DOI:10.15983/j.cnki.jsnu.2013.01.016

文章编号:1672-4291(2013)01-0020-03

Smarandache-Pascal 派生逆序列的几个恒等式

赵院娥[1], **刘　卓**[2]

(1 延安大学 数学与计算机学院, 陕西 延安 716000;
2 西北大学 数学系, 陕西 西安 710127)

摘　要: 引入了 Smarandache-Pascal 派生逆序列的定义,并利用初等及组合方法讨论了 Smarandache-Pascal 派生逆序列的性质,得到几个有趣的恒等式,从而证明了如果任何基序列$\{T_n\}$是一个二阶线性递推序列,那么它所产生的 Smarandache-Pascal 派生逆序列$\{b_n\}$也是一个二阶线性递推数列,且当基数列$\{T_{dn+1}\}$是一个二阶线性递推数列$\{T_n\}$的子列时,则它的派生逆序列$\{b_n\}$的线性表示式更为简洁.

关键词: Smarandache-Pascal 派生序列; 逆序列; 二阶线性递推数列; 组合方法; 恒等式

中图分类号: O156.4　**文献标志码**: A

Some identities on the Smarandache-Pascal inverse derived sequence

ZHAO Yuan-e[1], LIU Zhuo[2]

(1 College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi, China;
2 Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, Shaanxi, China)

Abstract: Smarandache-Pascal inverse-derived sequence is introduced, the properties of the Smarandache-Pascal inverse-derived sequence are studied, some interesting identities are obtained by using the elementary and combinational method, and it is proved that if the base sequence $\{T_n\}$ is a second-order linear recurrence sequence, then its Smarandache-Pascal inverse-derived subsequence is a second-order linear recurrence sequence. Moreover, if the base sequence $\{T_{dn+1}\}$ is a subset of the second-order linear recurrence sequence $\{T_n\}$, then its Smarandache-Pascal inverse-derived sequence $\{b_n\}$ has a simple linear recurrence expression.

Key words: Smarandache-Pascal derived sequence; inverse sequence; second-order linear recurrence sequence; combinational method; identity

MR subject classification: 11A25

对任意基序列$\{b_n\}$,定义它的 Smarandache-Pascal 派生序列$\{T_n\}$为 $T_1=b_1$, $T_2=b_1+b_2$, $T_3=b_1+2b_2+b_3$,一般地

$$T_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{k+1},\ n\geqslant 2.$$

其中$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$为组合数.

文献[1]详细介绍了 Smarandache-Pascal 派生序列的定义及其性质,同时还提出了一系列有趣的命题和猜想,例如猜测当$\{b_n\}=\{F_{8n+1}\}=\{F_1,F_9,F_{17},F_{25},\cdots\}$及 $n\geqslant 2$ 时有恒等式

$$T_{n+1}=49(T_n-T_{n-1}).$$

其中$\{F_n\}$表示著名的 Fibonacci 数列.

最近,有不少学者研究了 Smarandache-Pascal 派生序列的性质以及文献[1]中提出的猜想,他们不仅解决了这些问题,同时又将文献[1]中的内容进行了推广和延伸,给出了一般性的结论. 本文的主要目的是引入 Smarandache-Pascal 派生逆序列,进而研究它的各种性质. 为此, 先引入 Smarandache-Pascal 派生序列的逆序列的定义:对任意序列$\{T_n\}$,定义 $b_1=T_1$, $b_2=T_2-T_1$,当 $n\geqslant 2$ 时:

收稿日期:2012-06-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅科学研究计划项目(11JK0489).

第一作者:赵院娥,女,副教授,主要从事数论与代数的教学与研究. E-mail: ydzye@163.com.

$$b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}T_{k+1}.$$

这一序列之所以称为 Smarandache-Pascal 派生序列的逆序列是因为 $T_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{k+1}$ 当且仅当 $b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}T_{k+1}$. 这一性质不难用数学归纳法证明. 本文对这一序列的性质进行研究，并利用初等及组合方法得到几个有意义的恒等式.

