DOI:10.16112/j.cnki.53-1223/n.2008.06.002
第33卷 第6期 昆明理工大学学报(理工版) http://www.kustjournal.com/ Vol.33 No.6
2008年12月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Dec. 2008

Pseudo_Smarandache_Squarefree函数及其它的均值

樊旭辉[1,2], 周 航[2]
(1.武警工程学院 基础部,陕西 西安 710086; 2.西北大学 数学系,陕西 西安 710069)

摘要:对于任意正整数 n,Pseudo_Smarandache_Squarefree函数 $Z_w(n)$ 定义为 $Z_w(n)=\min\{m: n \mid m^n, m\in N\}$. 应用初等方法研究 $Z_w(n)$ 的值的分布性质,并给出两个较强的渐进公式.

关键词:Pseudo_Smarandache_Squarefree函数 $Z_w(n)$; Mangoldt函数 $\Lambda(n)$;均值;渐进公式
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1007-855X(2008)06-0117-03

Pseudo—Smarandache—Squarefree Function and Its Value Distribution

FAN Xu-hui[1,2], ZHOU Hang[2]
(1. Foundation Department, Engineering College of Armed Police Force, Xi'an 710086, China;
2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: For any positive integer n, the Pseudo—Smarandache—Squarefree function $Z_w(n)$ is defined as $Z_w(n)=\min(m: n \mid m^n, m\in N)$. The main purpose of the paper is to study the arithmetical properties of $Z_w(n)$ by the elementary methods, and to offer two sharper asymptotic formulae for it.

Key words: Pseudo—Smarandache—Squarefree function $Z_w(n)$; Mangoldt function $\Lambda(n)$; mean value; asymptotic formula

1 预备知识

对于任意的正整数 n,Pseudo_Smarandache_Squarefree函数 $Z_w(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 $n \mid m^n$,即:

$$Z_w(n)=\min\{m: n \mid m^n, m\in N\}.$$

例如:$Z_w(1)=1$, $Z_w(2)=2$, $Z_w(3)=3$, $Z_w(4)=4$, $Z_w(5)=5$, $Z_w(6)=6$, $Z_w(7)=7$, ….

关于 $Z_w(n)$ 的初等性质,许多学者进行过研究,取得了一系列研究成果. 例如,Felice Russo[1] 对 $Z_w(n)$ 进行了研究,得出关于 $Z_w(n)$ 的一些性质:

性质1 对于任意的素数 p 及正整数 k 我们有 $Z_w(p^k)=p$.

性质2 对于任意的正整数 n 我们有 $Z_w(n)\le n$.

本文的主要目的是研究 $Z_w(n)$ 的值的分布问题,并给出一个较强的渐进公式,具体而言就是证明了下面的结论:

定理1 设 $k\ge 2$ 为给定的整数,则对任意实数 $x\ge 2$,我们有渐进公式:

$$\sum_{n\le x} p(n)\cdot Z_w(n)=x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right).$$

其中 b_i ($i=1,2,3\cdots,k$) 为常数,且 $b_1=\frac{1}{3}$. $p(n)$ 表示 n 的最小素因子.

定理2 设 $k\ge 2$ 为给定的整数,则对任意实数 $x\ge 2$,我们有渐进公式

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\cdot Z_w(n)=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1} x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)$$

收稿日期:2008-03-20. 基金项目:国家自然科学基金资助项目(项目编号:10271093).

第一作者简介:樊旭辉(1975-),男,讲师. 主要研究方向:数论. E-mail: xuhuifan2050@163.com

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 $c_i(i=1,2,3\cdots,k)$为常数,且 $c_1=\frac{1}{2}$. $\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p & 若\ n=p^\alpha,\ p为素数,\ \alpha\ge 1,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

2 定理的证明

在这一部分,我们用初等方法给出定理的证明.

我们先证明定理1.事实上在和式 $\sum_{n\le x}p(n)\circ Z_w(n)$ 中我们将区间 $[1,x]$ 分为三个集合 A、B和 C. A: $n=1$; B: $n=p^\alpha\le x$,其中 p为素数,$\alpha\ge 1$; C: $n=p^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,其中 p和 p_i为素数,$p(n)=p$, $s\ge 1$, $\alpha\ge 1$, $\alpha_i\ge 1(i=1,2,3,\cdots,s)$.

