DOI:10.13501/j.cnki.42-1569/n.2014.01.002

Smarandache Ceil 函数的均值研究

许军保
(兰州交通大学 数理学院,甘肃 兰州 730070)

摘要: 研究了 Smarandache Ceil 函数的均值性质,并利用初等方法得到了该函数关于 k 次方幂数列均值的几个渐近公式.

关键词: Smarandache Ceil 函数;k 次方幂数列;均值;渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1008-8423(2014)01-0064-04

Reseach on the Mean Value of Smarandache Ceil Function

XU Jun-bao
(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiao Tong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The mean value properties of the Smarandache Ceil function were studied, and several asymptotic formulas of this function was given by using the elementary and analytic methods. This shows that there exists better value distribution properties for the Smarandache Ceil function in some special sequences.

Key words: Smarandache Ceil function; k-power sequence; mean value; asymptotic formula

1 引言及有关定理

对于任意整数 n 及给定的正整数 k,n 的 k 次方上下部分数列定义如下:

$$a_k(n)=\min\{m^k\mid m^k\geqslant n,m\in N^+\},b_k(n)=\max\{m^k\mid m^k\leqslant n,m\in N^+\},$$

其中 $k\in N^+$,称 $a_k(n)$ 表示不小于 n 的最小 k 次方部分数列,亦称为上部 k 次方部分数列,称 $b_k(n)$ 表示不超过 n 的最大 k 次方部分数列,亦成为下部 k 次方部分数列,当 $k=3$ 时这个数列的前几项为:

$$a_3(1)=1,a_3(2)=8,a_3(3)=8,a_3(4)=8,a_3(5)=8,a_3(6)=8,a_3(7)=8,a_3(8)=8,a_3(9)=27,\cdots,$$

$$b_3(1)=1,b_3(2)=1,b_3(3)=1,b_3(4)=1,b_3(5)=1,b_3(6)=1,b_3(7)=1,b_3(8)=8,b_3(9)=8,\cdots.$$

对给定的正整数 n,k,且 $k\geqslant2$ 著名 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为最小的正整数 x,使得 $n\mid x^k$,即:$S_k(n)=\min\{x:x\in N^+,n\mid x^k\}$.

例如 $S_k(2)=2$,$S_k(3)=3$,$S_k(4)=2$,$\cdots$ 在 F. Smarandache[1] 的建议下,不少学者对 $a_k(n)$、$b_k(n)$ 和 $S_k(n)$ 的算术性质进行了研究[2-3]. 令:

$$D_k(n)=\frac{[a_k(1)+a_k(2)+a_k(3)+\cdots+a_k(n)]}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_k(n)}{n}$$

$$I_k(n)=\frac{[b_k(1)+b_k(2)+b_k(3)+\cdots+b_k(n)]}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_k(n)}{n}$$

$$K_k(n)=\sqrt[n]{a_k(1)+a_k(2)+a_k(3)+\cdots+a_k(n)}=(\sum_{i=1}^{n}a_k(n))^{\frac{1}{n}}$$

$$L_k(n)=\sqrt[n]{b_k(1)+b_k(2)+b_k(3)+\cdots+b_k(n)}=(\sum_{i=1}^{n}b_k(n))^{\frac{1}{n}}$$

本文主要利用解析方法研究 $S_k(n)$ 分别对于数列 $a_k(n)$ 及 $b_k(n)$ 的均值性质,同时研究了极限: $\dfrac{D_k(n)}{I_k(n)}$,

收稿日期: 2014-02-01.
基金项目: 国家自然科学基金项目(10574059);甘肃省自然科学项目(0710RJZA072).
作者简介: 许军保(1955-),男,副教授,主要从事基础数论及其应用的研究.

$\frac{K_k(n)}{L_k(n)}$,$(D_k(n)-I_k(n))$,$(K_k(n)-L_k(n))$的渐近性,

并得到了以下结论.

