F. Smarandache的一个问题

王　阳

(南阳师范学院数学系, 河南 南阳　473061)

摘要:　设 n是正整数, $a(n)$表示 n的三次方幂补数. 本文的主要目的是研究 $a(n)$和$\frac{a(n)}{n}$的 k次均值性质, 解决 F. Smarandache教授提出的第 28个问题, 并用解析方法给出两个有趣的渐近公式.

关键词:　补数; 均值; 渐近公式

1　前言及结论

对任一正整数 n, 显然它可唯一的表示为 $n = u^3v^2w$, 其中 u是正整数, v, w均为无平方因子数, 且 $(v, w) = 1$. 设 $a(n)$表示 n的三次方幂补数, 即 $a(n)$表示使 nk成为一三次方幂的最小正整数 k, 则 $a(n) = vw^2$.

在文献 [2]的第 28个问题中, F. Smarandache教授要求我们研究数例 $\{a(n)\}$的性质. 关于这一问题, 本文的作者已进行初步研究, 用初等方法得到 $\sum_{n\le x} a(n)$ 的渐近公式:

$$\sum_{n\le x} a(n) = \frac{\zeta(5)\zeta(9)}{3\zeta(2)\zeta(10)} x^3 \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p+1)(p^5+1)}\right) + O\left(x^{\frac{5}{2}}\right)$$

其中, $\zeta(s)$是 Riemann Zeta-函数.

本文的主要目的是用解析方法进一步研究 $k \geq 1$时 $\sum_{n\le x} a^k(n)$ 及 $\sum_{n\le x}\left(\frac{a(n)}{n}\right)^k$ 的渐近性质, 得到两个渐近公式. 具体就是:

定理 1　对任意的实数 $x > e$及 $k \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x} a^k(n) = \frac{\zeta(2+3k)\zeta(3+6k)}{(2k+1)\zeta(2)\zeta(4+6k)} x^{2k+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{(1+p)(1+p^{2+3k})}\right) + O(x^{2k+\frac{1}{2}}\log x)$$

其中, $\zeta(s)$是 Riemann Zeta-函数, $\prod_p$表示对所有的素数 p求积.

定理 2　对任意的实数 $x > e$及 $k \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\left(\frac{a(n)}{n}\right)^k = \frac{\zeta(2+3k)\zeta(3+6k)}{(1+k)\zeta(2)\zeta(4+6k)} x^{1+k} \prod_p \left(1 - \frac{1}{(1+p)(1+p^{2+3k})}\right) + O(x^{x+\frac{1}{2}}\log x)$$

其中, $\zeta(s)$是 Riemann Zeta-函数, $\prod_p$表示对所有的素数 p求积.

2　引理及证明

设 $s = \sigma + it$为复变量, $\zeta(s)$为 Riemann Zeta-函数. 实数 $k \geq 1$, p为素数.

引理 1　设 ε是任意正常数, 当 $\sigma > 1 + 2k$时, 定义 $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^k(n)}{n^s}$. 则

收稿日期: 2001-11-27

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目 (2000LS05)

1) $A(s)$在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant 1+2k+\varepsilon$有界且解析.

2) $A(s)=\frac{\zeta(3s)\zeta(s-2k)}{\zeta(2s-4k)}h(s)$, 其中 $h(s)$在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant 2k+\frac{1}{2}+\varepsilon$有界且解析.

证明　1) 因为 $a^k(n)\ll n^{2k}$,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^k(n)}{n^s}$在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant 2k+1+\varepsilon$绝对一致收敛,故 $A(s)$在 $\mathrm{Re}s\geqslant 2k+1+\varepsilon$有界且解析.

2) 显然,$a(n)$是积性函数,且对素数 p 有:

$$a(p^m)=\begin{cases} p^2, & m\equiv 1(mod\,3),\\ p, & m\equiv 2(mod\,3),\\ 1, & m\equiv 0(mod\,3),\end{cases}$$

于是,当 $\sigma>2k+1$时,有

$$\begin{aligned}A(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^k(n)}{n^s}=\prod_p\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^k(p^m)}{p^{ms}}\right)=\prod_p\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^{2k}}{p^{(3t+1)s}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^k}{p^{(3t+2)s}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{p^{3ts}}\right)\\ &=\prod_p(1-p^{-3s})^{-1}(1+p^{-(s-2k)}+p^{-(2s-k)})\\ &=\zeta(3s)\prod_p(1+p^{-(s-2k)})\left(1+\frac{1}{p^{2s-k}+p^{s+k}}\right)\\ &=\frac{\zeta(3s)\zeta(s-2k)}{\zeta(2s-4k)}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{2s-k}+p^{s+k}}\right)\end{aligned}$$

显然 $\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{2s-k}+p^{s+k}}\right)$在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant 2k+\frac{1}{2}+\varepsilon$绝对一致收敛,从而在此区域定义了一个有界且解析的函数 $h(s)$. 引理 1得证.
同理可证.

引理 **2**　设 ε是任意正整数,则

1) $A(s+k)$在 $\mathrm{Re}s\geqslant 1+k+\varepsilon$有界且解析.

2) $A(s+k)=\frac{\zeta(3s+3k)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s+k)$,其中 $h(s+k)$在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant k+\frac{1}{2}+\varepsilon$有界且解析.

