{F^+_{K(e)}(x), F^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcup} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \cup B)$ genişletilmiş birleşimi $G^* = (V, E)$ üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

Tanım 4.2.7 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin daraltılmış birleşimi $\tilde{G}_1 \tilde{\bigsqcup} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \cap B)$ şeklinde gösterilir. Burada $(K, A \cap B)$ V üzerinde, $(M, A \cap B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \tilde{\bigsqcup} \tilde{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $e \in A \cap B$ ve $x \in V$ için

$$
\begin{aligned}
T^-_{K(e)}(x) &= max\{T^-_{K_1(e)}(x), T^-_{K_2(e)}(x)\} \\
T^+_{K(e)}(x) &= max\{T^+_{K_1(e)}(x), T^+_{K_2(e)}(x)\} \\
I^-_{K(e)}(x) &= min\{I^-_{K_1(e)}(x), I^-_{K_2(e)}(x)\} \\
I^+_{K(e)}(x) &= min\{I^+_{K_1(e)}(x), I^+_{K_2(e)}(x)\} \\
F^-_{K(e)}(x) &= min\{F^-_{K_1(e)}(x), F^-_{K_2(e)}(x)\} \\
F^+_{K(e)}(x) &= min\{F^+_{K_1(e)}(x), F^+_{K_2(e)}(x)\}
\end{aligned}
$$

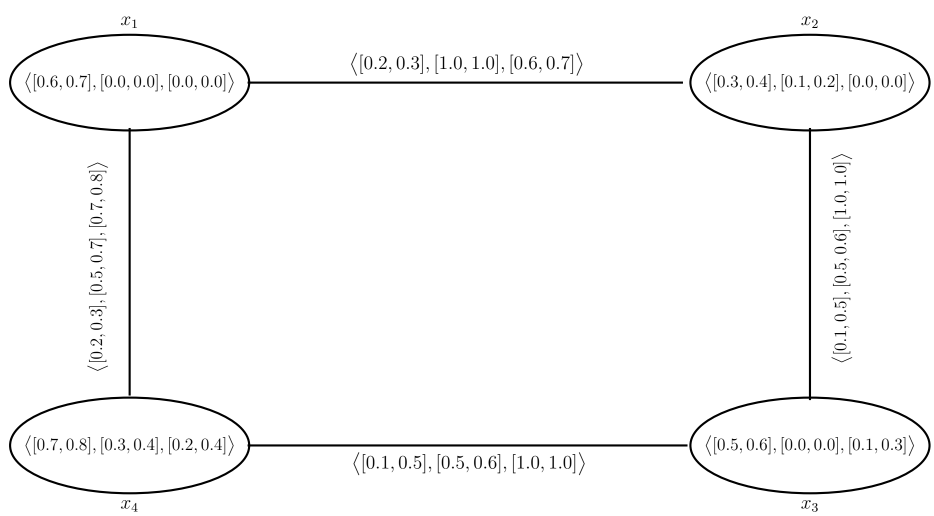
ii. Her $e \in A \cap B$ ve $xy \in E$ için

$$T^-_{M(e)}(xy) = max\{T^-_{M_1(e)}(xy), T^-_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$T^+_{M(e)}(xy) = max\{T^+_{M_1(e)}(xy), T^+_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$I^-_{M(e)}(xy) = min\{I^-_{M_1(e)}(xy), I^-_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$I^+_{M(e)}(xy) = min\{I^+_{M_1(e)}(xy), I^+_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$F^-_{M(e)}(xy) = min\{F^-_{M_1(e)}(xy), F^-_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$F^+_{M(e)}(xy) = min\{F^+_{M_1(e)}(xy), F^+_{M_2(e)}(xy)\}$$

Teorem 4.2.5 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $\tilde{G}_1 \tilde{\bigsqcup} \tilde{G}_2$ de $G^=(V, E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. Teorem 4.2.4 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek 4.2.8 Örnek 4.2.7 'yi göz önüne alalım. Açıkça $A \cap B = \{e_2\}$ dir ve $H(e_2) = H_1(e_2) \hat{\cup} H_2(e_2)$ olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin daraltılmış birleşimi $\tilde{G}_1 \tilde{\bigsqcup} \tilde{G}_2 = \{H(e_2)\}$ şeklinde elde edilir. $H(e_2)$ alt grafı şekil 4.22 de gösterilmiştir.



Şekil 4.22: $H(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Tanım 4.2.8 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin genişletilmiş arakesiti $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcap} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \cup B)$ şeklinde gösterilir. Burada $(K, A \cup B)$ V üzerinde,

$(M, A \cup B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcap} \tilde{G}_2$ nin köşe noktalarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $e \in A \cup B$ ve $x \in V$için

$$T^-_{K(e)}(x) = \begin{cases} T^-_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ T^-_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ min\{T^-_{K_1(e)}(x), T^-_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$T^+_{K(e)}(x) = \begin{cases} T^+_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ T^+_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ min\{T^+_{K_1(e)}(x), T^+_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$I^-_{K(e)}(x) = \begin{cases} I^-_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ I^-_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ max\{I^-_{K_1(e)}(x), I^-_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$I^+_{K(e)}(x) = \begin{cases} I^+_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ I^+_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ max\{I^+_{K_1(e)}(x), I^+_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$F^-_{K(e)}(x) = \begin{cases} F^-_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ F^-_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ max\{F^-_{K_1(e)}(x), F^-_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$F^+_{K(e)}(x) = \begin{cases} F^+_{K_1(e)}(x) & e \in A \backslash B \\ F^+_{K_2(e)}(x) & e \in B \backslash A \\ max\{F^+_{K_1(e)}(x), F^+_{K_2(e)}(x)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

ii. her $e \in A \cup B$ ve $xy \in E$için

$$T^-_{M(e)}(xy) = \begin{cases} T^-_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ T^-_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ min\{T^-_{M_1(e)}(xy), T^-_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$T^+_{M(e)}(xy) = \begin{cases} T^+_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ T^+_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ min\{T^+_{M_1(e)}(xy), T^+_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

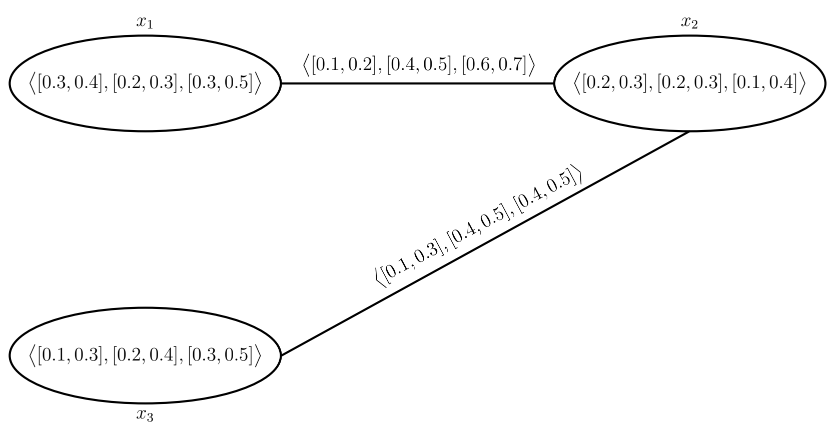
$$I^-_{M(e)}(xy) = \begin{cases} I^-_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ I^-_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ max\{I^-_{M_1(e)}(xy), I^-_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$I^{+}_{M(e)}(xy) = \begin{cases} I^{+}_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ I^{+}_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ max\{I^{+}_{M_1(e)}(xy), I^{+}_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

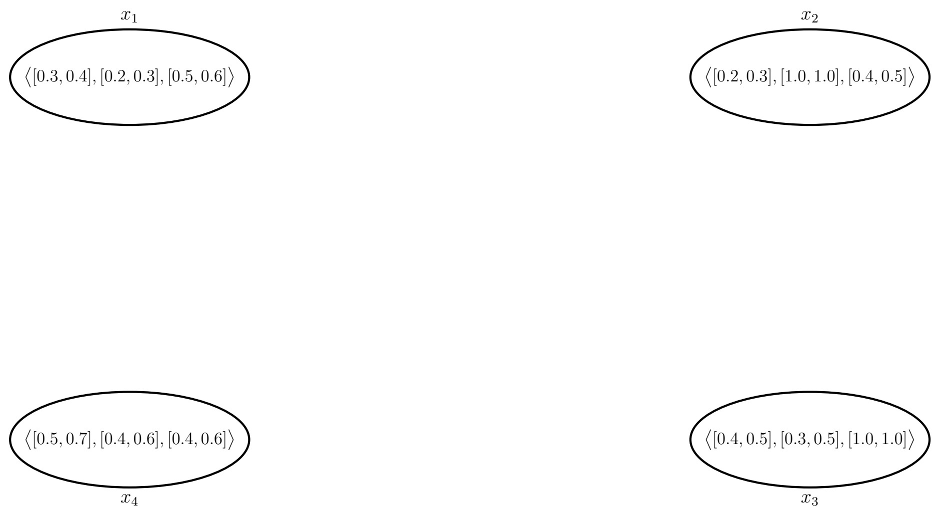
$$F^{-}_{M(e)}(xy) = \begin{cases} F^{-}_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ F^{-}_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ max\{F^{-}_{M_1(e)}(xy), F^{-}_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

$$F^{+}_{M(e)}(xy) = \begin{cases} F^{+}_{M_1(e)}(xy) & e \in A \backslash B \\ F^{+}_{M_2(e)}(xy) & e \in B \backslash A \\ max\{F^{+}_{M_1(e)}(xy), F^{+}_{M_2(e)}(xy)\} & e \in A \cap B \end{cases}$$

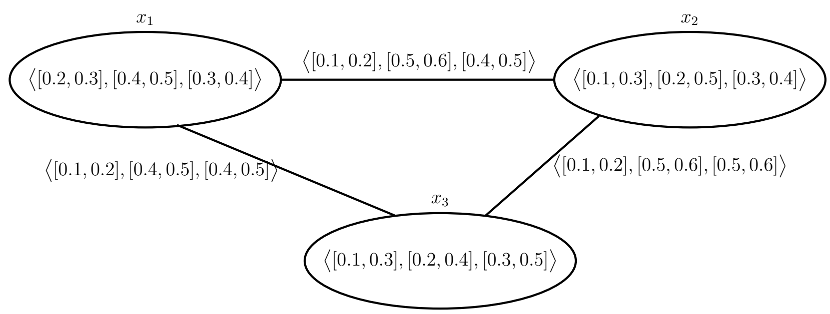
Örnek 4.2.9 Örnek 4.2.7 de verilen $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_1$ aralık değerli neutrosophic esnek graflarını göz önüne alalım. Açıkça $A \cup B = \{e_1, e_2, e_3\}$ dir ve $H(e_1) = H_1(e_1)$, $H(e_2) = H_1(e_2) \hat{\bigcap} H_2(e_2)$, $H(e_3) = H_2(e_3)$ olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin genişletilmiş arakesiti $\tilde{G}_1 \tilde{\bigsqcap} \tilde{G}_2 = \{H(e_1), H(e_2), H(e_3)\}$ şeklinde elde edilir. $H(e_1)$, $H(e_2)$ ve $H(e_3)$ alt grafları şekil 4.23, 4.24 ve 4.25 de gösterilmiştir.