定理 1 对任意 $x>2$,渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a_k(n))=\frac{x^2}{2}+O(x^{\frac{2k-1}{k}}),\sum_{n\leqslant x}S_k(b_k(n))=\frac{x^2}{2}+O(x^{\frac{2k-1}{k}}).$$

定理 2 对一任意正整数 n,有渐近式及极限式:

$$\frac{D_k(n)}{K_k(n)}=1+O(n^{-\frac{1}{k}}),\lim_{n\to\infty}\frac{D_k(n)}{K_k(n)}=1.$$

定理 3 对一任意正整数 n,有渐近式及极限式:

$$\frac{I_k(n)}{L_k(n)}=1+O(n^{-\frac{1}{kn}}),\lim_{n\to\infty}\frac{I_k(n)}{L_k(n)}=1,\lim_{n\to\infty}(I_k(n)-L_k(n))=0.$$

定理 4 对一任意正整数 n,有渐近式及极限式:

$$D_k(n)-I_k(n)=\frac{k^2}{2k}n^{\frac{k-1}{k}}+O(1),\lim_{n\to\infty}\frac{D_k(n)-I_k(n)}{n^{\frac{k-1}{k}}}=\frac{k^2}{2k},\lim_{n\to\infty}(D_k(n)-I_k(n))^{\frac{1}{n}}=1.$$

2 定理的证明

这节用初等方法及 Euler 求和公式[5] 给出定理的证明. 对任意实数: $x>2$,显然存唯一的正整数 M、满足: $M^k<x\leqslant(M+1)^k$,其中 $k\in N^+$. $M=O(x^{\frac{1}{k}})$,于是有:

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a_k(n))=\sum_{0^k<n\leqslant 1^k}S_k(a_k(n))+\sum_{1^k<n\leqslant 2^k}S_k(a_k(n))+\cdots+\sum_{(M-1)^k\leqslant n<M^k}S_k(a_k(n))+\sum_{M^k\leqslant n<x}S_k(a_k(n))=$$
$$\sum_{r\leqslant M(r-1)}\sum_{^k<n\leqslant r^k}S_k(a_k(n))+\sum_{M^k<n\leqslant x}S_k((M+1)^k)=$$
$$\sum_{r\leqslant M}((r+1)^k-r^k)S_k(r^k)+([x]-M^k)S_k((M+1)^k)=$$
$$\sum_{r\leqslant M}(C_k^1\cdot r^{k-1}+C_k^2\cdot r^{k-2}+\cdots+C_k^ir^{k-i}+\cdots+C_k^{k-1}r+1)S_k(r^k)+([x]-M^k)S_k((M+1)^k)$$

由于 $S_k(n)\leqslant n$,从而 $S_k(r^k)\leqslant r^k$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 显然:

$$([x]-M^k)(M+1)^k\leq((M+1)^k-M^k)(M+1)^k=$$
$$C_k^1M^{2k-1}+(C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1)M^{2k-2}+(C_k^3+2C_k^1\cdot C_k^2)M^{2k-3}+\cdots+(C_k^{k-1}\cdot C_k^{k-1}+2C_k^{k-1})M^2+2C_k^{k-1}M+1$$

注意到 $M=O(\sqrt[k]{x})$,所以:

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a_k(n))=\frac{1}{2}M^{2k}-\frac{C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1}{2k-1}M^{2k-1}+\frac{C_k^3+2C_k^1\cdot C_k^2}{2k-2}M^{2k-2}+\cdots+kM^2-M+([x]-M^k-1)(M+1)^k=$$
$$\frac{1}{2}M^{2k}+\left(k-\frac{C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1}{2k-1}\right)M^{2k-1}+\cdots+(k+C_k^{k-1}\cdot C_k^{k-1}+2C_k^{k-1})M^2+(2k-1)M+1=\frac{x^2}{2}+O(x^{\frac{2k-1}{k}})$$

同理,对任意实数: $x>2$,显然存唯一的正整数 M、满足: $M^k<x\leqslant(M+1)^k$,其中 $k\in N^+$,$M=O(x^{\frac{1}{k}})$,注意到 $S_k(n)\leqslant n$,及 $S_k(r^k)\leqslant r^k$ 于是有:

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(b_k(n))=\sum_{0^k\leqslant n<1^k}S_k(b_k(1))+\sum_{1^k\leqslant n<2^k}S_k(b_k(2))+\cdots+\sum_{(M-1)^k\leqslant n<M^k}S_k(b_k(n))+\sum_{M^k\leqslant n<x}S_k(b_k(n))=$$
$$\sum_{r\leqslant M(r-1)}\sum_{3\leqslant n<r^3}S_k(b_k(n))+\sum_{M^3\leqslant n<x}S_k((M+1)^k)=$$
$$\sum_{r\leqslant M}(r^k-(r-1)^k)S_k((r-1)^k)+([x]-M^k+1)S_k(M^k)=$$
$$\sum_{r\leqslant M}(C_k^1r^{2k-1}-(C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1)r^{2k-2}+(C_k^3+2C_k^1\cdot C_k^2)r^{2k-3}-\cdots+2C_k^{k-1}r-1)+([x]-M^k+1)M^k=$$
$$\frac{1}{2}M^{2k}-\frac{C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1}{2k-1}M^{2k-1}+\frac{C_k^3+2C_k^1\cdot C_k^2}{2k-2}M^{2k-2}+\cdots+kM^2+M+([x]-M^k+1)M^k$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 显然:

$$([x]-M^k+1)M^k\leqslant((M+1)^k-M^k+1)M^k=$$
$$C_k^1M^{2k-1}+C_k^2M^{2k-2}+C_k^3M^{2k-3}+\cdots+C_k^{k-2}M^{k+2}+C_k^{k+1}M^{k+1}+2M^k$$

注意到 $M=O(\sqrt[k]{x})$,所以:

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(b_k(n))=\frac{1}{2}M^{2k}-\frac{C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1}{2k-1}M^{2k-1}+\frac{C_k^3+2C_k^1\cdot C_k^2}{2k-2}M^{2k-2}+\cdots+kM^2-M+([x]-M^k-1)(M+1)^k=$$

$$\frac{1}{2}M^{2k}+\left(k-\frac{C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1}{2k-1}\right)M^{2k-1}+\cdots+(k+C_k^{k-1}\cdot C_k^{k-1}+2C_k^{k-1})M^2+(2k-1)M+1=\frac{x^2}{2}+O(x^{\frac{2k-1}{k}})$$

故有 $\sum_{n\leqslant x}S_k(b_k(n))=\frac{x^2}{2}+O(x^{\frac{2k-1}{k}})$. 定理1证毕.

在定理1中,取 $x=n$,则:

$$D_k(n)=\frac{\sum_{i=1}^{n}S_k(a_k(n))}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{2}+O(n^{\frac{2k-1}{k}})\right)=\frac{n}{2}+O(n^{\frac{k-1}{k}})$$

$$I_k(n)=\frac{\sum_{i=1}^{n}S_k(b_k(n))}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{2}+O(n^{\frac{2k-1}{k}})\right)=\frac{n}{2}+O(n^{\frac{k-1}{k}})$$

$$K_k(n)=(\sum_{i=1}^{n}S_k(a_k(n)))^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{n^2}{2}+O(n^{\frac{2k-1}{k}})\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$L_k(n)=(\sum_{i=1}^{n}S_k(b_k(n)))^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{n^2}{2}+O(n^{\frac{2k-1}{k}})\right)^{\frac{1}{n}}$$

立刻得到:

$$\frac{D_k(n)}{I_k(n)}=\frac{\frac{n}{2}+O(n^{\frac{k-1}{k}})}{\frac{n}{2}+O(n^{\frac{k-1}{k}})}=1+O(n^{-\frac{1}{k}}),$$

$$\frac{K_k(n)}{L_k(n)}=\frac{\left(\frac{n^2}{2}+O(n^{\frac{2k-1}{k}})\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n^2}{2}+O(n^{\frac{2k-1}{k}})\right)^{\frac{1}{n}}}=(1+O(n^{-\frac{1}{k}}))^{\frac{1}{n}}=1+O(n^{-\frac{1}{kn}})$$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_k(n)}{I_k(n)}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{K_k(n)}{L_k(n)}=1$,

此外,注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}K_k(n)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}L_k(n)=1$,因此:

$$\lim_{n\to\infty}(K_k(n)-L_k(n))=0$$

即得定理2、3的结论.