3　定理的证明

首先给出定理 1的证明

显然 $a^k(n)\ll n^{2k}$,且当 $\sigma>2k+1$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^k(n)}{n^{\sigma}}=\frac{\zeta(3\sigma)\zeta(\sigma-2k)}{\zeta(2\sigma-4k)}h(\sigma)\ll 1$. 于是,对 $b=2k+1+\frac{1}{\log x}$, $T\geqslant 1$及半奇数 x,根据 Perron公式,有

$$\sum_{n\leqslant x}a^k(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\zeta(3s)\zeta(s-2k)}{\zeta(2s-4k)}h(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^b}{T}\right)+O\left(\frac{x^{2k+1}\log x}{T}\right)$$

取 $a=2k+\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}$,改变积分路线,得

$$\sum_{n\leqslant x}a^k(n)=u(x)+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}\right)\frac{\zeta(3s)\zeta(s-2k)}{\zeta(2s-4k)}h(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{2k+1}\log x}{T}\right)$$

其中 $u(x)$是被积函数 $A(s)\frac{x^s}{s}$在 $s=2k+1$处的一阶留数,不难算出:

$$u(x)=\frac{\zeta(3+6k)h(2k+1)}{(2k+1)\zeta(2)}x^{2k+1}$$

其中, $h(2k+1)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{2+3k}+p^{1+3k}}\right)=\frac{\zeta(2+3k)}{\zeta(4+6k)}\prod_p\left(1-\frac{1}{(1+p)(1+p^{2+3k})}\right)$

又由引理1知

$$\left(\int_{b-iT}^{a-iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}\right)\frac{\zeta(3s)\zeta(s-2k)}{\zeta(2s-4k)}h(s)\frac{x^s}{s}ds\ll\frac{x^b}{T}+\frac{x^aT^{\frac{1}{2}}}{T}\ll\frac{x^{2k+1}}{T}$$

$$\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{\zeta(3s)\zeta(s-2k)}{\zeta(2s-4k)}h(s)\frac{x^s}{s}ds\ll\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}+iT\right)\right|\frac{x^a}{T}dt$$

$$\ll\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)\right|\frac{x^a}{T}ds$$

$$\ll x^a\log T\ll x^{2k+\frac{1}{2}}\log T$$

从而

$$\sum_{n\le x}a^k(n)=\frac{\zeta(2+3k)\zeta(3+6k)}{(2k+1)\zeta(2)(4+6k)}x^{2k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{(1+p)(1+p^{2+3k})}\right)+O\left(\frac{x^{2k+1}\log x}{T}\right)+O(x^{2k+\frac{1}{2}}\log T)$$

取 $T=x^{\frac{1}{2}}$,即得

$$\sum_{n\le x}a^k(n)=\frac{\zeta(2+3k)\zeta(3+6k)}{(2k+1)\zeta(2)\zeta(4+6k)}x^{2k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{(1+p)(1+p^{2+3k})}\right)+O(x^{2k+\frac{1}{2}}\log x)$$

定理1证毕.

定理2的证明

取 $b=k+1+\frac{1}{\log x}$, $T\geq 1$, x 为半奇数. 根据 perron公式,有

$$\sum_{n\le x}\left(\frac{a(n)}{n}\right)^k=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s+k)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^b}{T}\right)+O\left(\frac{x^{1+k}\log x}{T}\right)$$

取 $a=k+\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}$,改变积分路线,可得

$$\sum_{n\le x}\left(\frac{a(n)}{n}\right)^k=\operatorname*{Res}_{s=k+1}\frac{\zeta(3s+3k)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s+k)\frac{x^s}{s}+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}\right)\frac{\zeta(3s+3k)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s+k)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{k+1}\log x}{T}\right)$$

容易算出:

$$\operatorname*{Res}_{s=k+1}\frac{\zeta(3s+3k)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s+k)\frac{x^s}{s}$$

$$=\frac{\zeta(2+3k)}{(k+1)}\frac{\zeta(3+6k)}{\zeta(2)\zeta(4+6k)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{(1+p)(1+p^{2+3k})}\right)$$

引理2知:

$$\left(\int_{b-iT}^{a-iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}\right)\frac{\zeta(3s+3k)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s+k)\frac{x^s}{s}ds\ll\frac{x^{1+k}}{T}$$

$$\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{\zeta(3s+3k)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s+k)\frac{x^s}{s}ds\ll x^a\log T\ll x^{k+\frac{1}{2}}\log T$$

取 $T=x^{\frac{1}{2}}$,即得

$$\sum_{n\leq x}\left(\frac{a(n)}{n}\right)^k = \frac{\Gamma(2+3k)\Gamma(3+6k)}{(k+1)\Gamma(2)\Gamma(4+6k)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{(1+p)(1+p^{2+3k})}\right) + O(x^{k+\frac{1}{2}}\log x)$$

定理 2证毕.

鸣谢 感谢张文鹏教授的精心指导.

参考文献:

[1] Apostol Tom M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York Spring-Verlag, 1976.

[2] Smarandache F. Only Problems Not Solutions[M]. Chicago Xiquan PUblishing House, 1993.

[3] 刘红艳,荀素 . 关于 F. Smarandache的一个问题 [J]. 延安大学学报, 2001, 3 5- 6.

[4] 潘承洞,潘承彪 . 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

A Problem of F. Smaranadche

WANG Yang

(Department of Mathematics, Nanyang Teacher's College, Henan 473061, China)

Abstract Let n be a postive integer, $a(n)$ be the cubic complement of n. The main purpose of this paper is to study the properties of $\sum_{n\leq x} a^k(n)$ and $\sum_{n\leq x}\left(\frac{a(n)}{n}\right)^k$, and solve the 28-th problem genertated by professor of F. Smarandache, and using analytic method give two interesting asymptotic formulas.

Keywords complement; mean value; asymptotic formula