第 27 卷第 4 期　　纺 织 高 校 基 础 科 学 学 报　　Vol. 27, No. 4
2014 年 12 月　　BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES　　Dec., 2014

文章编号:1006-8341(2014)04-0428-03

Smarandache Ceil 函数的均值

吴成晶

(西安航空学院 理学院,陕西 西安 710077)

摘要:Smarandache 函数的相关性质是初等数论和解析数论研究的一个重要问题. 本文利用初等方法给出了 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 与 n 的 k 次补数函数 $a_k(n)$ 之间的关系式 $(S_k(n))^k = a_k(n)\cdot n$,再利用解析方法给出了 $S_k(n)$ 一个渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(n) = \frac{\zeta(2k-1)}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}-\frac{1}{p^{2k-1}+p^{2k-2}}\right)+O(x^{3/2+\varepsilon}).$$

关键词:k 阶补数;k 阶 Smarandache Ceil 函数;初等方法;解析方法;渐近公式

中图分类号:O 156.4　　**文献标识码**:A

1　引言及结论

对任意正整数 n 及任意给定的整数 $k\geqslant 2$,n 的 k 次补数 $a_k(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得乘积 $m\cdot n$ 为完全 k 次方幂[1]. 例如当 $k=2$ 时,$a_2(n)$ 的前几个值为 $a_2(1)=1$,$a_2(2)=2$,$a_2(3)=3$,$a_2(4)=1$,$a_2(5)=5$,$a_2(6)=6$,$a_2(7)=7$,$a_2(8)=2$,$a_2(9)=1$. k 阶 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为 $S_k(n)=\min\{x: x\in N, n\mid x^k\}$. 例如当 $k=2$ 时,$S_2(1)=1$,$S_2(2)=2$,$S_2(3)=3$,$S_2(4)=2$,$S_2(5)=5$,$S_2(6)=6$,$S_2(7)=7$;当 $k=3$ 时,$S_3(1)=1$,$S_3(2)=2$,$S_3(3)=3$,$S_3(4)=2$,$S_3(5)=5$,$S_3(6)=6$.

著名数论专家 Smarandache 教授在文献[2]中引入 Smarandache Ceil 函数,并建议研究其各种性质. Ibstedt 已经证明了 Smarandache Ceil 函数的可乘性[3-4],即

$$(a,b)=1\Rightarrow S_k(ab)=S_k(a)S_k(b).$$

关于 Smarandache Ceil 函数的其他相关研究参见文献[5-9].

一般的,当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式时,有

$$S_k(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r})=S_k(p_1^{\alpha_1})S_k(p_2^{\alpha_2})S_k(p_3^{\alpha_3})\cdots S_k(p_r^{\alpha_r}).$$

本文利用初等方法建立这 2 个函数之间的密切关系,给出它们之间的一个恒等式,然后再用解析方法给出 $S_k(n)$ 的一个均值公式. 即证明如下 2 个结论:

定理 1　若 $a_k(n)$ 为正整数 n 的 k 次补数,则有恒等式

$$(S_k(n))^k = a_k(n)\cdot n. \tag{1}$$

定理 2　对任意实数 $x\geqslant 1$,以下渐近公式成立:

收稿日期:2013-10-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅科学计划资助项目(12JK871)

作者简介:吴成晶(1987-),女,陕西省安康市人,西安航空学院讲师. E-mail:1655909207@qq.com

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(n)=\frac{\zeta(2k-1)}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}-\frac{1}{p^{2k-1}+p^{2k-2}}\right)+O(x^{3/2+\varepsilon}),\tag{2}$$

其中 $\varepsilon>0$,是任意给定的正数.

特别当 $k=2$、3 时,由定理 2 可得如下推论:

推论 1　对任意实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S_2(n)=\frac{\zeta(3)x^2}{2\zeta(2)}+O(x^{3/2+\varepsilon}).\tag{3}$$

推论 2　对任意实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S_3(n)=\frac{\zeta(5)x^3}{2}\prod_p\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}\right)+O(x^{3/2+\varepsilon}).\tag{4}$$

2　定理的证明

先用初等方法给出定理 1 的证明. 由补数的定义知,若 $a_k(n)\cdot n=m^k$,即要证明 $S_k(n)=m$. 由 $S_k(n)$ 的定义知,即要证明 m 满足以下 2 个条件:

(1) $n\mid m^k$ 因为 $a_k(n)=m^k$,显然可得 $n\mid m^k$;

(2) m 为满足条件(1) 的最小正整数.

下面用反证法证明.

设 m 不是满足条件(1) 的最小正整数,则有 $S_k(n)<m$. 设 $S_k(n)=l$,得 $l<m$,由 $n\mid l^k$,可知存在整数 q,使得 $n\cdot q=l^k$.

