Smarandache 3n 数字数列及其渐近性质

苟　素

(西安邮电学院 理学院,陕西 西安 710121)

摘　要: 数列$\{a_n\}=\{13, 26, 39, 412, 515, 618, 721, 824, \cdots\}$称为 Smarandache 3$n$ 数字数列,该数列中的每一个数都可以分成两部分,使得第 2 部分是第 1 部分的 3 倍. 利用初等方法研究了 Smarandache 3n 数字数列的渐近性质,给出一个有趣的渐近公式.

关键词: Smarandache 3n 数字数列; 初等方法; 渐近公式

中图分类号: O 156.4　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1001-8735(2010)06-0563-02

1　引言及结论

对任意正整数 n,著名的 Smarandache 3n 数字数列$\{a_n\}$ 定义为$\{a_n\}=\{13, 26, 39, 412, 515, 618, 721, 824, \cdots\}$,该数列的每一个数都可以分为两部分,使得第 2 部分是第 1 部分的 3 倍. 例如,$a_{12}=1\,236$, $a_{20}=2060$, $a_{41}=41123$, $a_{333}=333\,999$, $\cdots$. 这一数列是著名数论专家 F. Smarandache 教授在文献[1] 和文献[2] 中提出的,同时他建议人们研究该数列的性质. 关于这一问题,已引起不少学者的注意,并得到一些研究成果[3-5]. 在文献[5] 中,张文鹏教授猜测Smarandache 3n 数字数列中可能没有完全平方数,虽然文献[5] 没有完全解决这一猜想,但证明了以下结论:

(a) 当 n 为无平方因子数时,a_n 不可能是完全平方数;

(b) 当 n 为完全平方数时,a_n 不可能是完全平方数;

(c) 如果 a_n 是一个完全平方数,那么有 $n=2^{2\alpha_1}\cdot 3^{2\alpha_2}\cdot 5^{2\alpha_3}\cdot 11^{2\alpha_4}\cdot n_1$,其中$(n_1, 330)=1$.

这些结论为猜想的正确性提供了重要依据,揭示了研究该问题的一些思路和方法,从另一方面显示出 Smarandache 3n 数字数列的一些内在性质. 关于这一数列前 n 项的求和问题是有意义的,也就是说是否存在 $a_1+a_2+\cdots+a_N$ 的一个确切的求和公式或者渐近公式?经过简单推导和计算,我们可以给出一个复杂的计算公式,其结果与 N 的确切形式有关,但是形式并不理想,而且从中不能得到主要部分,即不能得到渐近公式. 于是,我们考虑了均值 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_N$ 的渐近性问题,利用初等方法及整数的进位性质证明了下面结论.

定理　对任意充分大的正整数 N,有渐近公式 $\sum\limits_{n\leqslant N}\ln a_n=2N\cdot\ln N+O(N)$.

2　定理的证明

首先考虑 a_n 的结构,设 n 为k 位数,即 $n=b_kb_{k-1}\cdots b_2b_1$,其中 $1\leqslant b_k\leqslant 9$, $0\leqslant b_i\leqslant 9$ $(i=1, 2, \cdots, k-1)$. 于是由乘法的进位法则可知,当 $\underbrace{333\cdots3}_{k-1}4\leqslant n\leqslant\underbrace{333\cdots3}_{k}$ 时,3n 为k 位数;当$\underbrace{333\cdots3}_{k}4\leqslant n\leqslant\underbrace{333\cdots33}_{k+1}$ 时,3n 为$k+1$ 位数. 由 a_n 的定义立刻得到$a_n=n\cdot(10^k+3)$,或 $a_n=n\cdot(10^{k+1}+3)$. 对任意充分大的正整数 N,显然存在正整数 M,使得

$$\underbrace{333\cdots33}_{M}<n\leqslant\underbrace{333\cdots33}_{M+1}. \tag{1}$$

于是由前面的分析,我们有恒等式

收稿日期: 2010-07-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071194); 陕西省教育厅资助项目(08JK433)

作者简介: 苟　素(1972—),女,陕西凤翔人,西安邮电学院副教授,主要从事基础数学的教学与研究,E-mail: gs1013@xupt.edu.cn.