Şekil 4.23: $H(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.24: $H(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.25: $H(e_3)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 4.2.6 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcap} \tilde{G}_2$ de $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcap} \tilde{G}_2$ nin aralık değerli neutrosophic olma koşullarını sağladığını gösterelim. Açıkça $(K, A \cup B)$ nin V üzerinde $(M, A \cup B)$ nin E üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek küme olduğu Tanım 4.2.8 ile açıktır. Şimdi kenar ve köşe noktaları arasındaki eşitsizliklerin sağlandığını gösterelim. $e \in A \cup B$ ve $xy \in E$ olmak üzere,

1. Durum: $e \in A \backslash B$ ve $xy \in E$ olsun.

$$\begin{aligned} T^-_{M(e)}(xy) = T^-_{M_1(e)}(xy) &\leq min\{T^-_{K_1(e)}(x), T^-_{K_1(e)}(y)\} \\ &= min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $T^-_{M(e)}(xy) \leq min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$T^+_{M(e)}(xy) \leq min\{T^+_{K(e)}(x), T^+_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$I^{-}_{M(e)}(xy) = I^{-}_{M_1(e)}(xy) \geq max\{I^{-}_{K_1(e)}(x), I^{-}_{K_1(e)}(y)\}$$
$$= max\{I^{-}_{K(e)}(x), I^{-}_{K(e)}(y)\}$$

Buradan $I^{-}_{M(e)}(xy) \geq max\{I^{-}_{K(e)}(x), I^{-}_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$I^{+}_{M(e)}(xy) \geq max\{I^{+}_{K(e)}(x), I^{+}_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$F^{-}_{M(e)}(xy) = F^{-}_{M_1(e)}(xy) \geq max\{F^{-}_{K_1(e)}(x), F^{-}_{K_1(e)}(y)\}$$
$$= max\{F^{-}_{K(e)}(x), F^{-}_{K(e)}(y)\}$$

Buradan $F^{-}_{M(e)}(xy) \geq max\{F^{-}_{K(e)}(x), F^{-}_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$F^{+}_{M(e)}(xy) \geq max\{F^{+}_{K(e)}(x), F^{+}_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

2. Durum: $e \in B \backslash A$ ve $xy \in E$ olsun.

$$T^{-}_{M(e)}(xy) = T^{-}_{M_2(e)}(xy) \leq min\{T^{-}_{K_2(e)}(x), T^{-}_{K_2(e)}(y)\}$$
$$= min\{T^{-}_{K(e)}(x), T^{-}_{K(e)}(y)\}$$

Buradan $T^{-}_{M(e)}(xy) \leq min\{T^{-}_{K(e)}(x), T^{-}_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$T^{+}_{M(e)}(xy) \leq min\{T^{+}_{K(e)}(x), T^{+}_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$I^{-}_{M(e)}(xy) = I^{-}_{M_2(e)}(xy) \geq max\{I^{-}_{K_2(e)}(x), I^{-}_{K_2(e)}(y)\}$$
$$= max\{I^{-}_{K(e)}(x), I^{-}_{K(e)}(y)\}$$

Buradan $I^{-}_{M(e)}(xy) \geq max\{I^{-}_{K(e)}(x), I^{-}_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$I^{+}_{M(e)}(xy) \geq max\{I^{+}_{K(e)}(x), I^{+}_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$F^{-}_{M(e)}(xy) = F^{-}_{M_2(e)}(xy) \geq max\{F^{-}_{K_2(e)}(x), F^{-}_{K_2(e)}(y)\}$$
$$= max\{F^{-}_{K(e)}(x), F^{-}_{K(e)}(y)\}$$

Buradan $F^{-}_{M(e)}(xy) \geq max\{F^{-}_{K(e)}(x), F^{-}_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$F^{+}_{M(e)}(xy) \geq max\{F^{+}_{K(e)}(x), F^{+}_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

3. Durum: $e \in A \cap B$ ve $xy \in E$ olsun.

$$\begin{aligned} T^{-}_{M(e)}(xy) &= min\{T^{-}_{M_1(e)}(xy), T^{-}_{M_2(e)}(xy)\} \\ &\leq min\big\{min\{T^{-}_{K_1(e)}(x), T^{-}_{K_1(e)}(y)\}, min\{T^{-}_{K_2(e)}(x), T^{-}_{K_2(e)}(y)\}\big\} \\ &= min\big\{min\{T^{-}_{K_1(e)}(x), T^{-}_{K_2(e)}(x)\}, min\{T^{-}_{K_1(e)}(y), T^{-}_{K_2(e)}(y)\}\big\} \end{aligned}$$

Buradan $T^{-}_{M(e)}(xy) \leq min\{T^{-}_{K(e)}(x), T^{-}_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$T^{+}_{M(e)}(xy) \leq min\{T^{+}_{K(e)}(x), T^{+}_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$
\begin{aligned}
I^{-}_{M(e)}(xy) &= max\{I^{-}_{M_1(e)}(xy), I^{-}_{M_2(e)}(xy)\} \\
&\geq max\big\{max\{I^{-}_{K_1(e)}(x), I^{-}_{K_1(e)}(y)\}, max\{I^{-}_{K_2(e)}(x), I^{-}_{K_2(e)}(y)\}\big\} \\
&= max\big\{max\{I^{-}_{K_1(e)}(x), I^{-}_{K_2(e)}(x)\}, max\{I^{-}_{K_1(e)}(y), I^{-}_{K_2(e)}(y)\}\big\}
\end{aligned}
$$

Buradan $I^{-}_{M(e)}(xy) \geq max\{I^{-}_{K(e)}(x), I^{-}_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$I^{+}_{M(e)}(xy) \geq max\{I^{+}_{K(e)}(x), I^{+}_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$
\begin{aligned}
F^{-}_{M(e)}(xy) &= max\{F^{-}_{M_1(e)}(xy), F^{-}_{M_2(e)}(xy)\} \\
&\geq max\big\{max\{F^{-}_{K_1(e)}(x), F^{-}_{K_1(e)}(y)\}, max\{F^{-}_{K_2(e)}(x), F^{-}_{K_2(e)}(y)\}\big\} \\
&= max\big\{max\{F^{-}_{K_1(e)}(x), F^{-}_{K_2(e)}(x)\}, max\{F^{-}_{K_1(e)}(y), F^{-}_{K_2(e)}(y)\}\big\}
\end{aligned}
$$

Buradan $F^{-}_{M(e)}(xy) \geq max\{F^{-}_{K(e)}(x), F^{-}_{K(e)}(y)\}$ dir. Benzer şekilde

$F^{+}_{M(e)}(xy) \geq max\{F^{+}_{K(e)}(x), F^{+}_{K(e)}(y)\}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\tilde{G}_1 \tilde{\bigcap} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \cup B)$ genişletilmiş arakesiti $G^* = (V, E)$ üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

Tanım 4.2.9 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin daraltılmış arakesiti $\tilde{G}_1 \tilde{\sqcap} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \cap B)$ şeklinde gösterilir. Burada $(K, A \cap B)$ V üzerinde, $(M, A \cap B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \tilde{\sqcap} \tilde{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. Her $e \in A \cap B$ ve $x \in V$ için

$$
\begin{aligned}
T^{-}_{K(e)}(x) &= min\{T^{-}_{K_1(e)}(x), T^{-}_{K_2(e)}(x)\} \\
T^{+}_{K(e)}(x) &= min\{T^{+}_{K_1(e)}(x), T^{+}_{K_2(e)}(x)\} \\
I^{-}_{K(e)}(x) &= max\{I^{-}_{K_1(e)}(x), I^{-}_{K_2(e)}(x)\} \\
I^{+}_{K(e)}(x) &= max\{I^{+}_{K_1(e)}(x), I^{+}_{K_2(e)}(x)\} \\
F^{-}_{K(e)}(x) &= max\{F^{-}_{K_1(e)}(x), F^{-}_{K_2(e)}(x)\} \\
F^{+}_{K(e)}(x) &= max\{F^{+}_{K_1(e)}(x), F^{+}_{K_2(e)}(x)\}
\end{aligned}
$$

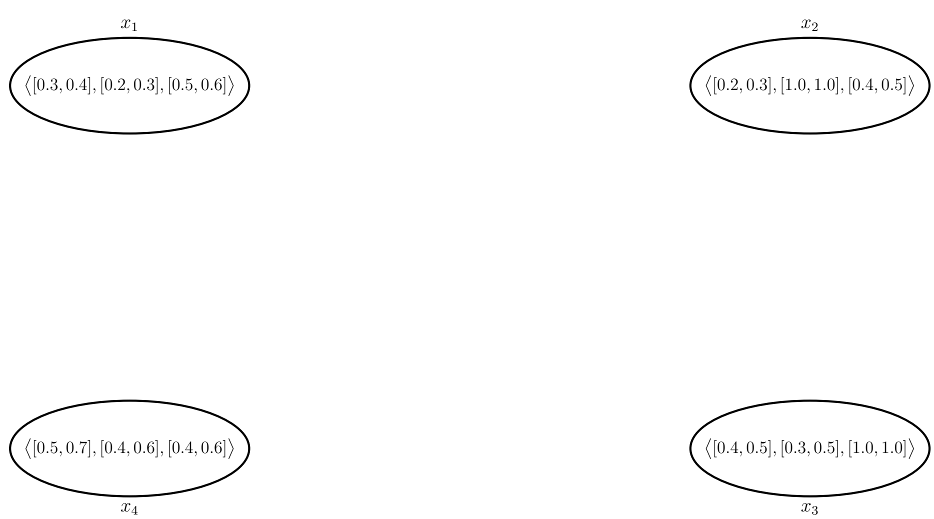
ii. Her $e \in A \cap B$ ve $xy \in E$ için

$$T^-_{M(e)}(xy) = min\{T^-_{M_1(e)}(xy), T^-_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$T^+_{M(e)}(xy) = min\{T^+_{M_1(e)}(xy), T^+_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$I^-_{M(e)}(xy) = max\{I^-_{M_1(e)}(xy), I^-_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$I^+_{M(e)}(xy) = max\{I^+_{M_1(e)}(xy), I^+_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$F^-_{M(e)}(xy) = max\{F^-_{M_1(e)}(xy), F^-_{M_2(e)}(xy)\}$$
$$F^+_{M(e)}(xy) = max\{F^+_{M_1(e)}(xy), F^+_{M_2(e)}(xy)\}$$

Teorem 4.2.7 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $\tilde{G}_1 \tilde{\prod} \tilde{G}_2$ de $G^{=}(V, E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. Teorem 4.2.6 nın ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek 4.2.10 Örnek 4.2.7 de verilen $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ aralık değerli neutrosophic esnek graflarını göz önüne alalım. Açıkça $A \cap B = \{e_2\}$ dir ve $H(e_2) = H_1(e_2) \hat{\cap} H_2(e_2)$ olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin daraltılmış arakesiti $\tilde{G}_1 \tilde{\prod} \tilde{G}_2 = \{H(e_2)\}$ şeklinde elde edilir. $H(e_2)$ alt grafı şekil 4.26 da gösterilmiştir.



Şekil 4.26: $H(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Tanım 4.2.10 $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}$ ye tam aralık değerli neutrosophic esnek graf denir. $\Leftrightarrow$

Her $x, y \in V$ ve $e \in A$ için

$T^-_{M(e)}(xy) = min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\}$

$T^+_{M(e)}(xy) = min\{T^+_{K(e)}(x), T^+_{K(e)}(y)\}$

$I^-_{M(e)}(xy) = max\{I^-_{K(e)}(x), I^-_{K(e)}(y)\}$

$I^+_{M(e)}(xy) = max\{I^+_{K(e)}(x), I^+_{K(e)}(y)\}$

$F^-_{M(e)}(xy) = max\{F^-_{K(e)}(x), F^-_{K(e)}(y)\}$

$F^+_{M(e)}(xy) = max\{F^+_{K(e)}(x), F^+_{K(e)}(y)\}$

Örnek 4.2.11 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1, x_3x_1, x_2x_4\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun.

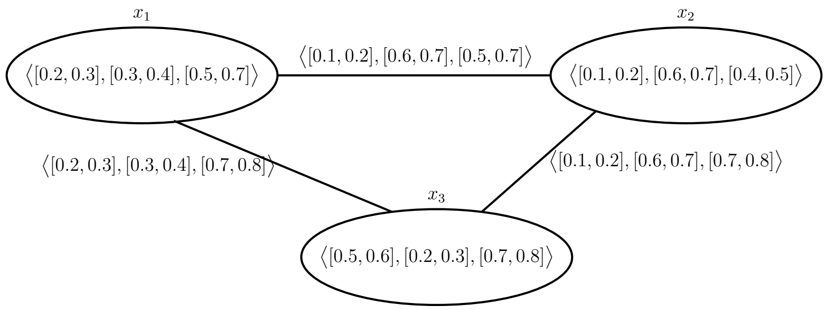
(K, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}
K(e_1) = \{&\langle x_1, [0.2, 0.3], [0.3, 0.4], [0.5, 0.7]\rangle, \langle x_2, [0.1, 0.2], [0.6, 0.7], [0.4, 0.5]\rangle,\\
&\langle x_3, [0.5, 0.6], [0.2, 0.3], [0.7, 0.8]\rangle\}\\
K(e_2) = \{&\langle x_1, [0.2, 0.4], [0.1, 0.2], [0.2, 0.3]\rangle, \langle x_2, [0.3, 0.4], [0.4, 0.5], [0.6, 0.8]\rangle,\\
&\langle x_3, [0.1, 0.3], [0.3, 0.5], [0.6, 0.9]\rangle\}\\
K(e_3) = \{&\langle x_1, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.2, 0.4]\rangle, \langle x_2, [0.4, 0.5], [0.6, 0.7], [0.3, 0.6]\rangle,\\
&\langle x_3, [0.4, 0.7], [0.6, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle, \langle x_4, [0.2, 0.5], [0.1, 0.3], [0.1, 0.2]\rangle\}
\end{aligned}$$

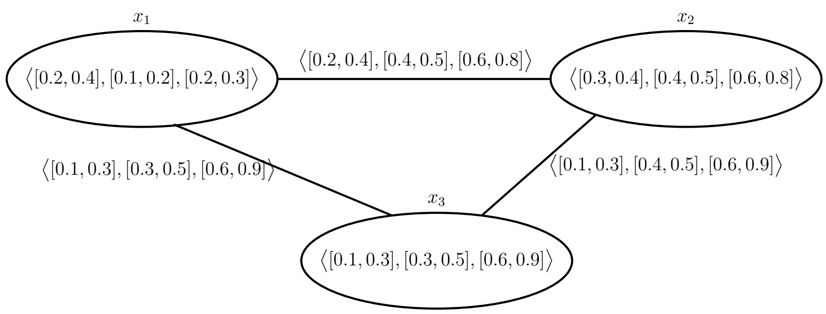
(M, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}
M(e_1) = \{&\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.6, 0.7], [0.5, 0.7]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.2], [0.6, 0.7], [0.7, 0.8]\rangle,\\
&\langle x_3x_1, [0.2, 0.3], [0.3, 0.4], [0.7, 0.8]\rangle\}\\
M(e_2) = \{&\langle x_1x_2, [0.2, 0.4], [0.4, 0.5], [0.6, 0.8]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.3], [0.4, 0.5], [0.6, 0.9]\rangle,\\
&\langle x_3x_1, [0.1, 0.3], [0.3, 0.5], [0.6, 0.9]\rangle\}\\
M(e_3) = \{&\langle x_1x_2, [0.3, 0.4], [0.6, 0.7], [0.3, 0.6]\rangle, \langle x_2x_3, [0.4, 0.5], [0.6, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle,\\
&\langle x_3x_4, [0.2, 0.5], [0.6, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle, \langle x_4x_1, [0.2, 0.4], [0.2, 0.3], [0.2, 0.4]\rangle,\\
&\langle x_1x_3, [0.3, 0.4], [0.6, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle, \langle x_2x_4, [0.2, 0.5], [0.6, 0.7], [0.3, 0.6]\}
\end{aligned}$$

