第 36 卷 第 1 期
2017 年 3 月

延安大学学报(自然科学版)
Journal of Yanan University(Natural Science Edition)

Vol. 36 No. 1
Mar. 2017

DOI:10.13876/J.cnki.ydnse.2017.01.013

Smarandache LCM 函数与数论函数 $\overline{\Omega}(n)$ 的高次混合均值

鲁伟阳[1],高　丽[2]

(1. 陕西延安中学;2. 延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘　要: 利用初等和解析方法研究 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与数论函数 $\overline{\Omega}(n)$ 的混合函数 $(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^{\beta}$ 的均值问题,并给出较强的渐近公式。

关键词: Smarandache LCM 函数;数论函数;均值问题;渐近公式

中图分类号: O156.4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1004-602X(2017)01-0013-03

1　引言及结论

对任意正整数 n,著名的 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k,使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$,其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数。由其定义可得:若 $n=p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式,则

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}。\qquad(1)$$

有关这一函数或与其相关的研究很多,请参看文献[1-9]。

对于任意正整数 n,数论函数 $\overline{\Omega}(n)$ 定义为 $\overline{\Omega}(1)=0$,当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时,$\overline{\Omega}(n)=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots+\alpha_kp_k$。这个函数为可加函数,即对任意的正整数 m 和 n,有 $\overline{\Omega}(mn)=\overline{\Omega}(m)+\overline{\Omega}(n)$。关于这一函数的详细研究请参看文献[10-12]。

文献[12]研究了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与数论函数 $\overline{\Omega}(n)$ 的均方差问题,并给出一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2=\frac{4}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

本文主要利用初等和解析方法研究了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与数论函数 $\overline{\Omega}(n)$ 的混合函数 $(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^{\beta}$ 的均值问题,并得到一个较强的渐近公式。即证明了

定理　设 $k\geqslant2$ 为给定的整数,则对任意的实数 $x\geqslant2$,当 $\beta>1$ 时,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^{\beta}=\frac{2}{2\beta+1}\cdot\zeta\left(\frac{2\beta+1}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta-函数,$a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

2　相关引理

引理 1[13,14]　设 $x\geqslant2$ 为实数,则有

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{e_ix}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

收稿日期: 2016-10-16

基金项目: 陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);延安大学校级科研计划项目——引导项目(YD2014-05);延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介: 鲁伟阳(1989—),男,陕西兴平人,延安中学二级教师。

其中 $e_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $c_1=1$。

引理 2[15] (Abel 等式) 对任一数论函数 $a(n)$，令 $A(x)=\sum_{n\leqslant x}a(n)$，其中当 $x<1$ 时 $A(x)=0$。假设 f 在区间 $[y,x]$ 上有连续导数，其中 $0<y<x$，则有

$$\sum_{y<n<x}a(n)f(n)=$$
$$A(x)f(x)-A(y)f(y)-\int_y^x A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t。$$

引理 3 设 $x\in R, x\geqslant 2$，对任意素数 p 及正实数 α，则有

$$\sum_{n<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}p^{2\beta}=\frac{2}{2\beta+1}\cdot\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln\left(\frac{x}{n}\right)}+$$
$$\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^i\left(\frac{x}{n}\right)}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^{k+1}\left(\frac{x}{n}\right)}\right),$$

其中 $e_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

证明: 根据引理 1、引理 2 可得

$$\sum_{n<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}p^{2\beta}=\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-n^{2\beta}\cdot\pi(n)-$$
$$2\beta\int_n^{\sqrt{\frac{x}{n}}}t^{2\beta-1}\cdot\pi(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta}\cdot\left[\frac{\sqrt{\frac{x}{n}}}{\ln\sqrt{\frac{x}{n}}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot\sqrt{\frac{x}{n}}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{n}}}\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{\sqrt{\frac{x}{n}}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{n}}}\right)\right]-2\beta\int_n^{\sqrt{\frac{x}{n}}}\left(\frac{t^{2\beta}}{\ln t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot t^{2\beta}}{\ln^i t}\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{t^{2\beta}}{\ln^{k+1}t}\right)\right)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln\sqrt{\frac{x}{n}}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{n}}}$$
$$+O\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{n}}}\right)-\left[\frac{2\beta}{2\beta+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln\sqrt{\frac{x}{n}}}\right.$$
$$\left.+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{n}}}+O\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{n}}}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2\beta+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln\sqrt{\frac{x}{n}}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{n}}}$$
$$+O\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2\beta+1}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{n}}}\right)$$
$$=\frac{2}{2\beta+1}\cdot\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln\left(\frac{x}{n}\right)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^i\left(\frac{x}{n}\right)}$$
$$+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^{k+1}\left(\frac{x}{n}\right)}\right),$$