$$\prod_{1\leqslant n\leqslant N} a_n = \prod_{n=1}^{3} a_n \cdot \prod_{n=4}^{33} a_n \cdot \cdots \cdot \prod_{n=\frac{1}{3}(10^{M-1}-1)+1}^{\frac{1}{3}(10^M-1)} a_n \cdot \prod_{n=\frac{1}{3}(10^M-1)+1}^{N} a_n =$$

$$N!(10+3)^3 \cdot (100+3)^{30} \cdot \cdots \cdot (10^M+3)^{3\cdot 10^{M-1}} \cdot (10^{M+1}+3)^{N-\frac{1}{3}(10^M-1)}. \quad (2)$$

注意到当 $x \to 0$ 时,有估计式 $\ln(1+x) = x + O(x^2)$,所以

$$\sum_{k=1}^{M} \ln(10^k+3)^{3\cdot 10^{k-1}} = \sum_{k=1}^{M} 3\cdot 10^{k-1} \cdot \left(k \cdot \ln 10 + \frac{3}{10^k} + O\left(\frac{1}{10^{2k}}\right)\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{M} k \cdot 10^{k-1} \cdot 3\ln 10 + \frac{9}{10}M + O(1) =$$

$$\frac{1}{3}M \cdot 10^M \cdot \ln 10 - \frac{1}{27}(10^M-1) \cdot \ln 10 + \frac{9}{10}M + O(1) = \frac{1}{3}M \cdot 10^M \cdot \ln 10 + O(N). \quad (3)$$

$$\ln(10^{M+1}+3)^{N-\frac{1}{3}(10^M-1)} = \left(N - \frac{1}{3}(10^M-1)\right) \cdot \ln(10^{M+1}+3) =$$

$$\left(N - \frac{1}{3}(10^M-1)\right) \cdot (M+1) \cdot \ln 10 + O(1) = N \cdot M \cdot \ln 10 - \frac{1}{3} \cdot M \cdot 10^M \cdot \ln 10 + O(N). \quad (4)$$

应用 Euler 求和公式[6] 或定积分的性质,容易得到

$$\ln(N!) = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \ln n = N \cdot \ln N - N + O(1). \quad (5)$$

注意到(1)式,不难得出估计式 $10^M < N \leqslant 10^{M+1}$,或者

$$\ln N = M \cdot \ln 10 + O(1). \quad (6)$$

结合恒等式(2)及渐近公式(3)~(6),立刻得到渐近公式

$$\sum_{n\leqslant N} \ln a_n = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \ln n + \sum_{k=1}^{M} \ln(10^k+3)^{3\cdot 10^{k-1}} + \ln(10^{M+1}+3)^{N-\frac{1}{3}(10^M-1)} = 2N \cdot \ln N + O(N).$$

于是定理得证. 显然,这个渐近公式还比较粗糙,是否存在更精确的渐近公式,还有待于进一步研究.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Smarandache F. Sequences of Numbers Involved in Unsolved Problems[M]. Hexis, 2006.

[3] 闫晓霞. Smarandache LCM 函数与其对偶函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报:自然科学汉文版, 2010, 39(3): 229-231.

[4] 朱敏慧. 关于 F. Smarandache 简单函数与 Dirichlet 除数和函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报:自然科学汉文版, 2010, 39(5): 441-443.

[5] Nan Wu. On the Smarandache 3n-digital sequence and the Zhang Wenpeng's conjecture[J]. Scientia Magna, 2008, 4(4): 120-122.

[6] Tom M. Apostol. Introduction to Analytical Number Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

The Smarandache 3*n*-Digital Sequence and Its Some Asymptotic Properties

GOU Su

(*School of Science, Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, Xi'an* 710121, *China*)

Abstract: The sequences $\{a_n\} = \{13, 26, 39, 412, 515, 618, 721, 824, \cdots\}$ is called the Smarandache 3*n*-digital sequence. That is, the numbers that can be partitioned into two groups such that the second is three times bigger than the first. The main purpose of this paper is using the elementary method to study the asymptotic properties of the Smarandache 3*n*-digital sequence, and give an interesting asymptotic formula.

Key words: the Smarandache 3*n*-digital sequence; elementary method; asymptotic formula

【责任编辑 陈汉忠】