1　预备知识

为叙述方便，先给出二阶线性递推数列的一个简单结论：

引理 1　设整数 $m\geqslant 0$ 及 $n\geqslant 2$. 如果数列 $\{X_n\}$ 满足递推关系 $X_{n+2}=aX_{n+1}+bX_n(n\geqslant 0)$，那么有恒等式 $X_{m+n}=A_{n-1}X_{m+1}+bA_{n-2}X_m$. 其中 A_n 定义为 $A_0=1$. $A_1=a$ 及 $A_{n+1}=aA_n+bA_{n-1}, n\geqslant 1$. 或者计算公式

$$A_n=\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

证明　用归纳法. 注意到递推公式 $X_{m+2}=aX_{m+1}+bX_m, A_1=a, A_0=1, A_{n+1}=aA_n+bA_{n-1}, n\geqslant 1$. 所以 $X_{m+2}=A_1X_{m+1}+bA_0X_m$. 即就是当 $n=2$ 时引理 1 成立. 因为 $X_{m+3}=aX_{m+2}+bX_{m+1}=a(aX_{m+1}+bX_m)+bX_{m+1}=(a^2+b)X_{m+1}+baX_m=A_2X_{m+1}+bA_1X_m$. 即当 $n=3$ 时引理 1 成立. 假定引理 1 对所有整数 $2\leqslant n\leqslant k$ 成立，即就是 $X_{m+n}=A_{n-1}X_{m+1}+bA_{n-2}X_m$. 则当 $n=k+1$ 时，由 X_m 的递推关系及归纳假设有

$$\begin{aligned}X_{m+k+1}=aX_{m+k}+bX_{m+k-1}=&\\ a(A_{k-1}X_{m+1}+bA_{k-2}X_m)+&\\ b(A_{k-2}X_{m+1}+bA_{k-3}X_m)=&\\ (aA_{k-1}+bA_{k-2})X_{m+1}+&\\ b(aA_{k-2}+bA_{k-3})X_m=&\\ A_kX_{m+1}+bA_{k-1}X_{m-1}.&\end{aligned}$$

就是说当 $n=k+1$ 时引理 1 成立.

2　主要结果

定理 1　设 $\{X_n\}$ 是一个二阶线性递推数列且 $X_0=u, X_1=v$，对所有 $n\geqslant 1, X_{n+1}=aX_n+bX_{n-1}$，其中 $a^2+4b>0$. 那么对任意正整数 $d\geqslant 1$，当

$$b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}X_{dk+1}$$

时有恒等式

$$\begin{aligned}b_{n+1}=&(A_d+bA_{d-2}-2)b_n+\\&(A_d+bA_{d-2}-1-(-b)^d)b_{n-1}.\end{aligned}$$

其中 $\{A_n\}$ 定义为 $A_0=1, A_1=a, A_{n+1}=aA_n+bA_{n-1}, n\geqslant 1$. 事实上 A_n 的表示式为

$$A_n=\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

证明　对任意正整数 d，由 b_n 的定义及二项式系数 $\binom{n}{k}$ 的性质

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\tag{1}$$

及

$$\begin{aligned}b_{n+1}=&\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}X_{dk+1}=\\&(-1)^nX_1+X_{dn+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n+k}\\&\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)X_{dk+1}=\\&-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}\binom{n-1}{k}X_{dk+1}+\\&\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-1+k}\binom{n-1}{k}X_{dk+d+1}+X_{dn+1}=\\&-b_n+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}\binom{n-1}{k}X_{dk+d+1},\end{aligned}\tag{2}$$

应用引理 1，有 $X_{dk+d+1}=A_dX_{dk+1}+bA_{d-1}X_{dk}$，再应用 (2) 式及 b_n 的定义可以推出

$$\begin{aligned}b_{n+1}=&-b_n+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}\binom{n-1}{k}\cdot\\&(A_dX_{dk+1}+bA_{d-1}X_{dk})=\\&-b_n+A_d\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}\binom{n-1}{k}\cdot\\&X_{dk+1}+bA_{d-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}\binom{n-1}{k}X_{dk}=\\&(A_d-1)b_n+bA_{d-1}\cdot\\&\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}\binom{n-1}{k}X_{dk}.\end{aligned}\tag{3}$$

另一方面，由引理 1 也有 $X_{dk+d}=A_{d-1}X_{dk+1}+bA_{d-2}X_{dk}$，于是应用这个递推关系及公式(1) 有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1+k}\binom{n-1}{k}X_{dk}=\\&(-1)^{n-1}X_0+X_{d(n-1)}+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{n-1+k}\\&\left(\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right)X_{dk}=\\&\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-1+k}\binom{n-2}{k}X_{dk}+\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^{n-2+k}\binom{n-2}{k}X_{dk+d}+X_{d(n-1)}=$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-1+k}\binom{n-2}{k}X_{dk}+$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-2+k}\binom{n-2}{k}(A_{d-1}X_{dk+1}+$$
$$bA_{d-2}X_{dk})=$$
$$(bA_{d-2}-1)\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-2+k}$$
$$\binom{n-2}{k}X_{dk}+A_{d-1}b_{n-1}. \tag{4}$$