由条件(1) 有 $a_k(n)\cdot n=m^k$,因为 $l<m$,得到 $q<a_k(n)$,这与 $a_k(n)$ 为数 n 的补数矛盾. 所以 m 为满足条件(1) 的最小整数,即 $a_k(n)=m$,定理 1 得证.

下面给出定理 2 的证明过程. 设

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}S_k(n)n^{-s},$$

由 Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}f(s)=&\prod_p\left(1+\frac{S_k(p)}{p^s}+\frac{S_k(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k(p^r)}{p^{rs}}+\cdots\right)=\\&\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p}{p^{ks}}+\frac{p^2}{p^{(k+1)s}}+\cdots+\frac{p^2}{p^{2ks}}+\cdots\right)=\\&\prod_p\left(1+\frac{1-1/p^{ks}}{1-1/p^s}\times\left(\frac{p}{p^s}+\frac{p^2}{p^{(k+1)s}}+\cdots+\frac{p^{n+1}}{p^{(nk+1)s}}+\cdots\right)\right)=\\&\prod_p\left(1+\frac{1-1/p^{ks}}{1-1/p^s}\times\frac{1}{p^{s-1}}\times\frac{1}{1-1/p^{ks-1}}\right)=\\&\frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}-\frac{1}{p^{ks-1}+p^{ks-s}}\right).\end{aligned}$$

函数 $f(s)x^s/s$ 在 $s=2$ 处有一阶极点,留数为

$$\frac{\zeta(2k-1)x^2}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}-\frac{1}{p^{2k-1}+p^{2k-2}}\right).$$

在 Perron 公式[10] 中取 $b=5/2,s_0=0,T>2$ 有

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{5/2-\mathrm{i}T}^{5/2+\mathrm{i}T}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{5/2+\varepsilon}}{T}\right).\tag{5}$$

将式(5) 的积分线移至 $s=3/2+\varepsilon\pm\mathrm{i}T$ 处,并取 $T=x$,可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}S_k(n)=&\frac{\zeta(2k-1)x^2}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}-\frac{1}{p^{2k-1}+p^{2k-2}}\right)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{3/2+\varepsilon-\mathrm{i}T}^{3/2+\varepsilon+\mathrm{i}T}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{3/2+\varepsilon})=\\&\frac{\zeta(2k-1)x^2}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}-\frac{1}{p^{2k-1}+p^{2k-2}}\right)+\end{aligned}$$

$$O\left(\int_{-T}^{T}\left|f\left(\frac{3}{2}+\varepsilon+\mathrm{i}t\right)\right|\frac{x^{3/2+\varepsilon}}{1+|t|}\mathrm{d}t\right)+O(x^{3/2+\varepsilon})=$$

$$\frac{\zeta(2k-1)x^2}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}-\frac{1}{p^{2k-1}+p^{2k-2}}\right)+O(x^{3/2+\varepsilon}). \qquad (6)$$

定理 2 得证. 在定理 2 中分别取 $k=2$, $k=3$,即可得到推论 1 和推论 2 .

参考文献:

[1] 张文鹏,李海龙. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2008.

[2] SMARANDACHE F. Only problems,not solutions[M]. Chicago:Xiquan Publishing House,1993.

[3] IBSTEDT H. Surfing on the ocean of number——A few Smarandache notions and similar topics[M]. New Mexico: Erthus University Press, 1996.

[4] IBSTEDT H. Computational aspects of number sequence[M]. Lupton:American Research Press,1999.

[5] 吕二兵. 关于 Smarandache Ceil 函数的一类均值问题[J]. 纺织高校基础科学学报,2013,26(2):155-157.

[6] 苟素. Smarandache Ceil 函数的均值[J]. 宁夏大学学报:自然科学版,2005,26(3):219-220.

[7] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的均值分布[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(2):235-238.

[8] 赵娜娜. 一个关于 Smarandache LCM 对偶函数的议程[J]. 纺织高校基础科学学报,2013,26(3):323-327.

[9] 路玉麟. 一个包含 Smarandache 函数的方程[J]. 纺织高校基础科学学报,2008,21(2):253-254.

[10] TOM M Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York:Spring-Verlag,1976.

Mean value of Smarandache Ceil function

WU Cheng-jing

(Faculty of Science, Xi′an Aeaonautical University, Xi′an 710077, China)

Abstract: The related properties of Smarandache function is an important aspect of elementary number theory and analytic number theory. By using the elementary methods, an equation involving of Smarandache function and complementary function is given, namely $(S_n(n))^k=a_k(n)\cdot n$. Then using the analytic method to get and asymptotic formula for the mean value of $S_k(n)$.

Key words: k-Smarandache Ceil function; k-power complement; elementary method; analytic method; asymptotic formula

编辑、校对:师 琅