第 37 卷 第 3 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 3
2016 年 5 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) May 2016

文章编号:1007-2985(2016)03-0001-03

2 个 Smarandache 函数的混合均值估计*

黄 炜

(宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘 要:设 n 是正整数,$u_r(n)$ 表示不小于 n 的最小 r 角形数部分数列,$v_r(n)$ 表示大于 n 的最大 r 角形数部分数列,$a(n)=n-u_r(n)$,$b(n)=v_r(n)-n$. 研究了 2 个 Smarandache 函数 $S(n)$ 和 $SL(n)$ 分别与 $a(n)$ 和 $b(n)$ 的混合均值,并用解析方法得到几个较强的渐近公式.

关键词:Smarandache 函数;r 角形数;均值;渐近公式

中图分类号:O156.4 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.cnki.jdxb.2016.03.001

公元前 600 年,毕达哥拉斯学派研究整数时,发现能用正三角形、正四角形、正五角形等图形上的点表示数,即这些数目的点子可以排成一个 r 角形,这样就将整数与几何图形联系起来,创建了三角形数、四角形、五角形数和六角形数等 r 角形数. r 角形数可表示为[1] $S(m,r)=\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))$, $r\geqslant 3$, m, $r\in\mathbf{N}^+$, $S(m,r)$ 即为第 m 个 r 角形数.

定义 1 对于任意正整数 n,r 角形数上、下部数列定义如下:

$$v_r(n)=\min\left\{m+\frac{1}{2}m(m-1)(r-2): n\leqslant m+\frac{1}{2}m(m-1)(r-2), m,r\in\mathbf{N}^+, r\geqslant 3\right\},$$

$$u_r(n)=\max\left\{m+\frac{1}{2}m(m-1)(r-2): n\geqslant m+\frac{1}{2}m(m-1)(r-2), m,r\in\mathbf{N}^+, r\geqslant 3\right\},$$

且 r 角形数上、下部数列的补数数列为 $a(n)=n-u_r(n)$, $b(n)=v_r(n)-n$.

定义 2 对于任意的正整数 $n>1$,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式,则

$$S(n)=\min\{m: n\mid m!, m\in\mathbf{N}\}, SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\},$$

其中 $S(n)$ 为著名的 Smarandache 函数,$SL(n)$ 为著名的 F. Smarandache LCM 函数.

已有学者研究了 r 角形数列的补数数列性质,获得不少有趣的结果[2-8]. 笔者利用初等方法及解析方法,研究函数 $a(n)$ 和 $b(n)$ 与 2 个数论函数 $S(n)$、$SL(n)$ 的复合函数 $S(a(n))$ 和 $S(b(n))$、$SL(a(n))$ 和 $SL(b(n))$ 的均值分布.

引理 1[3] 对于任意实数 $n>1$,设 $u_r(n)=\frac{1}{2}(m+m(m-1)(r-2))$,或 $v_r(n)=\frac{1}{2}((m+1)+m(m+1)(r-2))$,则有 $m=\frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2}+O(1)$.

引理 2[4] 对于任意实数 $x>1$,有

* 收稿日期:2015-10-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省自然科学基金资助项目(09JK432)

作者简介:黄 炜(1961—),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院基础部教授,主要从事数论研究.

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)=\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x),\sum_{n\leqslant x}b(n)=\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x).$$

引理 3[5] 设 $n\in\mathbf{N}^{+}$,对于任意实数 $x>1$,有 $\sum\limits_{n\leqslant x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)$.

引理 4[6] 设 $n\in\mathbf{N}^{+}$,对于任意实数 $x>1$,有 $\sum\limits_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)$.

定理 1 设 $k\in\mathbf{N}^{+}$,对于任意实数 $x>1$,有:

(ⅰ) $\sum\limits_{n\leqslant x}S(n)a(n)=\frac{8\sqrt[4]{2}\pi^2}{63(r-2)^{\frac{5}{4}}}\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln 2x}+O\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln^2 2x}\right)$;

(ⅱ) $\sum\limits_{n\leqslant x}S(n)b(n)=\frac{8\sqrt[4]{2}\pi^2}{63(r-2)^{\frac{5}{4}}}\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln 2x}+O\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln^2 2x}\right)$.

证明 对于任意实数 $x>1$,令 M 是最大的正整数,且

$$\frac{1}{2}(2M+M(M-1)(r-2))<x<\frac{1}{2}(2(M+1)+M(M+1)(r-2)).$$

由引理 1 可知,$M=\frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}+O(1)$,并注意到 $\ln M=\frac{1}{2}\ln x+O(1)$.