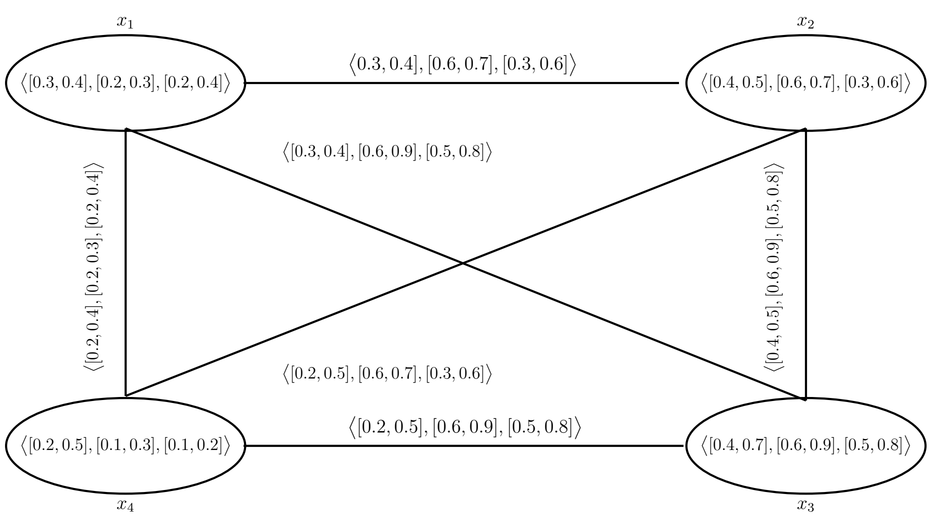
Açıkça $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$ tam aralık değerli neutrosophic esnek graftır. $\tilde{G}$ nin sırasıyla e_1, e_2 ve e_3 parametrelerine göre $H(e_1) = \big(K(e_1), M(e_1)\big)$, $H(e_2) = \big(K(e_2), M(e_2)\big)$ alt grafları aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.27: $H(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.28: $H(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.29: $H(e_3)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Tanım 4.2.11 $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$ bir aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}$ ye güçlü aralık değerli neutrosophic esnek graf denir. $\Leftrightarrow$ her $xy \in E$ ve $e \in A$ için

$T^-_{M(e)}(xy) = min\{T^-_{K(e)}(x), T^-_{K(e)}(y)\}$

$T^+_{M(e)}(xy) = min\{T^+_{K(e)}(x), T^+_{K(e)}(y)\}$

$I^-_{M(e)}(xy) = max\{I^-_{K(e)}(x), I^-_{K(e)}(y)\}$

$I^+_{M(e)}(xy) = max\{I^+_{K(e)}(x), I^+_{K(e)}(y)\}$

$F^-_{M(e)}(xy) = max\{F^-_{K(e)}(x), F^-_{K(e)}(y)\}$

$F^+_{M(e)}(xy) = max\{F^+_{K(e)}(x), F^+_{K(e)}(y)\}$

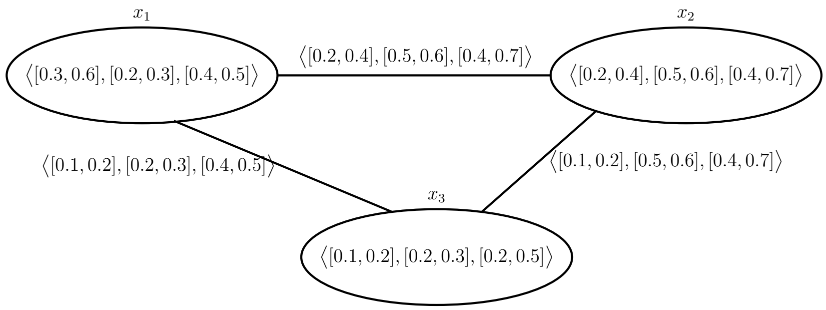
Örnek 4.2.12 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. (K, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$K(e_1) = \{\langle x_1, [0.3, 0.6], [0.2, 0.3], [0.4, 0.5]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.4], [0.5, 0.6], [0.4, 0.7]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.1, 0.2], [0.2, 0.3], [0.2, 0.5]\rangle\}$$
$$K(e_2) = \{\langle x_1, [0.2, 0.3], [0.1, 0.2], [0.3, 0.4]\rangle, \langle x_2, [0.4, 0.5], [0.3, 0.6], [0.7, 0.8]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.1, 0.3], [0.2, 0.4], [0.3, 0.5]\rangle\}$$
$$K(e_3) = \{\langle x_1, [0.5, 0.7], [0.2, 0.3], [0.6, 0.7]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.3], [0.1, 0.2], [0.3, 0.4]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.3, 0.4], [0.4, 0.5], [0.1, 0.2]\rangle, \langle x_4, [0.4, 0.5], [0.5, 0.6], [0.8, 0.9]\rangle\}$$

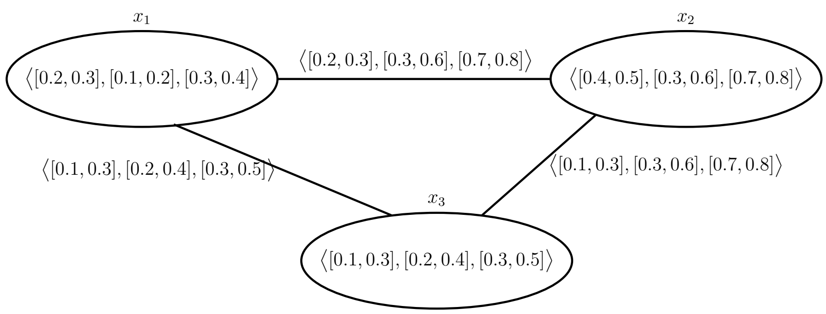
(M, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$M(e_1) = \{\langle x_1x_2, [0.2, 0.4], [0.5, 0.6], [0.4, 0.7]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.4, 0.7]\rangle,$$
$$\langle x_3x_1, [0.1, 0.2], [0.2, 0.3], [0.4, 0.5]\rangle\}$$
$$M(e_2) = \{\langle x_1x_2, [0.2, 0.3], [0.3, 0.6], [0.7, 0.8]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.3], [0.3, 0.6], [0.7, 0.8]\rangle,$$
$$\langle x_3x_1, [0.1, 0.3], [0.2, 0.4], [0.3, 0.5]\rangle\}$$
$$M(e_3) = \{\langle x_1x_2, [0.2, 0.3], [0.2, 0.3], [0.6, 0.7]\rangle, \langle x_2x_3, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\rangle,$$
$$\langle x_3x_4, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6], [0.8, 0.9]\rangle, \langle x_4v1, [0.4, 0.5], [0.5, 0.6], [0.8, 0.9]\rangle\}$$

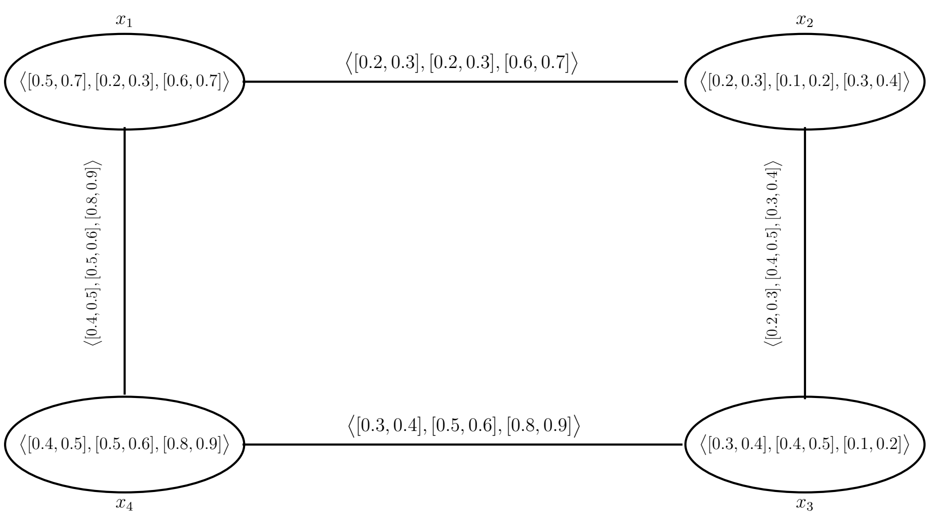
Açıkça $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$ güçlü aralık değerli neutrosophic esnek graftır. $\tilde{G}$ nin sırasıyla e_1, e_2 ve e_3 parametrelerine göre $H(e_1) = \big(K(e_1), M(e_1)\big)$, $H(e_2) = \big(K(e_2), M(e_2)\big)$ alt grafları aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.30: $H(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.31: $H(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.32: $H(e_3)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Tanım 4.2.12 $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde bir güçlü aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}$ nin tümleyeni $\overline{\tilde{G}} = (G^*, \bar{K}, \bar{M}, A)$ şeklinde gösterilir ve her $e \in A$ ve $x, y \in V$ için $\overline{K}(e) = K(e)$ ve

$T^{-}_{\overline{M}(e)}(xy) = min\{T^{-}_{K(e)}(x), T^{-}_{K(e)}(y)\} - T^{-}_{M(e)}(xy)$

$T^{+}_{\overline{M}(e)}(xy) = min\{T^{+}_{K(e)}(x), T^{+}_{K(e)}(y)\} - T^{+}_{M(e)}(xy)$

$I^{-}_{\overline{M}(e)}(xy) = min\{I^{-}_{K(e)}(x), I^{-}_{K(e)}(y)\} - I^{-}_{M(e)}(xy)$

$I^{+}_{\overline{M}(e)}(xy) = min\{I^{+}_{K(e)}(x), I^{+}_{K(e)}(y)\} - I^{+}_{M(e)}(xy)$

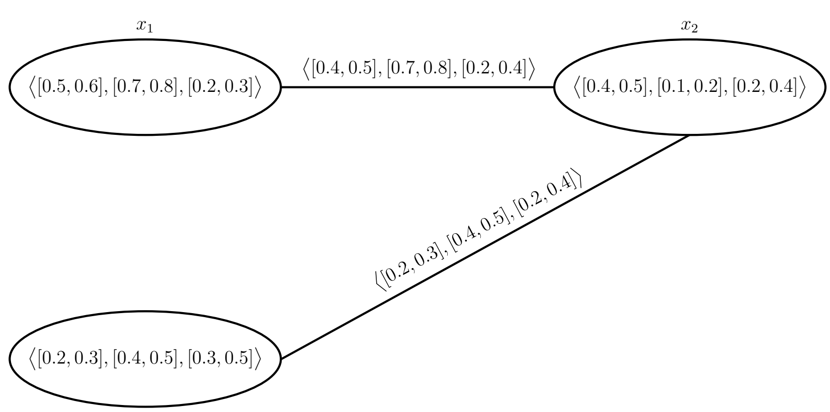
$F^{-}_{\overline{M}(e)}(xy) = min\{F^{-}_{K(e)}(x), F^{-}_{K(e)}(y)\} - F^{-}_{M(e)}(xy)$

$F^{+}_{\overline{M}(e)}(xy) = min\{F^{+}_{K(e)}(x), F^{+}_{K(e)}(y)\} - F^{+}_{M(e)}(xy)$