$$D_k(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_k(a_k(n))=\frac{1}{n}\sum_{r\leqslant n}S_k(a_k(n))=\frac{1}{n}\sum_{r\leqslant M}(r^k-(r-1)^k)S_k(r^k)+\frac{1}{n}(n-M^k-1)S_k((M+1)^k)=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{r\leqslant M}(C_k^1\cdot r^{2k-1}-C_k^2\cdot r^{2k-2}+C_k^3\cdot r^{2k-3}+\cdots+C_k^i(-1)^{i+1}r^{2k-i}+\cdots+C_k^{k-1}(-1)^k r^{k+1}+(-1)^{k+1}r^k)+$$

$$\frac{1}{n}(n-M^k-1)(M+1)^k=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}M^{2k}-\frac{C_k^2}{2k-1}M^{2k-1}+\frac{C_k^3}{2k-2}M^{2k-2}+\cdots+\frac{C_k^i\cdot(-1)^{i+1}}{2k-i+1}M^{2k-i+1}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}M^{k+1}\right)+\frac{1}{n}(n-M^k)(M+1)^k$$

$$I_k(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_k(b_r(n))=\frac{1}{n}\sum_{r\leqslant n}S_k(b_k(n))=\frac{1}{n}\sum_{r\leqslant M}(r^k-(r-1)^k)(r-1)^k+\frac{1}{n}(n-M^k+1)M^k=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{r\leqslant M}(C_k^1r^{2k-1}-(C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1)r^{2k-2}+(C_k^3+2C_k^1\cdot C_k^2)r^{2k-3}-\cdots+2C_k^{k-1}r-1)+$$

$$\frac{1}{n}(n-M^k+1)M^k=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}M^{2k}-\frac{C_k^2+C_k^1\cdot C_k^1}{2k-1}M^{2k-1}+\frac{C_k^3+2C_k^1\cdot C_k^2}{2k-2}M^{2k-2}+\cdots+kM^2+M\right)+$$

$$\frac{1}{n}(n-M^k+1)M^k$$

注意到 $M = O(x^{\frac{1}{k}}) = n^{\frac{1}{k}} + O(1)$ 从而:

$$S_k(n) - I_k(n) = \frac{k^2}{n(2k-1)}M^{2k-1} + O\left(\frac{1}{n}M^{2k-2}\right) = \frac{k^2}{2k-1}M^{k-1} + O(M^{k-2}) = \frac{k^2}{2k-1}n^{\frac{k-1}{k}} + O(n^{1-\frac{2}{k}})$$

立刻得到推论 3: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_k(n) - I_k(n)}{n^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{k^2}{2k-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_k(n) - I_k(n))^{\frac{1}{n}} = 1$.

即得定理 4 的结论.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Sabin T, Tatiana T. Some new results concerning Smarandache Ceil function [J]. Smarandache NotJournal, 2002, 13(1/2/3): 30.

[3] Yi Yuan, Liang Fangchi. On the primitive numbers of power p and k – power root [C] //Zhang Wenpeng Reseach on Smarandache problems in number number theory, Phoenix: Hexis, 2004: 5 – 8.

[4] 黄炜. 关于 Smarandach 的 K 次方部分数列 [J]. 西南民族大学学报: 自然科学版, 2010, 36(5): 1 – 3.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

责任编辑: 时　凌

(上接第 33 页)

[25] 国家林业局保护司. 中国珍稀濒危保护植物的名录 [M]. 北京: 中国林业出版社, 2010.

[26] 李娜. 自然保护区植物旅游资源分类与评价研究 [D]. 北京: 北京林业大学, 2011.

[27] 柴孝仙. 衢州市观赏性芳香植物园林应用调查研究 [D]. 福州: 福建农林大学, 2013.

[28] 游荣盛. 园林植物文化解读体系研究 [D]. 福州: 福建农林大学, 2011.

[29] 贺建勋. 系统建模与数学模型 [M]. 福州: 福建科学技术出版社, 1995.

[30] 南开大学逻辑学教研室. 逻辑学基础教程 [M]. 天津: 南开大学出版社, 2003.

责任编辑: 高　山