若 n 取遍区间 $\left[\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2)),\frac{1}{2}(2(m+1)+m(m+1)(r-2))\right]$,则 $a(n)$ 取遍区间 $[0,(r-2)m]$ 时,由 $a(0)=0$ 与引理 2 可以推断如下:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}S(n)a(n)=&\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{i\leqslant(r-2)m}S(n)a(n)+O\left(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)}S(i)a(n)\right)=\sum_{m=1}^{M-1}S(m)\sum_{i\leqslant(r-2)m}a(i)+\\&O\left(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)}S(i)a(n)\right)=\sum_{m=1}^{M-1}S(m)\left(\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}m^{\frac{3}{2}}+O(m)\right)+\\&O\left(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)}S(i)a(n)\right)=\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}\sum_{m=1}^{M-1}S(m)m^{\frac{3}{2}}+\\&O(S(M)M^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

$S(n)\ll n^{\varepsilon}$,这里 ε 为一固定的整数.

令 $A(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}S(n)$,用 able 求和公式[2] 与引理 3,易得

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{M}t^{\frac{3}{2}}S(t)=&M^{\frac{3}{2}}A(M)-\int_2^M A(t)\,(t^{\frac{3}{2}})'\mathrm{d}t+O(1)=M^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{n\leqslant x}S(n)\right)-\int_2^M\left(\sum_{n\leqslant x}S(n)\right)\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\\&M^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{M^2}{\ln M}+O\left(\frac{M^2}{\ln^2 M}\right)\right)-\frac{3}{2}\int_2^M\left(\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\ln t}+O\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 t}\right)\right)\mathrm{d}t=\\&\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{M^{\frac{7}{2}}}{\ln M}+O\left(\frac{M^{\frac{7}{2}}}{\ln^2 M}\right)-\frac{3}{7}\left(\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{M^{\frac{7}{2}}}{\ln M}\right)=\\&\frac{\pi^2}{21}\cdot\frac{M^{\frac{7}{2}}}{\ln M}+O\left(\frac{M^{\frac{7}{2}}}{\ln^2 M}\right).\end{aligned}$$

因 $M=\frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}+O(1)$,且 $\ln M=\frac{1}{2}\ln x+O(1)$,可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}S(n)a(n)=&\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}\frac{\pi^2}{21}\cdot\frac{1}{\ln\sqrt{\frac{2x}{r-2}}}\left(\sqrt{\frac{2x}{r-2}}\right)^{\frac{7}{2}}+O\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{2x}{r-2}}\right)^{\frac{7}{2}}}{\ln^2\sqrt{\frac{2x}{r-2}}}\right)=\\&\frac{8\sqrt[4]{2}\pi^2}{63\,(r-2)^{\frac{5}{4}}}\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln 2x}+O\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln^2 2x}\right).\end{aligned}$$

定理 1 中(ⅰ)的证明完毕. 用类似的方法可给出定理 1 中(ⅱ)的证明.

定理 2　设 $k \in \mathbf{N}^{+}$,对于任意实数 $x > 1$,有:

(ⅰ) $\sum_{n \leqslant x} SL(n) a(n) = \frac{8\sqrt[4]{2}\pi^2}{63(r-2)^{\frac{5}{4}}} \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln 2x} + O\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln^2 2x}\right)$;

(ⅱ) $\sum_{n \leqslant x} SL(n) b(n) = \frac{8\sqrt[4]{2}\pi^2}{63(r-2)^{\frac{5}{4}}} \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln 2x} + O\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln^2 2x}\right)$.

用与证明定理 1 相同的方法并结合引理 4 可给出定理 2 的证明.

参考文献:

[1] FLORENTIN SMARANDACHE. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] TOM M APOSTOL. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.
[3] 黄　炜. 关于 r 角形数的部分数列及其均值[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2010, 35(1): 15-18.
[4] 黄　炜. 关于 r 角形数的补数及其均值性质[J]. 科学技术与工程, 2009, 9(18): 5 432-5 434.
[5] WANG Yongxing. On the Smarandache Function[M]// Research on Smarandache Preoblems in Number Theory. USA: Hexis, 2005: 103-106.
[6] LÜ Zhongtian. On the F. Smarandache LCM Function and Its Mean Value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.
[7] 李　洁. 关于正整数的六边形数的补数部分[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2006, 23(6): 818-820.
[8] PAN Chengdong, PAN Chengbiao. Foundation of Analytic Number Theory[M]. Beijing: Science Press, 1997.

Mean-Value Estimate for Two Smarandache Hybrid Functions

HUANG Wei
(Department of Basic Courses, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, Shaanxi Chian)

Abstract: Let n be a positive integer, $u_r(n)$ be the smallest r angular number greater than or equal to n, and $v_r(n)$ be the largest r angular number less than or equal to n. Let: $a(n) = n - u_r(n)$, $b(n) = v_r(n) - n$. The hybrid mean value formulas involving two Smarandache functions $S(n)$ and $SL(n)$ with $a(n)$ and $b(n)$ are studied, and several sharper asymptotic formulas are given by using the analytic methods.

Key words: Smarandache function; r-ngular number; mean value; asymptotic formula

(责任编辑　向阳洁)