其中 $e_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

3 定理的证明

在和式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^{\beta} \tag{2}$$

中，把区间 $[1,x]$ 中所有的正整数 n 分成以下 4 个子集合:

A: 区间 $[1,x]$ 中所有满足存在素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数 n;

B: 区间 $[1,x]$ 中所有满足 $n=n_1p_1p_2$ 的正整数 n，其中 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\leqslant\sqrt{n}$;

C: 区间 $[1,x]$ 中所有满足 $n=n_1p^2$ 的正整数 n，其中 $n^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{n}$;

D: 区间 $[1,x]$ 中所有不属于 A,B,C 的正整数 n。

首先考虑集合 A，由(1)式结合 A 的定义可知

$$\sum_{n\in A}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^{\beta}$$
$$=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n,\sqrt{n}<p}}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^{\beta}$$
$$=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}(p-p-\overline{\Omega}(n))^{\beta}$$
$$=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}(-\overline{\Omega}(n))^{\beta}\ll\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}n^{\beta}\ll\frac{x^{\beta}}{\ln x}。 \tag{3}$$

其次考虑集合 B,

$$\sum_{n\in B}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^{\beta}$$
$$=\sum_{\substack{np_1p_2\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\leqslant\sqrt{np_1p_2}}}(p_2-p_1-p_2-\overline{\Omega}(n))^{\beta}$$
$$=\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}\sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{p_1n}}[-(p_1+\overline{\Omega}(n))]^{\beta}$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}} \sum_{n<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}} \sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{p_1 n}} \left[p_1^{\beta}+O\left(p_1 x^{\frac{1}{\beta+1}}\right)\right]$$

$$=\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}} \sum_{n<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}} \sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{p_1 n}} p_1^{\beta}+O\left(\frac{x^{\frac{3\beta+5}{2(\beta+1)}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

$$\ll\frac{x^{\beta}}{\ln^{k+1}x}。\qquad(4)$$

再次考虑集合 C，

$$\sum_{n\in C}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^{\beta}$$

$$=\sum_{\substack{np_1^2\leqslant x\\ n<p_1}}\left(p_1^{2}-2p_1-\overline{\Omega}(n)\right)^{\beta}$$

$$=\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}\left[p^{2\beta}+O\left(p^{\beta+1}\right)+O\left(p^{\beta}n\right)\right]$$

$$=\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}p^{2\beta}+O\left(\frac{x^{\frac{\beta+2}{2}}}{\ln x}\right)。\qquad(5)$$

结合引理 3 可得

$$\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}p^{2\beta}=\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2}{2\beta+1}\cdot\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln\left(\frac{x}{n}\right)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^{i}\left(\frac{x}{n}\right)}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^{k+1}\left(\frac{x}{n}\right)}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{2\beta+1}\cdot x^{\frac{2\beta+1}{2}}\cdot\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln\left(\frac{x}{n}\right)}$$

$$+\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^{i}\left(\frac{x}{n}\right)}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{k+1}x}\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{n^{\frac{2\beta+1}{2}}}\right)$$

$$=\frac{2}{2\beta+1}\cdot\zeta\left(\frac{2\beta+1}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{i}x}$$

$$+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\qquad(6)$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

最后考虑集合 D,由(2)式及集合 D 的定义知: 对 $\forall n\in D$,若 $SL(n)=p$ 为素数,则 $p<\sqrt{n}$;若 $SL(n)=p^2$，则 $p<n^{\frac{1}{3}}$ 或 $SL(n)=p^{\alpha}$,$\alpha\geqslant3$,无论哪种情况都有

$$\sum_{n\in D}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^{\beta}\ll$$

$$\sum_{np\leqslant x}\sqrt{np}+\sum_{\substack{np^2\leqslant x\\ p\leqslant n}}p^{2\beta}+\sum_{\substack{np^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha\geqslant3}}p^{\alpha\beta}\ll x^{\frac{2\beta+3}{3}}。\qquad(7)$$

