第 45 卷第 8 期
2015 年 4 月

数学的实践与认识
MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY

Vol.45, No. 8
Apr., 2015

Fermat 数的 Smarandache 函数值的下界

刘妙华 [1], 金英姬 [2]

(1. 空军工程大学 理学院, 陕西 西安 710051)
(2. 西藏民族学院 教育学院, 陕西 咸阳 712082)

摘 要: 对于正整数 n, 设 $\mathrm{F}_n = 2^{2^n} + 1$ 是第 n 个 Fermat 数, 又设 $S(F_n)$ 是 F_n 的 Smarandache 函数. 运用初等的方法证明了：当 $n \geq 4$ 时 $S(F_n) \geq 4 \cdot 2^n(4n+9)+1$.

关键词: Fermat 数; Smarandache 函数; 下界

1 引言

设 N 是全体正整数的集合. 对于正整数 m, 设

$$S(m) = \min\{t \,| m \setminus t!, t \in \mathrm{N}\} \tag{1}$$

称为 m 的 Smarandache 函数. 近几年来, 人们对于此类数论函数及其推广形式的性质进行了广泛的研究 (见文 [1-7]). 本文将讨论 Fermat 数的 Smarandache 函数的下界.

对于正整数 n, 设 $\mathrm{F}_n = 2^{2^n} + 1$ 是第 n 个 Fermat 数. 对此, 文 [8] 证明了：当 $n \geq 3$ 时, $S(F_n) \geq 8 \cdot 2^n + 1$. 最近, 文 [9] 进一步证明了：当 $n \geq 3$ 时, $S(F_n) \geq 12 \cdot 2^n + 1$. 本文运用初等方法对 $S(F_n)$ 的下界给出了本质上的改进, 即证明了：

定理 当 $n \geq 4$ 时,

$$S(F_n) \geq 4(4n+9) \cdot 2^n + 1 \tag{1.2}$$

2 若干引理

引理 2.1 如果实数 x 和 y 适合 $3 \leq x < y$, 则必有

$$\frac{\log(y+1)}{\log(x+1)} < \frac{\log y}{\log x} \tag{2.1}$$

证明 对于实数 x, 设

$$f(z) = \frac{\log(z+1)}{\log z} \tag{2.2}$$

由于当 $z \geq 3$ 时, $f(z)$ 连续可导, 而且从 (2.2) 可知

$$f'(z) = \frac{z\log z - (z+1)\log(z+1)}{z(z+1)(\log z)^2} < 0, z \geq 3 \tag{2.3}$$

所以根据函数单调性的判别条件 (见文 [10] 的定理 5.9), 从 (2.3) 可知 $f(z)$ 在 $z \geq 3$ 时是单调递减的. 因此, 当 $3 \leq x < y$ 时, 必有

$$\frac{\log(y+1)}{\log y} < \frac{\log(x+1)}{\log x} \tag{2.4}$$

收稿日期: 2013-03-19

从 (2.4) 可知此时 (2.1) 成立. 引理证完.

引理 2.2 Fermat 数 F_n 的素因数 p 都满足 $p \equiv 1(\mathrm{mod} 2^{n+2})$.

证明 参见文 [11] 的定理 3.7.2.

另外, 以下有关 Smarandache 函数的三个引理的证明可参见文 [12].

引理 2.3 如果 $m = p_1^{r_1} \cdots, p_k^{r_k}$ 正整数 m 的标准分解式, 则

$$S(m) = \max\{S(p_1^{r_1}), \cdots, S(p_k^{r_k})\}$$

引理 2.4 对于素数 p 必有 $S(p) = p$.

引理 2.5 如果 x 和 y 适合 $x < y$ 的正整数, 则对于素数 p 必有 $S(p^x) \leq S(p^y)$.

3 定理的证明

首先讨论 Fermat 数 F_n 的最大素因数的下界. 设 n 是适合 $n \geq 4$ 的正整数, 又设

$$F_n = p_1^{r_1} \cdots p_k^k \tag{3.1}$$

是 F_n 的标准分解式, 其中 $p_1, \cdots, p_k$ 是适合

$$p_1 < \cdots < p_k \tag{3.2}$$

的奇素数, $r_1, \cdots, r_k$ 是正整数. 因为从引理 2.2 可知

$$p_i \equiv 1(\mathrm{mod} 2^{n+2})(i = 1, \cdots, k)$$

故有

$$p_i = 2^{n+2} s_i + 1, s_i \in \mathrm{N}, i = 1, \cdots, k \tag{3.3}$$

而且从 (3.2) 和 (3.3) 可知

$$s_1 < \cdots < s_k \tag{3.4}$$

从 (3.1) 和 (3.3) 可知

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \geq (2^{n+2} + 1)^{r_1 + \cdots + r_k} \tag{3.5}$$

从 (3.5) 可得

$$r_1 + \cdots + r_k \leq \frac{\log(2^{2^n} + 1)}{\log(2^{n+2} + 1)} \tag{3.6}$$