注意到 $Z_w(1)=1$, $p(1)=0$,我们有:

$$\sum_{n\le x}Z_w(n)=1+\sum_{n\in B}Z_w(n)+\sum_{n\in C}Z_w(n) \tag{1}$$

由性质1我们知如果 $n\in B$,我们有:

$$\sum_{n\in B}p(n)\circ Z_w(n)=\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 1}}pZ_w(p^\alpha)=\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 1}}p^2=\sum_{p\le x}p^2+\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}p^2 \tag{2}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$,于是利用 Able求和公式(参阅[2]中定理4.2)及素数定理(参阅[3]中定理3.2):

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $a_i(i=1,2,3,\cdots,k)$为常数,且 $a_1=1$.我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}p^2&=x^2\pi(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}2t\pi(t)\,dt\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x^3}{\ln^i x}-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i t^2}{\ln^i t}+O\left(\frac{t^2}{\ln^{k+1}t}\right)\right]dt+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\\&=x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $b_i(i=1,2,3,\cdots,k)$为常数,且 $b_1=\frac{1}{3}$.

现在我们估计集合 B中的误差项.注意到 $\pi(x)\le x$,我们有:

$$\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}p^2\ll\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{2}}}p^2\ll x\pi(x^{\frac{1}{2}})\ln x\ll x^{\frac{3}{2}}\ln x \tag{4}$$

结合(2)、(3)和(4)式,我们有:

$$\sum_{n\in B}p(n)\circ Z_w(n)=x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right) \tag{5}$$

注意到当 $n\in C$时有 $p(n)<\sqrt{n}$.由性质(1)、(2)我们有:

$$\sum_{n\in C}p(n)\circ Z_w(n)\ll\sum_{n\le x}p(n)\circ Z_w(n)\ll\sum_{n\le x}n\circ\sqrt{n}\ll x^{\frac{5}{2}} \tag{6}$$

结合(1)、(5)、(6)我们有:

$$\sum_{n\le x}p(n)\circ Z_w(n)=x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$

这样我们就证明了定理1.

下面我们证明定理2.

由性质1和 $\Lambda(n)$的定义我们有:

$$\sum_{n\in B}\Lambda(n)\circ Z_w(n)=\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 1}}p\circ\ln p=\sum_{p\le x}p\circ\ln p+\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}p\circ\ln p \tag{7}$$

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x} p\cdot\ln p &= x\ln x\,\pi(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\ln t+1)\pi(t)\,dt\\ &=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x^2}{\ln^{i-1}x}-\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\ln t+1)\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i t}{\ln^{i} t}+O\left(\frac{t}{\ln^{k+1}t}\right)\right]dt+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k}x}\right)\\ &=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k}x}\right)\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$为常数, 且 $c_1=\dfrac{1}{2}$.

现在我们估计集合 B中的误差项. 我们有:

$$\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}} p\ln p\ll\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{2}}} p\ln p\ll x^{\frac{1}{2}}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\ln x^{\frac{1}{2}}\ll x\ln^2 x\tag{9}$$

结合(8)、(9)我们有:

$$\sum_{n\in B}\Lambda(n)\cdot Z_w(n)=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k}x}\right)\tag{10}$$

显而易见当 $n=A$或 $n\in C$时, $\Lambda(n)=0$. 因此我们有:

$$\sum_{n\in A}Z_w(n)+\sum_{n\in C}Z_w(n)=0\tag{11}$$

结合(10)和(11), 我们很容易得出下列渐进式:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\cdot Z_w(n)=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k}x}\right)$$

这样我们就证明了定理 2.

参考文献:

[1] FELICE RUSSO. A SET of New Smarandache Function, Sequences and Conjectures in Number Theory[M]. Lupton USA: American Research Press, 2000.

[2] TOM M APOSTOL. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Spinger-Verlag, 1976.

[3] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科技出版社, 1988.

本刊影响因子 5年来持续增长

据中国科学文献计量评价中心(清华同方)发布的《中国学术期刊综合引证年度报告(2008)》,《昆明理工大学学报(理工版)》2007年的影响因子达到 0.535, 总被引频次达到 704, 分别比 2006年增长 20.2%和 18.3%。

通过对本刊 2002~2007年的影响因子、被引频次的统计(见附表), 5年中的年均增长率分别达到 39.6%和 45.8%。另外, 本刊的被引频次中, 近两年的他引率达到到 94%~96%, 表明本刊自引比例很低, 影响因子具有很高的客观真实性。

附表 2002~2007年本刊影响因子、被引频次及他引率

年　度	2002	2003	2004	2005	2006	2007	年均增长率/%
影响因子	0.1008	0.3326	0.343	0.400	0.445	0.535	39.6
被引频次	107	263	408	527	595	704	45.8
他 引 率	0.91	0.77	0.90	0.92	0.96	0.94	—

(学报编辑部供稿)

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net