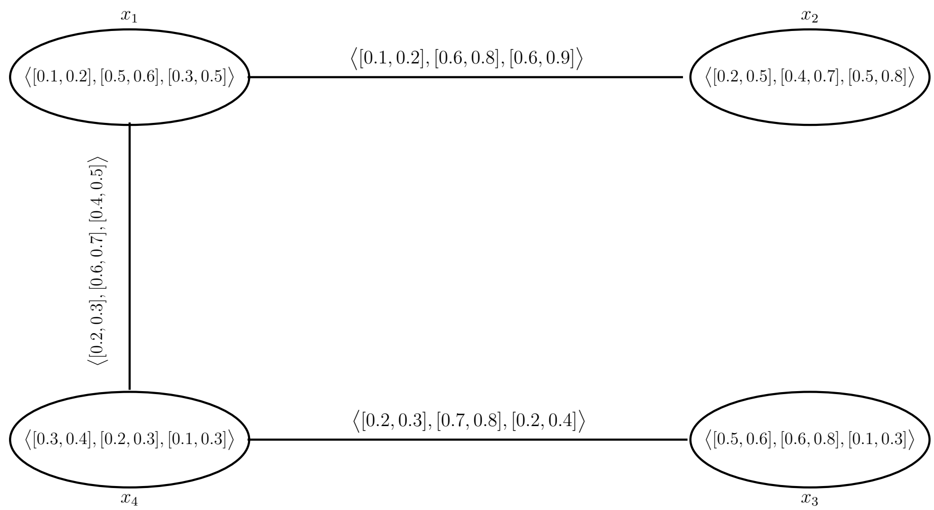
şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.13 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_4, x_2x_3, x_3x_4\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi ve $\tilde{G} = \{H(e_1), H(e_2)\} = \{(K(e_1), M(e_1)), (K(e_2), M(e_2))\}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{aligned}
K(e_1) = \{&\langle x_1, [0.5, 0.6], [0.7, 0.8], [0.2, 0.3]\rangle, \langle x_2, [0.4, 0.5], [0.1, 0.2], [0.2, 0.4]\rangle,\\
&\langle x_3, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.1, 0.3]\rangle\}\\
M(e_1) = \{&\langle x_1x_2, [0.4, 0.5], [0.7, 0.8], [0.2, 0.4]\rangle, \langle x_2x_3, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.2, 0.4]\rangle\}\\
K(e_2) = \{&\langle x_1, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.3, 0.5]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.5], [0.4, 0.7], [0.5, 0.8]\rangle,\\
&\langle x_3, [0.5, 0.6], [0.6, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle, \langle x_4, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.1, 0.3]\rangle\}\\
M(e_2) = \{&\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.5, 0.7], [0.5, 0.8]\rangle, \langle x_3x_4, [0.3, 0.4], [0.6, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle,\\
&\langle x_1x_4, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.3, 0.5]\rangle\}
\end{aligned}$$



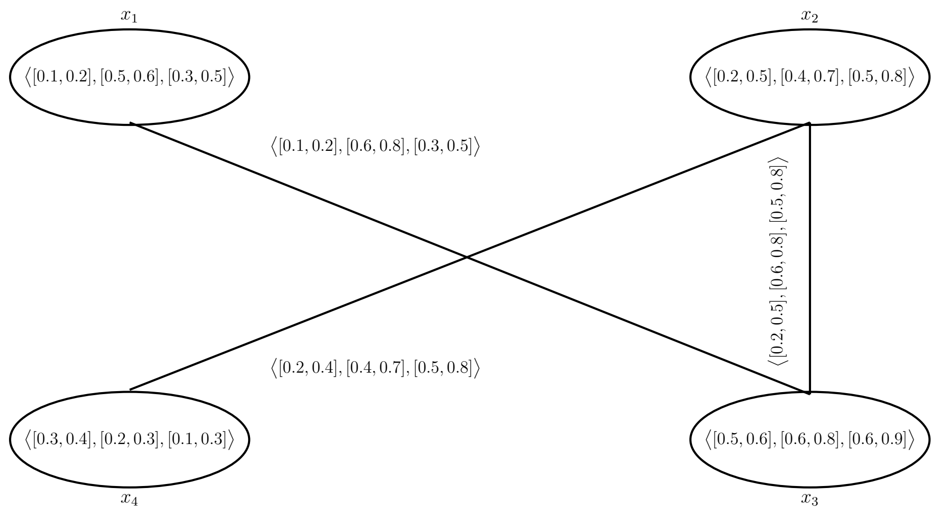
Şekil 4.33: $H(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.34: $H(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Her $e \in A$ için $\overline{K}(e) = K(e)$ dir. Her $e \in A$ ve $x, y \in V$ için $\overline{M}(e)$ de Tanım 4.2.12 deki eşitlikler yardımıyla hesaplandıktan sonra, $\tilde{G}$ nin tümleyeni $\overline{\tilde{G}} = \{\overline{H}(e_1), \overline{H}(e_2)\} = \{(\overline{K}(e_1), \overline{M}(e_1)), (\overline{K}(e_2), \overline{M}(e_2))\}$ aşağıda gösterildiği gibi elde edilir.

Şekil 4.35: $\overline{H}(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



Şekil 4.36: $\overline{H}(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Tanım 4.2.13 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin $\vee-$ birleşimi $\tilde{G}_1 \tilde{\bigvee} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \times B)$ şeklinde gösterilir. Burada $(K, A \times B)$ V üzerinde, $(M, A \times B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \bigvee \tilde{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. $(e_1, e_2) \in A \times B$ ve $x \in V$ için

$$T^-_{K(e_1,e_2)}(x) = max\{T^-_{K_1(e_1)}(x), T^-_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$T^+_{K(e_1,e_2)}(x) = max\{T^+_{K_1(e_1)}(x), T^+_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$I^-_{K(e_1,e_2)}(x) = min\{I^-_{K_1(e_1)}(x), I^-_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$I^+_{K(e_1,e_2)}(x) = min\{I^+_{K_1(e_1)}(x), I^+_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$F^-_{K(e_1,e_2)}(x) = min\{F^-_{K_1(e_1)}(x), F^-_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$F^+_{K(e_1,e_2)}(x) = min\{F^+_{K_1(e_1)}(x), F^+_{K_2(e_2)}(x)\}$$

ii. $(e_1, e_2) \in A \times B$ ve $xy \in E$ için

$$T^-_{M(e_1,e_2)}(xy) = max\{T^-_{M_1(e_1)}(xy), T^-_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(xy) = max\{T^+_{M_1(e_1)}(xy), T^+_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(xy) = min\{I^-_{M_1(e_1)}(xy), I^-_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(xy) = min\{I^+_{M_1(e_1)}(xy), I^+_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(xy) = min\{F^-_{M_1(e_1)}(xy), F^-_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(xy) = min\{F^+_{M_1(e_1)}(xy), F^+_{M_2(e_2)}(xy)\}$$

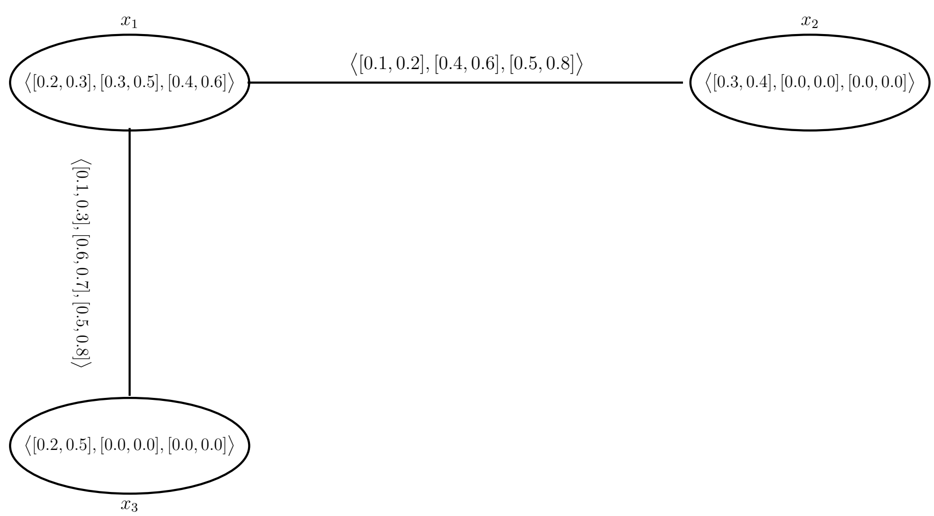
Örnek 4.2.14 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1\}$ ve $B = \{e_2\}$ parametre kümeleri olsun. $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde $\tilde{G}_1 = \{H_1(e_1)\} = \{(K_1(e_1), M_1(e_1))\}$ ve $\tilde{G}_2 = \{H_2(e_2)\} = \{(K_2(e_2), M_2(e_2))\}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafları aşağıdaki gibi verilsin.

$$K_1(e_1) = \{\langle x_1, [0.2, 0.3], [0.3, 0.5], [0.4, 0.6]\rangle, \langle x_2, [0.3, 0.4], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$$
$$\langle x_3, [0.2, 0.5], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle\}$$

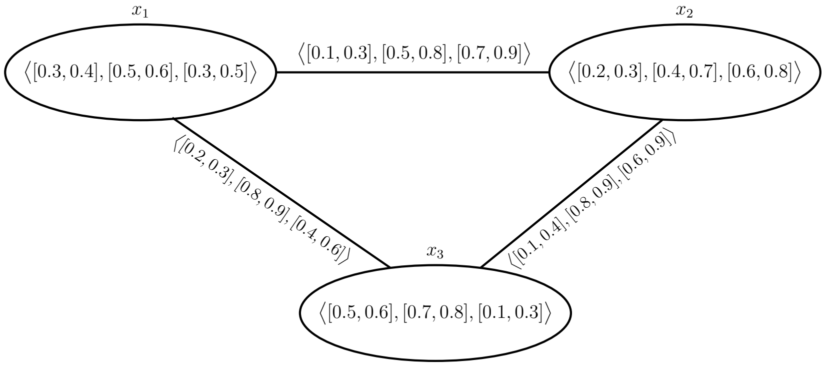
$$M_1(e_1) = \{\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.4, 0.6], [0.5, 0.8]\rangle, \langle x_2x_3, [0.0, 0.0], [0.0, 0.0], [0.0, 0.0]\rangle$$
$$\langle x_1x_3, [0.1, 0.3], [0.6, 0.7], [0.5, 0.8]\rangle\}$$

$$K_2(e_2) = \{\langle x_1, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6], [0.3, 0.5]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.3], [0.4, 0.7], [0.6, 0.8]\rangle,$$
$$\langle x_3, [0.5, 0.6], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle\}$$

$$M_2(e_2) = \{\langle x_1x_2, [0.1, 0.3], [0.5, 0.8], [0.7, 0.9]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.4], [0.8, 0.9], [0.6, 0.9]\rangle,$$
$$\langle x_1x_3, [0.2, 0.3], [0.8, 0.9], [0.4, 0.6]\rangle\}$$



Şekil 4.37: $H_1(e_1)$ aralık değerli neutrosophic grafı



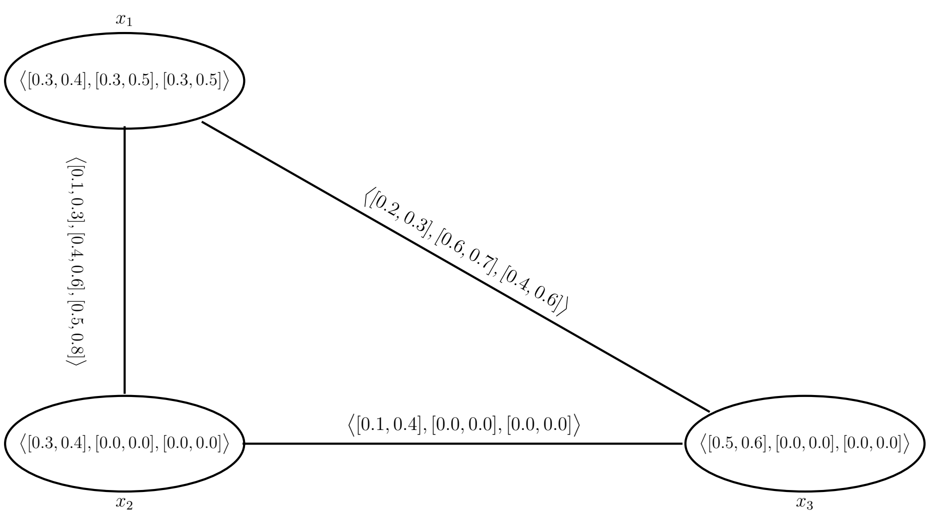
Şekil 4.38: $H_2(e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Açıkça $A \times B = \{(e_1, e_2)\}$ dir. Her $x \in V$, $(e_1, e_2) \in A \times B$ için,

$$K(e_1,e_2) = \{\langle x_1, [0.3,0.4], [0.3,0.5], [0.3,0.5]\rangle, \langle x_2, [0.3,0.4], [0.0,0.0], [0.0,0.0]\rangle, \\ \langle x_3, [0.5,0.6], [0.0,0.0], [0.0,0.0]\rangle\}$$

$$M(e_1,e_2) = \{\langle x_1x_2, [0.1,0.3], [0.4,0.6], [0.5,0.8]\rangle, \langle x_2x_3, [0.1,0.4], [0.0,0.0], [0.0,0.0]\rangle, \\ \langle x_1x_3, [0.2,0.3], [0.6,0.7], [0.4,0.6]\rangle\}$$

olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_1$ nin $\vee-$ birleşimi $\tilde{G}_1 \bigvee \tilde{G}_2 = \{H(e_1,e_2)\} = \{K(e_1,e_2) = M(e_1,e_2)\}$ şeklinde elde edilir. $H(e_1,e_2)$ alt grafı şekil 4.39 da gösterilmiştir.