由于当 $n \geq 4$ 时, $2^{2^n} > 2^{n+2} > 3$, 所以根据引理 2.1 可知

$$\frac{\log(2^{2^n} + 1)}{\log(2^{n+2} + 1)} < \frac{\log 2^{2^n}}{\log 2^{n+2}}$$

故从 (3.6) 可得

$$r_1 + \cdots + r_k \leq \frac{2^n}{n+2} \tag{3.7}$$

另一方面, 从 (3.3) 可知

$$p_i^{r_i} \equiv (2^{n+2} s_i + 1)^{r_i} \equiv 2^{n+2} s_i r_i + 1(\mathrm{mod} 2^{2n+4}), (i = 1, \cdots, k) \tag{3.8}$$

因为当 $n \geq 4$ 时, 必有 $2^n > 2n + 4$, 所以从 (3.1) 和 (3.8) 可得

$$1 \equiv 2^{2^n} + 1 \equiv F_n \equiv \prod_{i=1}^{k} (2^{n+2} s_i r_i + 1) \equiv 1 + 2^{n+2} \sum_{i=1}^{k} s_i r_i (\mathrm{mod} 2^{2n+4}) \tag{3.9}$$

从 (3.9) 立得

$$\sum_{i=1}^{k} s_i r_i \equiv 0(\bmod 2^{n+2}) \tag{3.10}$$

由于同余关系 (3.10) 的左边是正整数, 故从 (3.10) 可知

$$\sum_{i=1}^{k} s_i r_i \geq 2^{n+2} \tag{3.11}$$

又从 (3.4) 和 (3.11) 可得

$$s_k \sum_{i=1}^{K} r_i \geq 2^{n+2} \tag{3.12}$$

结合 (3.7) 和 (3.12) 可知

$$s_k > \frac{2^{n+2}(n+2)}{2^n} = 4n+8 \tag{3.13}$$

因为 s_k 是正整数, 所以从 (3.13) 可得 $s_k \geq 4n+9$. 于是, 从 (3.2), (3.3) 和 (3.13) 可知 F_n 的最大素因数 p_k 满足

$$p_k = 2^{n+2}s_k + 1 \geq 2^{n+2}(4n+9)+1 \tag{3.14}$$

最后证明下界 (1.2) 的正确性. 根据引理 2.3, 从 F_n 的标准分解式 (3.1) 可知

$$S(F_n) = \max\{S(p_1^{r_1}), \cdots, S(p_k^{r_k})\} \tag{3.15}$$

又从引理 2.4 和 2.5 可知

$$S(p_i^{r_i}) \geq S(p_i) = p_i, i = 1, \cdots, k \tag{3.16}$$

因此, 从 (3.2), (3.15) 和 (3.16) 可得

$$S(F_n) \geq \max\{S(p_1), \cdots, S(p_k)\} = \max\{p_1, \cdots, p_k\} = p_k \tag{3.17}$$

于是, 从 (3.14) 和 (3.17) 立得 (1.2). 定理证完.

参考文献

[1] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[2] 徐哲峰. Smarandache 幂函数的均值 [J]. 数学学报, 2006, 49(1): 77-80.

[3] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[4] 李洁. 一个包含 Smarandache 原函数的方程 [J]. 数学学报, 2007, 50(2): 333-336.

[5] 马金萍, 刘宝利. 一个包含 Smarandache 函数的方程 [J]. 数学学报, 2007, 50(5): 1185-1190.

[6] 朱伟义. 一个包含 F.Smarandache LCM 函数的猜想 [J]. 数学学报, 2008, 51(5): 955-958.

[7] 贺艳峰, 潘晓玮. 一个包含 F.Smarandache LCM 函数的方程 [J]. 数学学报, 2008, 51 (4) : 779-786.

[8] Wang J R. On the Smarandache function and the Fermat number [J]. Scientia Magna, 2008, 4(2): 25-28.

[9] 朱敏慧. 关于 Smarandache 函数与费尔马数 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2010, 40(4): 583-585.

[10] 邓东皋, 尹小玲. 数学分析简明教程, 上册 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

[11] 孙琦, 郑德勋, 沈仲琦. 快速数论变换 [M]. 北京, 科学出版社, 1980.

[12] Balacenoiu I, Seleacu V. History of the Smarandache function [J]. Smrandache Notions J, 1999, 10(1): 192-201.

A Lower Bound for the Values of Smarandache Function of Fermat Numbers

LIU Miao-hua[1], JIN Ying-ji[2]

(1. School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

(2. School of Education, Xizang University for Nationalities, Xiangyang 712082, China)

Abstract: For any positive integer$n$, Let $F_n = 2^{2^n} + 1$ be the$n$-th Fermat number, and let $S(F_n)$ denote the Smarandache function of F_n. In this paper, using some elementary methods, we prove that if $n \geq 4$, then $S(F_n) \geq 4(4n + 9)2^n + 1$.

Keywords: Fermat number; Smarandache function; lower bound