DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2010.03.016

第 23卷第 3期　纺织高校基础科学学报　Vol.23, No.3
2010年 9月　BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES　Sept., 2010

文章编号: 1006-8341(2010)03-0323-03

Smarandache LCM的对偶函数与最小素因子函数的均方值

闫晓霞

(汉中职业技术学院 教育系,陕西 汉中 723000)

摘要: 研究了 Smarandache LCM函数的对偶函数与最小素因子函数的均方值分布问题. 利用初等及解析方法给出一个有趣的均值公式,从而推出这两个函数的值几乎处处相同.

关键词: Smarandache LCM函数的对偶函数; 最小素因子函数; 均方值; 渐近公式; 初等方法; 解析方法

中图分类号: O156.4　　文献标识码: A

1 引言及结论

$\forall n\in N_+$, 著名的 Smarandache LCM函数 $SL(n)$定义为最小的正整数 k使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$, 这里 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$的最小公倍数. 例如 $SL(6)=3$, $SL(10)=5$, $SL(12)=4$, $SL(20)=5$, $\cdots$. 特别当 n的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时, 不难验证

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}.$$

关于这个函数的性质, 许多学者进行了研究, 并取得了不少重要的结果[1-6]. 文献[4]研究了 $SL(n)$的均值性质, 给出了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 b_i $(i=1,2,3,\cdots,k)$是可计算的常数.

文献[5]研究了均方值 $(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2$的渐近性质, 给出了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2=\frac{4}{5}\zeta\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{x^{5/2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{5/2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{5/2}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(n)$为 Riemann Zeta函数, c_i为可计算的常数, $\overline{\Omega}(n)$为可加函数定义为 $\overline{\Omega}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i p_i$, 如果 n的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$.

本文定义函数 $SL(n)$的对偶函数 $\overline{SL}(n)$为

$$\overline{SL}(n)=\min\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\},$$

收稿日期: 2010-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)

作者简介: 闫晓霞(1970-), 女, 陕西省汉中市人, 汉中职业技术学院讲师. E-mail: yanxiaoxia2007@sina.com

其中 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式. 这个函数的前几项为 $\overline{SL}(1)=1$, $\overline{SL}(6)=2$, $\overline{SL}(12)=3$, $\overline{SL}(20)=4$, …. 关于这一函数的初等性质, 至今知道的甚少, 甚至不知道它的均值分布性质!

本文利用初等及解析方法研究均方值

$$\sum_{n\leqslant x}(\overline{SL}(n)-P(n))^2 \tag{1}$$

的渐近性质, 其中 $P(n)$ 表示 n 的最小素因子. 例如 $P(20)=2$, $P(21)=3$. 关于式 (1) 的均值性质, 至今似乎没有人研究. 然而这一问题是有意义的, 因为式 (1) 的渐近性反映了这两个函数值分布的规律性. 本文针对这一问题进行了研究, 并给出了一个有趣的均值公式. 具体地说也就是证明了下面的结论.

定理 1 设 k 为给定的正整数, 那么 $\forall x\in\mathbf{R}$, 且 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(\overline{SL}(n)-P(n))^2=\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{5/2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{5/2}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 c_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数且 $c_1=4/5$.

显然定理 1 中的误差项是非常弱的, 也就是说误差项与主项仅差一个 $1/\ln x$ 因子, 是否存在式 (1) 的一个较强的渐近公式也是一个有趣的问题. 建议有兴趣的读者进一步研究.