Şekil 4.39: $H(e_1,e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 4.2.8 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V,E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $\tilde{G}_1 \bigvee \tilde{G}_2$ de $G^* = (V,E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. $\tilde{G}_1 \bigvee \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \times B)$ olsun. $\tilde{G}_1 \bigvee \tilde{G}_2$ nin aralık değerli neutrosophic esnek graf olma koşullarını sağladığını gösterelim. $(K, A \times B)$ nin V üzerinde, $(M, A \times B)$ nin E üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek küme olduğu Tanım 4.2.13 ile açıktır. Şimdi kenar ve köşe noktaları arasındaki eşitsizliklerin sağlandığını gösterelim.

Her $(e_1, e_2) \in A \times B$ ve $xy \in E$ için,

$$\begin{aligned} T^-_{M(e_1,e_2)}(xy) &= max\{T^-_{M_1(e_1)}(xy), T^-_{M_2(e_2)}(xy)\} \\ &\leq max\big\{min\{T^-_{K_1(e_1)}(x), T^-_{K_1(e_1)}(y)\}, min\{T^-_{K_2(e_2)}(x), T^-_{K_2(e_2)}(y)\}\big\} \\ &\leq min\big\{max\{T^-_{K_1(e_1)}(x), T^-_{K_2(e_2)}(x)\}, max\{T^-_{K_1(e_1)}(y), T^-_{K_2(e_2)}(y)\}\big\} \\ &= min\{T^-_{K(e_1,e_2)}(x), T^-_{K(e_1,e_2)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $T^-_{M(e_1,e_2)}(xy) \leq min\{T^-_{K(e_1,e_2)}(x), T^-_{K(e_1,e_2)}(y)\}$ elde edilir. Benzer şekilde $T^+_{M(e_1,e_2)}(xy) \leq min\{T^+_{K(e_1,e_2)}(x), T^+_{K(e_1,e_2)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} I^-_{M(e_1,e_2)}(xy) &= min\{I^-_{M_1(e_1)}(xy), I^-_{M_2(e_2)}(xy)\} \\ &\geq min\big\{max\{I^-_{K_1(e_1)}(x), I^-_{K_1(e_1)}(y)\}, max\{I^-_{K_2(e_2)}(x), I^-_{K_2(e_2)}(y)\}\big\} \\ &\geq max\big\{min\{I^-_{K_1(e_1)}(x), I^-_{K_2(e_2)}(x)\}, min\{I^-_{K_1(e_1)}(y), I^-_{K_2(e_2)}(y)\}\big\} \\ &= max\{I^-_{K(e_1,e_2)}(x), I^-_{K(e_1,e_2)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $I^-_{M(e_1,e_2)}(xy) \geq max\{I^-_{K(e_1,e_2)}(x), I^-_{K(e_1,e_2)}(y)\}$ elde edilir. Benzer şekilde $I^+_{M(e_1,e_2)}(xy) \geq max\{I^+_{K(e_1,e_2)}(x), I^+_{K(e_1,e_2)}(y)\}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} F^-_{M(e_1,e_2)}(xy) &= min\{F^-_{M_1(e_1)}(xy), F^-_{M_2(e_2)}(xy)\} \\ &\geq min\big\{max\{F^-_{K_1(e_1)}(x), F^-_{K_1(e_1)}(y)\}, max\{F^-_{K_2(e_2)}(x), F^-_{K_2(e_2)}(y)\}\big\} \\ &\geq max\big\{min\{F^-_{K_1(e_1)}(x), F^-_{K_2(e_2)}(x)\}, min\{F^-_{K_1(e_1)}(y), F^-_{K_2(e_2)}(y)\}\big\} \\ &= max\{F^-_{K(e_1,e_2)}(x), F^-_{K(e_1,e_2)}(y)\} \end{aligned}$$

Buradan $F^-_{M(e_1,e_2)}(xy) \geq max\{F^-_{K(e_1,e_2)}(x), F^-_{K(e_1,e_2)}(y)\}$ elde edilir. Benzer şekilde $F^+_{M(e_1,e_2)}(xy) \geq max\{F^+_{K(e_1,e_2)}(x), F^+_{K(e_1,e_2)}(y)\}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\tilde{G}_1 \tilde{\bigvee} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \times B)$, $G^* = (V, E)$ üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

Tanım 4.2.14 $\tilde{G}_1 = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ nin $\wedge-$ arakesiti

$\tilde{G}_1 \tilde{\bigwedge} \tilde{G}_2 = (G^*, K, M, A \times B)$ şeklinde gösterilir. Burada $(K, A \times B)$ V üzerinde, $(M, A \times B)$ E üzerinde aralık değerli neutrosophic esnek kümelerdir. $\tilde{G}_1 \bigwedge \tilde{G}_2$ nin köşe noktalarının ve kenarlarının T, I ve F üyelik aralıklarının alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. $(e_1, e_2) \in A \times B$ ve $x \in V$ için

$$T^-_{K(e_1,e_2)}(x) = min\{T^-_{K_1(e_1)}(x), T^-_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$T^+_{K(e_1,e_2)}(x) = min\{T^+_{K_1(e_1)}(x), T^+_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$I^-_{K(e_1,e_2)}(x) = max\{I^-_{K_1(e_1)}(x), I^-_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$I^+_{K(e_1,e_2)}(x) = max\{I^+_{K_1(e_1)}(x), I^+_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$F^-_{K(e_1,e_2)}(x) = max\{F^-_{K_1(e_1)}(x), F^-_{K_2(e_2)}(x)\}$$
$$F^+_{K(e_1,e_2)}(x) = max\{F^+_{K_1(e_1)}(x), F^+_{K_2(e_2)}(x)\}$$

ii. $(e_1, e_2) \in A \times B$ ve $xy \in E$ için

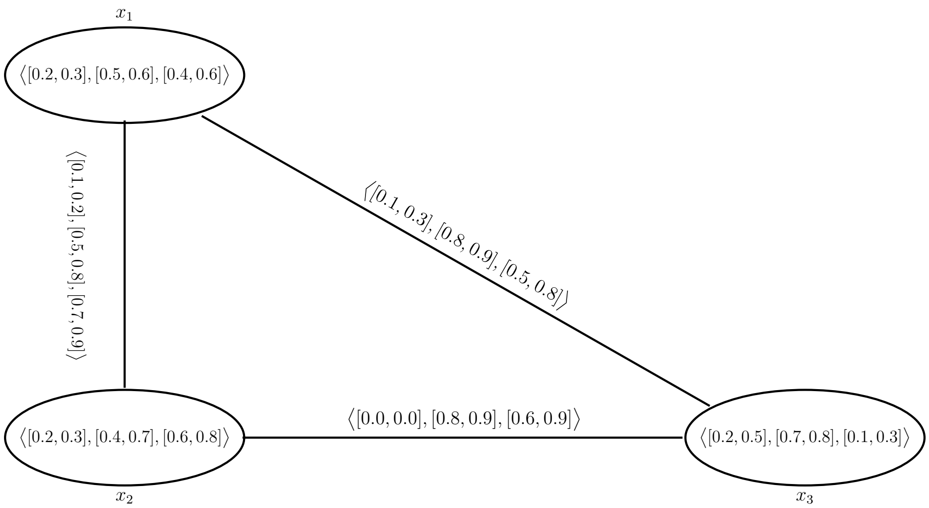
$$T^-_{M(e_1,e_2)}(xy) = min\{T^-_{M_1(e_1)}(xy), T^-_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$T^+_{M(e_1,e_2)}(xy) = min\{T^+_{M_1(e_1)}(xy), T^+_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$I^-_{M(e_1,e_2)}(xy) = max\{I^-_{M_1(e_1)}(xy), I^-_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$I^+_{M(e_1,e_2)}(xy) = max\{I^+_{M_1(e_1)}(xy), I^+_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$F^-_{M(e_1,e_2)}(xy) = max\{F^-_{M_1(e_1)}(xy), F^-_{M_2(e_2)}(xy)\}$$
$$F^+_{M(e_1,e_2)}(xy) = max\{F^+_{M_1(e_1)}(xy), F^+_{M_2(e_2)}(xy)\}$$

Örnek 4.2.15 Örnek 4.2.14 deki $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_2$ aralık değerli neutrosophic esnek graflarını göz önüne alalım. Açıkça $A \times B = \{(e_1, e_2)\}$ dir. Her $x \in V$, $(e_1, e_2) \in A \times B$ için,

$$K(e_1, e_2) = \{x_1, [0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.4, 0.6]\rangle, x_2, [0.2, 0.3], [0.4, 0.7], [0.6, 0.8]\rangle,$$
$$x_3, [0.2, 0.5], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle\}$$

$$M(e_1, e_2) = \{x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.5, 0.8], [0.7, 0.9]\rangle, x_2x_3, [0.0, 0.0], [0.8, 0.9], [0.6, 0.9]\rangle,$$
$$\langle x_1x_3, [0.1, 0.3], [0.8, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle\}$$

olmak üzere $\tilde{G}_1$ ve $\tilde{G}_1$ nin $\wedge -$ arakesiti $\tilde{G}_1 \bigwedge \tilde{G}_2 = \{H(e_1, e_2)\} = \{K(e_1, e_2) = M(e_1, e_2)\}$ şeklinde elde edilir. $H(e_1, e_2)$ alt grafı şekil 4.40 da gösterilmiştir.



Şekil 4.40: $H(e_1,e_2)$ aralık değerli neutrosophic grafı

Teorem 4.2.9 $\tilde{G_1} = (G^*, K_1, M_1, A)$ ve $\tilde{G_2} = (G^*, K_2, M_2, B)$, $G^* = (V,E)$ basit grafı üzerinde iki aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. Bu takdirde $\tilde{G_1} \bigwedge \tilde{G_2}$ de $G^* = (V,E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graftır.

İspat. Teorem 4.2.8 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 4.2.15 $V = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ ve $E = \{(x_i x_j) : i \neq j,\ i,j \in \Lambda\}$ olmak üzere $G^* = (V,E)$ basit grafı üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek grafın alt graflarının her $e \in A$ parametresi için matris gösterimi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1x_2 & x_1x_3 & \ldots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 0 & x_2x_3 & \ldots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Örnek 4.2.16 $A = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere $G^* = (V,E)$ basit grafı üzerinde bir $\tilde{G} = \{H(e_1), H(e_2)\} = \{(K(e_1), M(e_1)), (K(e_2), M(e_2))\}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafı aşağıdaki gibi verilsin.

$$
\begin{aligned}
K(e_1) = \{ & \langle x_1, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.3, 0.5] \rangle, \langle x_2, [0.2, 0.5], [0.4, 0.7], [0.5, 0.8] \rangle, \\
& \langle x_3, [0.5, 0.6], [0.6, 0.8], [0.1, 0.3] \rangle, \langle x_4, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.1, 0.3] \rangle, \\
& \langle x_5, [0.5, 0.6], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3] \rangle \} \\
M(e_1) = \{ & \langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.6, 0.8], [0.6, 0.9] \rangle, \langle x_2x_3, [0.1, 0.4], [0.8, 0.9], [0.6, 0.9] \rangle, \\
& \langle x_1x_5, [0.1, 0.2], [0.8, 0.9], [0.4, 0.6] \rangle, \langle x_2x_4, [0.2, 0.3], [0.7, 0.8], [0.7, 0.9] \rangle, \\
& \langle x_3x_4, [0.2, 0.3], [0.7, 0.8], [0.2, 0.4] \rangle, \langle x_2x_5, [0.1, 0.3], [0.8, 0.9], [0.5, 0.8] \rangle, \\
& \langle x_3x_5, [0.3, 0.4], [0.7, 0.9], [0.5, 0.6] \rangle \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K(e_2) = \{ & \langle x_1, [0.3, 0.4], [0.4, 0.7], [0.1, 0.2] \rangle, \langle x_2, [0.3, 0.5], [0.2, 0.3], [0.1, 0.2] \rangle, \\
& \langle x_3, [0.7, 0.8], [0.5, 0.6], [0.4, 0.5] \rangle, \langle x_4, [0.2, 0.4], [0.1, 0.2], [0.8, 0.9] \rangle, \\
& \langle x_5, [0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.6, 0.7] \rangle \} \\
M(e_2) = \{ & \langle x_1x_2, [0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle, \langle x_2x_3, [0.3, 0.4], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6] \rangle, \\
& \langle x_1x_5, [0.1, 0.2], [0.6, 0.8], [0.8, 0.9] \rangle, \langle x_3x_4, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.8, 0.9] \rangle, \\
& \langle x_2x_5, [0.3, 0.4], [0.4, 0.5], [0.7, 0.8] \rangle
\end{aligned}
$$

$H(e_1) = (K(e_1), M(e_1))$ ve $H(e_2) = (K(e_2), M(e_2))$ nin $\tilde{G}$ nin alt grafları olduğu açıktır. Bu aralık değerli neutrosophic grafların sırasıyla e_1 ve e_2 parametresine göre matris gösterimi aşağıda olduğu gibidir.

$$
H(e_1) = \begin{bmatrix}
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.4,0.6] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.7,0.9] \rangle & \langle [0.1,0.3],[0.8,0.9],[0.5,0.8] \rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.2,0.4] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.7,0.9],[0.5,0.6] \rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.7,0.9] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.2,0.4] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.3,0.4],[0.4,0.6] \rangle & \langle [0.1,0.3],[0.8,0.9],[0.5,0.8] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.7,0.9],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.6,0.7],[0.2,0.4] \rangle
\end{bmatrix}
$$

$$
H(e_2) = \begin{bmatrix}
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.5,0.6],[0.3,0.4] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.8,0.9] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.6,0.7],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8] \rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.6,0.7],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.7,0.9],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle
\end{bmatrix}
$$