结合(3),(4),(5),(6),(7)可得

$$\sum_{n\leqslant x}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^{\beta}=\sum_{n\in A}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^{\beta}$$

$$+\sum_{n\in B}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^{\beta}+\sum_{n\in C}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^{\beta}$$

$$+\sum_{n\in D}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^{\beta}$$

$$=\frac{2}{2\beta+1}\cdot\zeta\left(\frac{2\beta+1}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{i}x}$$

$$+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

参考文献:

[1] Murthy A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal,2001,12: 307 – 309.

[2] Lv Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value [J]. Scientia Magna,2007,3(1): 22 – 25.

[3] Le Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function [J]. Smarandache Notions Journal,2004,14: 186 – 188.

[4] 刘华,吕松涛. 一个包含 F. Smarandache 函数的复合函数[J]. 江西科学,2009,27(3): 325 – 327.

[5] Xue Yanrong. On the F. Smarandache LCM function SL(n) [J]. Scientia Magna,2007,3(4): 69 – 73.

[6] Ge Jian. Mean value of F. Smarandache LCM function [J]. 2007,3(2): 109 – 112.

[7] Chen Jianbin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function [J]. 2007,3(2): 15 – 18.

[8] 吕国亮. 关于 F. Smarandache LCM 函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(3): 101 – 105.

[9] 付静,刘华. 关于 F. Smarandache LCM 函数与除数函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版),2010,39(6): 560 – 562.

[10] 薛社教. 一个新的算术函数及其均值[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(3): 351 – 354.

[11] 王曦浛,高丽,鲁伟阳. 关于伪 Smarandache 函数的一个混合均值[J]. 海南大学学报(自然科学版),2015,33(2): 97 – 99.

[12] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差问题[J]. 纯粹数学与应用数学,2008,24(1):71 – 74.

[13] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社,1999.

[14] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社,1988.

[15] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring – Verlag,1976.

责任编辑　毕　伟

(下转第 20 页)

年刊，2012，33A(3)：341 -350.

[7] 黄永东，李秋富．a 进制最小能量小波框架的构造[J]．中国科学：信息科学，2013，43(4)：469 -487.

[8] Mubeen M，Narayanan V. Construction of multiscaling functions using the inverse representation theorem of matrix polynomials[J]. Mathematical Sciences，2016，10(3)：95 -104.

[9] Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases[M]. Boston：BIrkhauser，2003.

[10] 刘明才．小波分析及其应用[M]．北京：清华大学出版社，2013.

[11] 杨守志，郑贤伟．$L^2(\mathbf{R}^n)$上的半正交多小波框架[J]．中国科学：数学，2014，44(3)：249 -262.

[12] 郭蔚，彭立中．多小波框架的构造理论[J]．中国科学，2010，40(10)：1115 -1128.

[责任编辑 毕 伟]

Construction for Filter Banks of the Three - dimensional Multi - scale Tight Wavelet Frames

CAI Chuan-li[1,2], CHEN Qing-jiang[2]

(1. College of Mathematics and Computers Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China;
2. School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: Construction for the filter banks of three - dimensional multi - scale tight wavelet frames was studied. Firstly, according to the frame multiresolution analysis and the inequality of the filter function associated with the scaling function, the sufficient condition for the existence of three - dimensional multi - scale tight wavelet frames was provided by using time - frequency analysis method. Secondly, the constructive method for the filter banks for three - dimensional tight wavelet frames were formulated.

Key words: frame multiresolution analysis; tight wavelet frames; multiscale function; filter bank functions

(上接第15页)

The High Hybrid Mean Value of the Smarandache LCM Function and the Arithmetical Function $\overline{\Omega}(n)$

LU Wei-yang[1], GAO LI[2]

(1. Yan'an Senior High School, Yan'an 716000, China; 2. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: The elementary method and analytic method were performed to study the mean value problem of hybrid function $(SL(n) - \overline{\Omega}(n))^{\beta}$ involving the Smarandache LCM function $SL(n)$ and the arithmetical function $\overline{\Omega}(n)$, and a sharper asymptotic formula was proposed.

Key words: Smarandache LCM function; arithmetical function; mean value problem; asymptotic formula