2 定理 1 的证明

将所有小于或等于 x 的正整数 n 分为以下 2 个集合讨论: $A=\{n: \omega(n)=1, n\leqslant x\}$; $B=\{n: \omega(n)\geqslant 2, n\leqslant x\}$, 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的所有不同素因子的个数. 现在分别估计函数 $(\overline{SL}(n)-P(n))^2$ 在这 2 个集合上的均值. 注意到 $\forall k\in\mathbf{N}_+$, 由文献 [8] 中定理 3.2 可得

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 a_i 为可计算的常数且 $a_1=1$, 于是应用 Abel 求和公式[9] 可得

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^4=x^2\cdot\pi(\sqrt{x})-3\int_2^{\sqrt{x}}y^3\cdot\pi(y)\,\mathrm{d}y=$$

$$x^2\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot\sqrt{x}}{\ln^i\sqrt{x}}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-3\int_2^{\sqrt{x}}y^3\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot y}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right)\mathrm{d}y=$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x^{5/2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{5/2}}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{2}$$

其中 c_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $c_1=4/5$.

于是应用式 (2) 有

$$\sum_{n\in A}(\overline{SL}(n)-P(n))^2=\sum_{p^\alpha\leqslant x}(\overline{SL}(p^\alpha)-p)^2=\sum_{p\leqslant x}(p-p)^2+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2}}(p^\alpha-p)^2=$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}(p^2-p)^2+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant 3}}(p^\alpha-p)^2=$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^4+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^3\right)+O\left(\sum_{p\leqslant x^{1/3}}p^6\right)=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x^{5/2}}{\ln^i x}\right)+O\left(\frac{x^{5/2}}{\ln^{k+1}x}\right). \tag{3}$$

现在估计主要误差项. 当 $n\in B$ 时, 由于 $\omega(n)\geqslant 2$, 设 $\overline{SL}(n)=q^\alpha$, $n=q^\alpha n_1$, 其中 $\overline{SL}(n_1)>q^\alpha$, 如果 $\alpha=1$, 那么 $SL(n)-P(n)=0$. 于是当 $(\overline{SL}(n)-P(n))^2\neq 0$ 时有 $\alpha\geqslant 2$ 且有不等式 $q^\alpha<\sqrt{n}<n_1$, 从而应用 Abel 求和不难得到

$$\sum_{n\in B}(\overline{SL}(n)-P(n))^2=\sum_{q^\alpha\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n_1\leqslant x/q^\alpha}(q^\alpha-P(qn_1))^2\ll$$

$$\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\sum_{\substack{n_1\leqslant x/q\\ \overline{SL}(n_1)>q}}(q-q)^2+\sum_{q\leqslant x^{1/4}}\sum_{n_1\leqslant x/q^2}q^6\ll$$

$$x \sum_{q \le x^{1/4}} q^4 \ll x^{9/4} \ll \frac{x^{5/2}}{\ln^{k+1} x}. \tag{4}$$

现在结合式（3）~（4)立刻推出渐近公式

$$\sum_{n \le x} (\overline{SL}(n) - p(n))^2 = \sum_{n \in A} (\overline{SL}(n) - p(n))^2 + \sum_{n \in B} (\overline{SL}(n) - p(n))^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i \cdot x^{5/2}}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{5/2}}{\ln^{k+1} x}\right).$$

其中 c_i （$i=1, 2, \cdots, k$)为可计算的常数且 $c_1 = 4/5$证毕.

参考文献:

[1] 张文鹏. 关于 F. Smarandache函数的两个问题[J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2008, 38(2): 1-3.

[2] CHEN Jianbin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 15-18.

[3] MURTHY A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[4] LV Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[5] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM函数的一类均方差均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(1): 71-74.

[6] GE Jian. Mean value of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 109-112.

[7] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[8] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[9] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

On the mean square value of the dual function of Smarandache LCM function and the smallest prime divisor function

YAN Xiao-xia

(Education Department, Hanzhong Vocational and Technical College, Hanzhong, Shaanxi 723000, China)

Abstract: The main purpose is to study the distribution properties of a mean square value involving the dual function of Smarandache LCM function and the smallest prime divisor function, and an interesting mean square value formula is given by using the elementary and analytic methods. This shows that this two values of $\overline{SL}(n)$ are almost equal to the smallest prime divisor function.

Key words: dual function of smarandache LCM function; smallest prime divisor function; mean square value; asymptotic formula; elemantary method; analytic method

编辑、校对: 武　晖