Tanım 4.2.16 $A = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ olmak üzere $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$, $G^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}$ nin $H(e_1), H(e_2), \dots, H(e_n)$ şeklindeki alt grafların parametrik $\vee-$ birleşimi $H_{\bigvee}$ notasyonu ile gösterilir ve her $xy \in E$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T^{-}_{M(e)}(xy) = max\{T^{-}_{M(e_1)}(xy), T^{-}_{M(e_2)}(xy), \ldots, T^{-}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$T^{+}_{M(e)}(xy) = max\{T^{+}_{M(e_1)}(xy), T^{+}_{M(e_2)}(xy), \ldots, T^{+}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$I^{-}_{M(e)}(xy) = min\{I^{-}_{M(e_1)}(xy), I^{-}_{M(e_2)}(xy), \ldots, I^{-}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$I^{+}_{M(e)}(xy) = min\{I^{+}_{M(e_1)}(xy), I^{+}_{M(e_2)}(xy), \ldots, I^{+}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$F^{-}_{M(e)}(xy) = min\{F^{-}_{M(e_1)}(xy), F^{-}_{M(e_2)}(xy), \ldots, F^{-}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$F^{+}_{M(e)}(xy) = min\{F^{+}_{M(e_1)}(xy), F^{+}_{M(e_2)}(xy), \ldots, F^{+}_{M(e_n)}(xy)\}$$

Tanım 4.2.17 $A = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ olmak üzere $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$, $G^* = (V, E)$ üzerinde bir aralık değerli neutrosophic esnek graf olsun. $\tilde{G}$ nin $H(e_1), H(e_2), \ldots, H(e_n)$ şeklindeki alt grafların parametrik $\wedge-$ arakesiti $H_{\bigwedge}$ notasyonu ile gösterilir ve her $xy \in E$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T^{-}_{M(e)}(xy) = min\{T^{-}_{M(e_1)}(xy), T^{-}_{M(e_2)}(xy), \ldots, T^{-}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$T^{+}_{M(e)}(xy) = min\{T^{+}_{M(e_1)}(xy), T^{+}_{M(e_2)}(xy), \ldots, T^{+}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$I^{-}_{M(e)}(xy) = max\{I^{-}_{M(e_1)}(xy), I^{-}_{M(e_2)}(xy), \ldots, I^{-}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$I^{+}_{M(e)}(xy) = max\{I^{+}_{M(e_1)}(xy), I^{+}_{M(e_2)}(xy), \ldots, I^{+}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$F^{-}_{M(e)}(xy) = max\{F^{-}_{M(e_1)}(xy), F^{-}_{M(e_2)}(xy), \ldots, F^{-}_{M(e_n)}(xy)\}$$
$$F^{+}_{M(e)}(xy) = max\{F^{+}_{M(e_1)}(xy), F^{+}_{M(e_2)}(xy), \ldots, F^{+}_{M(e_n)}(xy)\}$$

Örnek 4.2.17 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4, x_3x_5, x_4x_5\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $\tilde{G} = \{H(e_1), H(e_2), H(e_3)\} = \{(K(e_1), M(e_1)), (K(e_2), M(e_2)), (K(e_3), M(e_3))\}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafı $G^* = (V, E)$ basit grafı üzerinde aşağıdaki gibi verilsin.

$$
\begin{aligned}
K(e_1) = \{&\langle x_1, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.3, 0.5]\rangle, \langle x_2, [0.2, 0.5], [0.4, 0.7], [0.5, 0.8]\rangle, \\
&\langle x_3, [0.5, 0.6], [0.6, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle, \langle x_4, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.1, 0.3]\rangle, \\
&\langle x_5, [0.5, 0.6], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle\} \\
M(e_1) = \{&\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.6, 0.8], [0.6, 0.9]\rangle, x_2x_3, [0.1, 0.4], [0.8, 0.9], [0.6, 0.9]\rangle, \\
&\langle x_1x_5, [0.1, 0.2], [0.8, 0.9], [0.4, 0.6]\rangle, x_2x_4, [0.2, 0.3], [0.7, 0.8], [0.7, 0.9]\rangle, \\
&\langle x_3x_4, [0.2, 0.3], [0.7, 0.8], [0.2, 0.4]\rangle, x_2x_5, [0.1, 0.3], [0.8, 0.9], [0.5, 0.8]\rangle, \\
&\langle x_3x_5, [0.3, 0.4], [0.7, 0.9], [0.5, 0.6]\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K(e_2) = \{&\langle x_1, [0.3, 0.4], [0.4, 0.7], [0.1, 0.2]\rangle, \langle x_2, [0.3, 0.5], [0.2, 0.3], [0.1, 0.2]\rangle, \\
&\langle x_3, [0.7, 0.8], [0.5, 0.6], [0.4, 0.5]\rangle, \langle x_4, [0.2, 0.4], [0.1, 0.2], [0.8, 0.9]\rangle, \\
&\langle x_5, [0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.6, 0.7]\rangle\} \\
M(e_2) = \{&\langle x_1x_2, [0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.3, 0.4]\rangle, \langle x_2x_3, [0.3, 0.4], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\rangle, \\
&\langle x_1x_5, [0.1, 0.2], [0.6, 0.8], [0.8, 0.9]\rangle, \langle x_3x_4, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.8, 0.9]\rangle, \\
&\langle x_2x_5, [0.3, 0.4], [0.4, 0.5], [0.7, 0.8]\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K(e_3) = \{&\langle x_1, [0.2, 0.3], [0.3, 0.5], [0.2, 0.4]\rangle, \langle x_2, [0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.5, 0.7]\rangle, \\
&\langle x_3, [0.6, 0.7], [0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\rangle, \langle x_4, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.6, 0.7]\rangle, \\
&\langle x_5, [0.1, 0.2], [0.4, 0.5], [0.5, 0.6]\rangle\} \\
M(e_3) = \{&\langle x_1x_2, [0.1, 0.2], [0.4, 0.6], [0.6, 0.8]\rangle, \langle x_2x_3, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6], [0.7, 0.8]\rangle, \\
&\langle x_1x_5, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.6, 0.7]\rangle, \langle x_3x_4, [0.1, 0.2], [0.6, 0.7], [0.6, 0.8]\rangle, \\
&\langle x_4x_5, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.7, 0.8]\rangle, \langle x_2x_4, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.8, 0.9]\rangle, \\
&\langle x_2x_5, [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.8, 0.9]\rangle\}
\end{aligned}
$$

$H(e_1)$, $H(e_2)$ ve $H(e_3)$ alt graflarının sırasıyla e_1, e_2 ve e_3 parametrelerine göre matris gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$
H(e_1) = \begin{bmatrix}
\langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9]\rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.4,0.6]\rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9]\rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.6,0.9]\rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.7,0.9]\rangle & \langle [0.1,0.3],[0.8,0.9],[0.5,0.8]\rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.6,0.9]\rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.2,0.4]\rangle & \langle [0.3,0.4],[0.7,0.9],[0.5,0.6]\rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.7,0.9]\rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.2,0.4]\rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.4,0.6]\rangle & \langle [0.1,0.3],[0.8,0.9],[0.5,0.8]\rangle & \langle [0.3,0.4],[0.7,0.9],[0.5,0.6]\rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0]\rangle
\end{bmatrix}
$$

$$H(e_2) = \begin{bmatrix} \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.5,0.6],[0.3,0.4]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.8,0.9]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.6,0.7],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.6,0.7],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \end{bmatrix}$$

$$H(e_3) = \begin{bmatrix} \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.4,0.6],[0.6,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.6,0.7]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.4,0.6],[0.6,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.4,0.5],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.6,0.7],[0.6,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.4,0.5],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.6,0.7],[0.6,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.6,0.7]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \end{bmatrix}$$

$\tilde{G}$ nin $H(e_1)$, $H(e_2)$ ve $H(e_3)$ alt graflarının parametrik $\vee-$ birleşimi aşağıdaki gibidir

$$H_{\bigvee}(e) = \begin{bmatrix} \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.4,0.6],[0.3,0.4]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.4,0.6]\rangle \\ \langle[0.2,0.3],[0.4,0.6],[0.3,0.4]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.5,0.8]\rangle \\ \langle[0.2,0.3],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.2,0.4]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0,0],[0,0]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.2,0.4]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0,0],[0,0]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.4,0.6]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.5,0.8]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \end{bmatrix}$$

$\tilde{G}$ nin $H(e_1)$, $H(e_2)$ ve $H(e_3)$ alt graflarının parametrik $\wedge-$ arakesiti aşağıdaki gibidir.

$$H_{\bigwedge}(e) = \begin{bmatrix} \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0.5,0.6],[0.4,0.5]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.8,0.9]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.7,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.8,0.9]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.7,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0.7,0.9],[0.5,0.6]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0.7,0.9],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0,0],[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \end{bmatrix}$$

Tanım 4.2.18 [54] (K, A), X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı bir aralık değerli neutrosophic esnek küme olsun.

$$(K, A) = \{\langle x, [T^-_{K(e)}(x), T^+_{K(e)}(x)], [I^-_{K(e)}(x), I^+_{K(e)}(x)], [F^-_{K(e)}(x), F^+_{K(e)}(x)]\rangle : \ x \in X, \ e \in E\}$$

$x \in X$ elemanının (K, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümesine ortalama olası üyelik derecesi aşağıdaki formül yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{3}\left[\frac{T^-_{K(e)}(x) + T^+_{K(e)}(x)}{2} + 1 - \frac{I^-_{K(e)}(x) + I^+_{K(e)}}{2} + 1 - \frac{F^-_{K(e)}(x) + F^+_{K(e)}}{2}\right] \\ &= \frac{T^-_{K(e)}(x) + T^+_{K(e)}(x) + 4 - I^-_{K(e)}(x) - I^+_{K(e)}(x) - F^-_{K(e)}(x) - F^+_{K(e)}(x)}{6} \end{aligned}$$

Örnek 4.2.18 Örnek 4.2.16 deki (M, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümesini göz önüne alalım. $\langle x_2x_3, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6], [0.7, 0.8]\rangle \in M(e_3)$ elemanının ortalama olası üyelik derecesi aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
S_{e_3}(x_2x_3) &= \frac{T^-_{K(e_3)}(x_2x_3) + T^+_{K(e_3)}(x_2x_3) + 4 - I^-_{K(e_3)}(x_2x_3) - I^+_{K(e_3)}(x_2x_3) - F^-_{K(e_3)}(x_2x_3) - F^+_{K(e_3)}(x_2x_3)}{6} \\
&= \frac{0.3 + 0.4 + 4 - 0.5 - 0.6 - 0.7 - 0.8}{6} = \frac{2.1}{6} \\
&= 0.35
\end{aligned}
$$

4.3 Aralık Değerli Neutrosophic Esnek Grafların Karar Verme Problemine Uygulanışı

Bu bölümde aralık değerli neutrosophic esnek graf kavramını bir karar verme problemine uygulayarak problemin çözümü için uygun bir algoritma geliştirmeye çalıştık.

Varsayalım ki bir iş adamı yatırım amaçlı bir futbol kulübü satın almayı veya bir kulübün hisselerine ortak olmayı düşünüyor. $V = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ ile iş adamının yatırım yapmayı düşündüğü takımların kümesini gösterelim. Bu takımları üç parametreye göre değerlendirdiğini düşünelim ve parametre kümesini $A = \{e_1 = \text{takımın performansı}, e_2 = \text{takımın statüsü}, e_3 = \text{takımın değeri}\}$ şeklinde ele alalım.