由(3)式也可推出恒等式

$$b_n=(A_d-1)b_{n-1}+bA_{d-1}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-2+k}\binom{n-2}{k}X_{dk}. \tag{5}$$

再结合(3)、(4)及(5)式可以得到

$$b_{n+1}=(A_d-1)b_n+bA_{d-1}\cdot$$
$$\left((bA_{d-2}-1)\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-2+k}\binom{n-2}{k}\cdot\right.$$
$$\left.X_{dk}+A_{d-1}b_{n-1}\right)=$$
$$(A_d+bA_{d-2}-2)b_n+(A_d+bA_{d-2}-$$
$$bA_dA_{d-2}+bA_{d-1}^2-1)b_{n-1}. \tag{6}$$

由 A_n 的计算公式易得到恒等式

$$A_dA_{d-2}-A_{d-1}^2=-(-b)^{d-1}.$$

将其代入(6)式可以推出

$$b_{n+1}=(A_d+bA_{d-2}-2)b_n+$$
$$(A_d+bA_{d-2}-1-(-b)^d)b_{n-1}.$$

于是完成了定理1的证明.

若取 $b=1$,由定理1可得到下面的:

推论1 设$\{X_n\}$是一个二阶线性递推序列且 $X_0=u,X_1=v,X_{n+1}=aX_n+X_{n-1},n\geqslant 1$.对任意正整数 a 及偶数 $d\geqslant 2$,定义它的Smarandache-Pascal派生逆序列为

$$b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}X_{dk+1}.$$

那么有递推公式

$$b_{n+1}=(A_d+A_{d-2}-2)(b_n+b_{n-1}),n\geqslant 2.$$

推论2 设$\{X_n\}$是一个二阶线性递推序列且 $X_0=u,X_1=v,X_{n+1}=aX_n+X_{n-1},n\geqslant 1$.则对任意正整数 a 及奇数 $d\geqslant 1$,定义它的Smarandache-Pascal派生序列的逆序列为

$$b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}X_{dk+1}.$$

那么有递推公式

$$b_{n+1}=(A_d+A_{d-2}-2)b_n+(A_d+A_{d-2})b_{n-1},n\geqslant 2,$$

其中 $A_n=A_n(a)=\frac{1}{\sqrt{a^2+4}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right]$.

显然 $F_{n+1}(a)=A_n(a)$ 是 a 的一个多项式,有时也称这个多项式为Fibonacci多项式,因为 $F_n(1)=F_n$ 是著名的 Fibonacci 数.有关 Smarandache 问题及Fibonacci数的内容可参阅文献[2-6],这里不再重复.

如果在推论1中取 $a=2,X_0=P_0=0,X_1=P_1=1$ 以及 $P_{n+1}=2P_n+P_{n-1},n\geqslant 1$.那么 P_n 就成为Pell数.由推论1也可以推出下面的:

推论3 设 P_n 表示Pell数.那么对任意偶数 $d\geqslant 2$ 及 $b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}P_{dk+1}$,有递推公式

$$b_{n+1}=(P_{d+1}+P_{d-1}-2)(b_n+b_{n-1}),n\geqslant 2.$$

从定理1也不难推出如果$\{T_n\}$是一个二阶线性递推数列,那么它的Smarandache-Pascal派生逆序列$\{b_n\}$也是一个二阶线性递推数列.

3 结语

本文在前人研究Smarandache-Pascal派生序列的基础上,引入了Smarandache-Pascal派生逆序列的定义,用初等方法和组合技巧研究了它的性质,并且给出了关于Smarandache-Pascal派生逆序列的几个有意义的恒等式,这将有助于对Smarandache-Pascal派生逆序列的进一步认识和研究.

参考文献:

[1] Murthy A, Ashbacher C. Generalized partitions and new ideas on number theory and smarandache sequences [M]. Hexis:Phoenix, 2005:79.

[2] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House,1993.

[3] Wiemann M, Cooper C. Divisibility of an F-L type convolution, Applications of Fibonacci numbers[J]. Kluwer Academic Publishers Dordrecht,2004,9:267-287.

[4] Ma Rong,Zhang Wenpeng. Several identities involving the Fibonacci numbers and Lucas numbers[J]. The Fibonacci Quarterly,2007,45:164-170.

[5] Yi Yuan, Zhang Wenpeng. Some identities involving the Fibonacci polynomials[J]. The Fibonacci Quarterly, 2002,40:314-318.

[6] Wang Tingting, Zhang Wenpeng. Some identities involving Fibonacci, Lucas polynomials and their applications [J]. Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie,2012,55(1):95-103.

〔责任编辑 张惠民〕