$(K, A) = \{K(e_1), K(e_2), K(e_3)\}$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi, V kümesindeki beş takımın A kümesindeki her bir parametreye göre futbol konusunda ilgili bir uzmanın görüşleri doğrultusunda elde edilmiş değerlerini göstersin.

$$
\begin{aligned}
K(e_1) = \{&\langle t_1, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.3, 0.5]\rangle, \langle t_2, [0.2, 0.5], [0.4, 0.7], [0.5, 0.8]\rangle,\\
&\langle t_3, [0.5, 0.6], [0.6, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle, \langle t_4, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.1, 0.3]\rangle,\\
&\langle t_5, [0.5, 0.6], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3]\rangle\}\\
K(e_2) = \{&\langle t_1, [0.3, 0.4], [0.4, 0.7], [0.1, 0.2]\rangle, \langle t_2, [0.3, 0.5], [0.2, 0.3], [0.1, 0.2]\rangle,\\
&\langle t_3, [0.7, 0.8], [0.5, 0.6], [0.4, 0.5]\rangle, \langle t_4, [0.2, 0.4], [0.1, 0.2], [0.8, 0.9]\rangle,\\
&\langle t_5, [0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.6, 0.7]\rangle\}\\
K(e_3) = \{&\langle t_1, [0.2, 0.3], [0.3, 0.5], [0.2, 0.4]\rangle, \langle t_2, [0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.5, 0.7]\rangle,\\
&\langle t_3, [0.6, 0.7], [0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\rangle, \langle t_4, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.6, 0.7]\rangle,\\
&\langle t_5, [0.1, 0.2], [0.4, 0.5], [0.5, 0.6]\rangle\}
\end{aligned}
$$

$(M, A) = \{M(e_1), M(e_2), M(e_3)\}$ aralık değerli neutrosophic esnek kümesi, (K, A) daki değerleri de dikkate alarak $E = \{t_1t_2, t_1t_3,, t_1t_4, t_1t_5, t_2t_3, t_2t_4, t_2t_5, t_3t_4, t_3t_5, t_4t_5\}$ kümesindeki takımların ikişerli olarak A kümesindeki her bir parametreye göre aralarındaki ilişkiyi ifade eden, futbol konusunda ilgili bir uzmanın görüşleri doğrultusunda elde edilmiş değerlerini göstersin.

$$\begin{aligned}
M(e_1) = \{ & \langle t_1t_2, [0.1, 0.2], [0.6, 0.8], [0.6, 0.9] \rangle, \langle t_1t_5, [0.1, 0.2], [0.8, 0.9], [0.4, 0.6] \rangle, \\
& \langle t_2t_3, [0.1, 0.4], [0.8, 0.9], [0.6, 0.9] \rangle, \langle t_2t_4, [0.2, 0.3], [0.7, 0.8], [0.7, 0.9] \rangle, \\
& \langle t_2t_5, [0.1, 0.3], [0.8, 0.9], [0.5, 0.8] \rangle, \langle t_3t_4, [0.2, 0.3], [0.7, 0.8], [0.2, 0.4] \rangle, \\
& \langle t_3t_5, [0.3, 0.4], [0.7, 0.9], [0.5, 0.6] \rangle \} \\
M(e_2) = \{ & \langle t_1t_2, [0.1, 0.2], [0.6, 0.8], [0.6, 0.9] \rangle, \langle t_1t_3, [0.1, 0.3], [0.6, 0.8], [0.5, 0.6] \rangle, \\
& \langle t_1t_5, [0.1, 0.2], [0.6, 0.8], [0.8, 0.9] \rangle, \langle t_2t_3, [0.3, 0.4], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6] \rangle, \\
& \langle t_2t_5, [0.3, 0.4], [0.4, 0.5], [0.7, 0.8] \rangle, \langle t_3t_4, [0.2, 0.3], [0.6, 0.7], [0.8, 0.9] \rangle, \\
& \langle t_4t_5, [0.1, 0.3], [0.4, 0.6], [0.8, 0.9] \rangle \} \\
M(e_3) = \{ & \langle t_1t_2, [0.1, 0.2], [0.4, 0.6], [0.6, 0.8] \rangle, \langle t_1t_3, [0.2, 0.3], [0.5, 0.6], [0.4, 0.5] \rangle, \\
& \langle t_1t_5, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.6, 0.7] \rangle, \langle t_2t_3, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6], [0.7, 0.8] \rangle, \\
& \langle t_2t_4, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5], [0.8, 0.9] \rangle, \langle t_2t_5, [0.1, 0.2], [0.7, 0.8], [0.8, 0.9] \rangle, \\
& \langle t_3t_4, [0.1, 0.2], [0.6, 0.7], [0.6, 0.8] \rangle, \langle t_4t_5, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6], [0.7, 0.8] \rangle \}
\end{aligned}$$

$H(e_1) = (K(e_1), M(e_1))$, $H(e_2) = (K(e_2), M(e_2))$ ve $H(e_3) = (K(e_3), M(e_3))$ aralık değerli neutrosophic graflarının sırasıyla e_1, e_2 ve e_3 parametrelerine göre matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$H(e_1) = \begin{bmatrix}
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.4,0.6] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.7,0.9] \rangle & \langle [0.1,0.3],[0.8,0.9],[0.5,0.8] \rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.2,0.4] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.7,0.9],[0.5,0.6] \rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.7,0.9] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.7,0.8],[0.2,0.4] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.4,0.6] \rangle & \langle [0.1,0.3],[0.8,0.9],[0.5,0.8] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.7,0.9],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle
\end{bmatrix}$$

$$H(e_2) = \begin{bmatrix}
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0.1,0.3],[0.6,0.8],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.8,0.9] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.6,0.7],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8] \rangle \\
\langle [0.1,0.3],[0.6,0.8],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.6,0.7],[0.5,0.6] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.3],[0.4,0.6],[0.8,0.9] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.7,0.8] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.3],[0.4,0.6],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle
\end{bmatrix}$$

$$H(e_3) = \begin{bmatrix}
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.4,0.6],[0.6,0.8] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.5,0.6],[0.4,0.5] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.6,0.7] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.4,0.6],[0.6,0.8] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.7,0.8] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.4,0.5],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.7,0.8],[0.8,0.9] \rangle \\
\langle [0.2,0.3],[0.5,0.6],[0.4,0.5] \rangle & \langle [0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.7,0.8] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.6,0.7],[0.6,0.8] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle \\
\langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.2,0.3],[0.4,0.5],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.6,0.7],[0.6,0.8] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.7,0.8] \rangle \\
\langle [0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.6,0.7] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.7,0.8],[0.8,0.9] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle & \langle [0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.7,0.8] \rangle & \langle [0,0],[0,0],[0,0] \rangle
\end{bmatrix}$$

Matris formunda gösterdiğimiz $\{H(e_1), H(e_2), H(e_3)\}$ aralık değerli neutrosophic esnek alt graflarına parametrik $\vee-$ birleşim ve parametrik $\wedge-$ arakesit işlemleri uygulandıktan sonra elde edilen sonuç matrisleri aşağıdaki gibidir.

$\tilde{G}$ nin $H(e)$ alt graflarının parametrik $\vee-$ birleşiminin matris formunda gösterimi:

$$H_{\bigvee}(e) = \begin{bmatrix} \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.4,0.6],[0.6,0.8]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.4,0.6]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.4,0.6],[0.6,0.8]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.5,0.8]\rangle \\ \langle[0.2,0.3],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.2,0.4]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0,0],[0,0]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.2,0.3],[0.6,0.7],[0.2,0.4]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.3],[0,0],[0,0]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.5,0.6],[0.4,0.6]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.4,0.5],[0.5,0.8]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.3],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \end{bmatrix}$$

$\tilde{G}$ nin $H(e)$ alt graflarının parametrik $\wedge-$ arakesitinin matris formunda gösterimi:

$$H_{\bigwedge}(e) = \begin{bmatrix} \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0.6,0.8],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.8,0.9]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.6,0.8],[0.6,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.7,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.8,0.9]\rangle \\ \langle[0,0],[0.6,0.8],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0.1,0.4],[0.8,0.9],[0.7,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0.7,0.9],[0.5,0.6]\rangle \\ \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.7,0.8],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle & \langle[0,0],[0.5,0.6],[0.8,0.9]\rangle \\ \langle[0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.1,0.2],[0.8,0.9],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0.7,0.9],[0.5,0.6]\rangle & \langle[0,0],[0.5,0.6],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0,0],[0,0],[0,0]\rangle \end{bmatrix}$$

$\tilde{G}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafının $H(e)$ alt graflarına parametrik $\vee-$ birleşim ve parametrik $\wedge-$ arakesit işlemleri uygulandıktan sonra elde edilen sonuç matrislerindeki her bir elemanın ortalama olası üyelik derecesi hesaplanarak tercih değerleri skor tabloları aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 4.20: $H_{\vee}(e)$ nin tercih değerlerinin skor tablosu

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	${h'}_{t_k}$
t_1	0.667	0.317	0.750	0.667	0.367	2.767
t_2	0.317	0.667	0.417	0.750	0.417	2.567
t_3	0.750	0.417	0.667	0.433	0.783	3.050
t_4	0.667	0.750	0.433	0.667	0.733	3.250
t_5	0.367	0.417	0.783	0.733	0.667	2.967

Tablo 4.21: $H_{\wedge}(e)$ nin tercih değerlerinin skor tablosu

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	${h''}_{t_k}$
t_1	0.667	0.233	0.250	0.667	0.150	1.967
t_2	0.233	0.667	0.200	0.133	0.150	1.383
t_3	0.250	0.200	0.667	0.183	0.217	1.517
t_4	0.667	0.133	0.183	0.667	0.200	1.850
t_5	0.150	0.150	0.217	0.200	0.667	1.383

Burada her iki skor tablosunda tercih değerlerini yanyana (veya alt alta) toplayarak 5 farklı skor elde ediyoruz. Yani $k \in \Lambda$ olmak üzere her bir takım için h'_{t_k} ve h''_{t_k} şeklinde iki farklı değer elde edilir. Bu değerlerinin aritmetik ortalamasını aldıktan sonra elde edilen sonuçlardan maksimum olanı bize karar verme problemi için en uygun tercihi verecektir.

Tablo 4.22: h'_{t_k}, h''_{t_k} ve bu ikisinin aritmetik ortalaması h_{t_k}

	h'_k	h''_k	h_k
t_1	2.767	1.967	2.367
t_2	2.567	1.383	1.975
t_3	3.050	1.517	2.283
t_4	3.250	1.850	2.550
t_5	2.967	1.383	2.175

En son elde ettiğimiz skor tablosundaki h_{t_k} değerlerini dikkate aldığımızda $k \in \Lambda$ için $maks\ h_{t_k} = 2.550$ olduğundan alternatifler arasından en uygun tercih t_4 takımıdır.

Karar verme problemimizin çözümü için geliştirdiğimiz algoritmanın her adımı aşağıdaki gibidir.

Algoritma:

1) Karar verme problemine esas olan alternatifleri V kümesinin elemanları olarak ve alternatiflerin kriter bazında ikili karşılaştırılmasını E kümesinin elemanları olarak göster.
2) Problemin hangi ölçütlere göre değerlendirileceğini gösteren A parametre kümesini oluştur.
3) V ve E nin elemanlarının, A daki parametrelere göre üyelik değer aralıklarını içeren (K, A) ve (M, A) aralık değerli neutrosophic esnek kümelerini belirle.
4) $\tilde{G} = (G^*, K, M, A)$ aralık değerli neutrosophic esnek grafını oluştur.
5) $\tilde{G}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafının parametrik $\vee-$ birleşimi ve parametrik $\wedge-$ arakesit değerlerini hesapla ve matris formunda göster.
6) $\tilde{G}$ aralık değerli neutrosophic esnek grafının parametrik $\vee-$ birleşim ve parametrik $\wedge-$ arakesit matrislerindeki her elemanın tercih değerlerini hesapladıktan sonra bu değerleri iki farklı skor tablosunda göster ve bu skorları yanyana veya alt alta topla.
7) Madde 6. da elde edilen en son skorların aritmetik ortalamasını al.
8) Aritmetik ortalama sonrasında elde edilen değerler göz önüne alındığında bu değerlerin maksimum olanı karar verme problemi için en uygun tercih olacaktır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok teori geliştirilmiştir. Bu teorilerden bazıları olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi ve esnek küme teorisidir. Bu teoriler ortaya atıldıktan kısa bir zaman sonra birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve birçok alana uygulanmıştır. Benzer şekilde belirsizliğe başka bir yaklaşım olan neutrosophic esnek kümelerde bu yönde ilerlemektedir. Aralık değerli neutrosophic esnek küme teorisi ise belirsizliklerle başa çıkma konusunda mevcut teorilerin sahip olduğu zorlukların üstesinden gelebilmesi bakımından kullanışlı bir matematiksel araç olduğu gözlemlenmiştir. Bir graf ise nesneler arasındaki ilişkiyi içeren bilgilerin ifade edilebilmesi açısından önem arz etmektedir. Graf kavramı matematikte farklı cebirsel yapılara uygulanmış ve bu yapılar üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Bu tez yapı itibariyle ilk olarak karar verme uygulamalarında mevcut belirsizliklerle başa çıkabilmede önemli bir matematiksel araç olan aralık değerli neutrosophic esnek kümeleri ele almaktadır. İkinci olarak aralık değerli neutrosophic esnek kümelerin graf yapısına uygulanabilirliğini göstererek, aralık değerli neutrosophic esnek graf yapısını inşa etmek suretiyle yeni tanımlar ve sonuçlar elde etmeye yöneliktir.

Bu tezde biz aralık değerli neutrosophic esnek kümeleri graf yapısı üzerinde ele aldık ve aralık değerli neutrosophic esnek graf yapısını inceledik. Ayrıca aralık değerli neutrosophic esnek grafların bir karar verme problemindeki uygulamasını değerlendirerek yeni sonuçları elde etmeye çalıştık.

Yaptığımız çalışmada elde ettiğimiz başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Literatürde mevcut olan neutrosophic esnek graf kavramındaki eksiklikler giderilerek yeniden tanımlanmış, neutrosophic esnek kümelerde "$\cup_N$", "$\sqcup_N$", "$\cap_N$", "$\sqcap_N$", "$\times_N$" gibi yeni ikili işlemler verilerek neutrosophic esnek graflar için bu ikili işlemlerin buradaki etkileri incelenmiştir. (Tanım 2.1.20, 2.1.21, 2.1.22, 2.1.23, 2.1.24, 2.2.27, 2.2.28, 2.2.29, 2.2.30, Teorem 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4)

2. Aralık değerli neutrosophic kümelerdeki ikili işlemler yardımıyla, aralık değerli neutrosophic graflar için bu ikili işlemlerin buradaki etkileri incelenmiştir. (Tanım 3.1.5, 3.2.4, 3.2.6, 3.2.7, Teorem 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5)

3. Aralık değerli neutrosophic esnek kümeler üzerinde "$\tilde{\subseteq}$", "$\tilde{\cup}$", "$\tilde{\sqcup}$", "$\tilde{\cap}$", "$\tilde{\sqcap}$", "$\tilde{\bigvee}$", "$\tilde{\bigwedge}$" ve "$\tilde{\times}$" sıralama bağıntıları ve ikili işlemleri verilerek bunlara ait bazı özel sonuçlar elde edilmiştir. (Tanım 4.1.4, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.9, 4.1.10, 4.1.11, 4.1.12, 4.1.13, Önerme 4.1.1, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, Teorem 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, Sonuç 4.1.1, 4.1.2)

4. Aralık değerli neutrosophic esnek graf yapısı üzerinde yeni cebirsel işlemler verilerek bunlara ait özellikler incelenmiş, elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. (Tanım 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.9, 4.2.13, 4.2.14, Teorem 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.9)

5. Aralık değerli neutrosophic esnek graflardaki "parametrik $\bigvee -$ birleşim" ve "parametrik $\bigwedge -$ arakesit" işlemleri yardımıyla bir algoritma oluşturulmuş, bu algoritmanın bir karar verme problemi üzerinde uygulanmasıyla bir çözüm yöntemi geliştirilmiştir.

6. Aralık değerli neutrosophic esnek grafların hem teori hem de uygulama anlamında önemli sonuçları ortaya koyduğu gösterilmiştir.

Elde ettiğimiz sonuçlar sonrasında başlıca önerilerimiz şunlardır:

1. Neutrosophic esnek graflar yardımıyla klasik grafların özellikleri incelenebilir.

2. Aralık değerli neutrosophic esnek kümeler farklı cebirsel yapılar üzerinde yeniden değerlendirilip bu yapılara ait özellikleri incelenebilir. Bu şekilde birçok matematiksel yapı gerek neutrosophic esnek kümeler gerekse aralık değerli neutrosophic esnek kümeler üzerinde yeniden ele alınabilir.

3. Aralık değerli neutrosophic esnek graflar, bu alanda çalışan diğer araştırmacılara tanıtılarak farklı bilim dalları ile ortak çalışmalar yapılması hedeflenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Akram, M., & Nawaz, S. (2015). Operations on Soft Graphs. *Fuzzy Information and Engineering*, 7(4), 423–449.

[2] Akram, M., & Dudek, W.A. (2011). Interval-valued Fuzzy Graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 289–299.

[3] Akram, M., & Nawaz, S. (2016). Fuzzy Soft Graphs with Applications. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 30(6), 3619–3632.

[4] Akram, M., & Sitara, M. (2017). Single-valued neutrosophic graph structures. *Applied Mathematics E-Notes*, 17, 277–296.

[5] Akram, M., & Shahzadi, S. (2017). Neutrosophic soft graphs with application. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 32, 841–858.

[6] Aktaş, H., & Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177, 2726–2735.

[7] Ali, M., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547–1553.

[8] Ali, M., Deli, I., & Smarandache, F. (2016). The theory of neutrosophic cubic sets and their applications in pattern recognition. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 30(4), 1957–1963

[9] Ali, M., & Smarandache, F. (2016). Complex Neutrosophic Set. *Neural Computing and Applications*, 27(1), doi:10.1007/s00521-015-2154-y.

[10] Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 87–96.

[11] Atanassov, K, T., & Gargov, G. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 31, 343–349.

[12] Bhattacharya, P. (1987). Some Remarks on Fuzzy Graphs. *Pattern Recognition Letters.* 6, 297–302.

[13] Bhutani, K. R., & Rosenfeld, A. (2003). Fuzzy end nods in fuzzy graphs. *Information Sciences*, 152, 323–326.

[14] Broumi, S. (2013). Generalized Neutrosophic Soft Set. *International Journal of Computer Science, Engineering and Information Technology*, 3(2), 17–30.

[15] Broumi, S., & Smarandache, F. (2013). Intuitionistic Neutrosophic Soft Set. *Journal of Information and Computing Science*, 8(2), 130–140.

[16] Broumi, S., Talea, M., Bakali, A., & Smarandache F. (2016). On Bipolar Single Valued Neutrosophic Graphs. *Journal of New Theory*, 11, 84–102.

[17] Broumi, S., Talea, M., Bakali, A., & Smarandache, F. (2016). Single Valued Neutrosophic Graphs. *Journal of New Theory*, 10, 86–101.

[18] Broumi, S., Talea, M., Bakali, A., & Smarandache, F. (2016). Interval valued Neutrosophic Graphs. SISOM & ACOUSTICS Conference, 12-13 May, Bucharest, Romania, 79–91.

[19] Broumi, S., Smarandache, F., Talea, M., & Bakali, A. (2016). *Operations on interval valued Neutrosophic Graphs.* viXra:1612.0120.

[20] Broumi, S., Talea, M., Bakali, A., & Smarandache, F. (2016). Decision-making Method Based On The Interval valued Neutrosophic Graph. *Future Technologies Conference*, 6-7 December, IEEE, San Francisco, United States.

[21] Chen, D., Tsang, E. C. C., & Yeung, D. S. (2003). Some notes on the parameterization reduction of soft sets. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics* 3 July, China, 1442–1445.

[22] Craine, W. L. (1994). Characterization of Fuzzy Interval Graphs. *Fuzzy Sets and Systems*, 68, 181–193

[23] Çelik, Y. (2018). On Bipolar Fuzzy Soft Graphs. *Creative Mathematics and Informatics*, 27(2), 123–132.

[24] Deli, I. (2015). Interval-valued Neutrosophic Soft Sets and Its Decision Making. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8, 1–12

[25] Dhavaseelan, R., Vikramaprasad, R., & Krishnaraj, V. (2015). Certain Types of Neutrosophic Graphs. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 5(2), 333–339.

[26] Euler, L. (1736). Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, 128–140.

[27] Gorzalczany, M.B. (1987). A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 21, 1–17.

[28] Gorzalczany, M.B. (1989). An interval-valued fuzzy inference method some basic properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 31, 243–251.

[29] Grattan-Guiness, I. (1975). Fuzzy Membership Mapped Onto Interval and Many-valued Quantities. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 22, 149–160

[30] Gross, J. T., & Yellen, J. (2005). Graph Theory and Its Applications. 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 800 pp.

[31] Hussain, A., & Shabir, M. (2015). Algebraic Structures of Neutrosophic Soft Sets. *Neutrosophic Sets and Systems*, 7, 53–61.

[32] Imrich, W., Klavzar, S., & Rall, F. (2008). Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Products. *A K Peters. Ltd.*, Wellesley, MA, 219 pp.

[33] Jahn, K. U. (1975). Intervall-wertige Mengen, Mathematische Nachrichten, 68(1), 115–132.

[34] Vasantha Kandasamy, W.B., Ilanthenral, K. & Smarandache, F. (2015). Neutrosophic Graphs: A New Dimension to Graph Theory. EuropaNova, USA, 124 pp.

[35] Karataş, S., & Kuru C. (2016). Neutrosophic Topology. *Neutrosophic Sets and Systems*, 13, 90–96

[36] Lupiañez, F. G. (2009). Interval Neutrosophic Sets and Topology. *Kybernetes*, 38, 3(4), 621–624.

[37] Maji P. K. (2013). Neutrosophic soft set. *Annals of Fuzzy mathematics and Informatics*, 5(1), 157–168.

[38] Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A.R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(1), 555–562.

[39] Maji, P.K., Roy, A.R., & Biswas, R., (2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(1), 1077–1083.

[40] Majumdar, P., & Samanta, S. K. (2010). Generalised Fuzzy Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(4), 1425–1432

[41] Mohinta, S., & Samanta, T. K. (2015). An Introduction to Fuzzy Soft Graph. *Mathematica Moravica*, 19(2), 35–48.

[42] Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory - First Results. *Compututers and Mathematics with Applications*, 37, 19–31.

[43] Molodtsov, D. (2004). *The Theory of Soft Sets.*, URSS Publishers, Moscow.

[44] Molodtsov, D., Leonov, V. Y., & Kovkov, D.V. (2006). Soft Sets Technique and Its Application. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya*, 1(1), 8–39.

[45] Mordeson J. N., & Peng, C. S. (1994). Operations on fuzzy graphs. *Information Sciences*, 79, 159–170.

[46] Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*, 11(1), 341–356.

[47] Rosenfeld, A. (1975). Fuzzy graphs, (in: Zadeh, L. A., Fu, K. S., Tanaka K., Shimura, M. Eds.) *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*, Academic Press, New York, 77–95.

[48] Samanta, T. K., & Mohinta, S. (2014). Generalized Strong Intuitionstic Fuzzy Hypergraph. *Mathematica Moravica*, 18(1), 55–65.

[49] Sambuc, R. (1975). Fonctions $\phi-$ floues. Application l'aide au diagnostic en pathologie thyroidienne. Ph. D. Thesis Univ. Marseille, France.

[50] Shah, N. (2016). Some Studies in Neutrosophic Graphs. *Neutrosophic Sets and Systems*, 12, 54–64

[51] Shah, N., & Hussain, A. (2016). Neutrosophic Soft Graphs. *Neutrosophic Sets and Systems*, 11, 31–44.

[52] Smarandache, F. (2005). Neutrosophic set - a generalization of the intuitionistic fuzzy set. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 24(3), 287–297.

[53] Sunitha, M. S., & Vijayakumar, A. (2002). Complement of a fuzzy graph. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33(9), 1451–1464.

[54] Şahin, R. (2017). Cross-entropy measure on interval neutrosophic sets and its applications in multicriteria decision making. *Neural Computing and Applications*, 28 (5), 1177–1187

[55] Şahin, R., & Küçük, A. (2014). Generalised Neutrosophic Soft Set and its Integration to Decision Making Problem. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 8(6), 2751–2759.

[56] Şahin, R., & Küçük, A. (2014). On Similarity and Entropy of Neutrosophic Soft Sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27(5), 2417–2430.

[57] Thumbakara, R. K., & George, B. (2014). Soft graphs. *General Mathematics Notes*, 21(2), 75–86.

[58] Vasudev, C. (2006). Graph theory with applications. *New Age International Publishers*, New Delhi, India.

[59] Wang, H., Smarandache F., Zhang, Y.Q., & Sunderraman, R. (2005). Interval Neutrosophic Sets and Logic: Theory and Applications in Computing. Hexis, Phoenix, Arizona, USA, Neutrosophic book series, No: 5.

[60] Wang, H., Smarandache F., Zhang, Y.Q., & Sunderraman, R. (2010). Single valued neutrosophic sets. *Multispace and Multistructure*, 4, 410–413

[61] Wang, H., Zhang, Y., & Sunderraman, R. (2005). *Truth-value based interval neutrosophic sets.* Granular Computing, IEEE International Conference, 1, 274–277, doi: 10.1109/GRC.2005.1547284.

[62] Yang, H. L., Guo, Z.L., She, Y. H., & Liao, X. W. (2016). On single valued neutrosophic relations. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 30(2), 1045–1056.

[63] Yang, X., Lin, T. Y., Yang, J., Li, Y., & Yu, D. (2009). Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3), 521–527.

[64] Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338–353.

[65] Zadeh, L. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I., *Information Science*, 8, 199–249.

[66] Zhang, H. Y., Wang, J. Q., & Chen, X. H. (2014). Interval neutrosophic sets and their application in multicriteria decision making problems. *The Scientific World Journal*, doi:10.1155/2014/ 645953.

[67] Zihni, O., Çelik, Y., & Kara, G. (2017). Interval-Valued Fuzzy Soft Graphs. *Topological Algebra and its Applications*, 5(1), 19–27.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Güven KARA
Doğum Yeri	**:**	Tonya / TRABZON
Doğum Tarihi	**:**	31/07/1986
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	guvenkara@yahoo.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniv. Fen Edebiyat Fak. Matematik Böl. ORDU

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik Bölümü	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans	Matematik A.B.D.	Ordu Üniversitesi	2015

Yayınlar :

1. Kara, G. and Çelik, Y., **“**On Neutrosophic Soft Graphs”, AIP Conference Proceedings, 1833, 020-029, (2017).

2. Zihni, O., Çelik, Y. and Kara, G., “Interval-Valued Fuzzy Soft Graphs”, Topological Algebra and Its Applications, 5, 19-27, (2017).

3. Çelik, Y. and Kara, G., “Combination of interval-valued neutrosophic soft sets and graph theory”, New Trends in Mathematical Sciences, 6(2), 84-96, (2018).

4. Çelik, Y. and Kara, G., “An application of interval-valued neutrosophic soft graphs in a decision making problem”, New Trends in Mathematical Sciences, 6(4), 67-76, (2018).